

Verrijkingsmogelijkheden formalisatie en abstractie

Deze bijlage bevat een aantal verrijkingsmogelijkheden bij elk van de inhoudelijke hoofdonderwerpen van het examenprogramma wiskunde-tl. Door middel van coderingen als AVx, RMSx, Mx wordt verwezen naar voorbeelduitwerkingen in bijlage D.

Hoofdonderwerp: Algebraïsche vaardigheden

Verrijkingsmogelijkheden			
Onderwerp	Kennis	Inzicht	Vaardigheden
Lineaire verbanden	Startgetal en richtingscoëfficiënt rechtstreeks uit een lineaire formule aflezen.	Lineaire formules en recht evenredigheid herkennen. Zie AV1	Een formule opstellen op basis van een situatiebeschrijving en rechtstreeks uit een grafiek. Zie AV2
Exponentiële verbanden		Winnende grafieken. Zie AV3	Groefactor en beginhoeveelheid uit grafiek afleiden.
Wortelverbanden		Redeneren met wortelverbanden. Zie AV4	
Machtsverbanden		Alle grafieken gaan door hetzelfde punt. Zie AV5	
Omgekeerd evenredige verbanden	Term omgekeerd evenredig noemen.	Formules omrekenen. Zie AV6	
Tabellen - algemeen			Kwadratische tabellen herkennen en voortzetten. Zie AV7
Grafieken - algemeen	Termen interpoleren en extrapoleren noemen.	Snijdende grafieken. Zie AV8	Interpoleren met behulp van een formule. Zie AV9
Werken met formules	Onafhankelijke (IN) en afhankelijke variabele (UIT), grootheid en eenheid als termen noemen. Namen van variabelen. Zie AV10		

Verrijkingsmogelijkheden			
Onderwerp	Kennis	Inzicht	Vaardigheden
Rekenen met formules	Term substitueren noemen.	Twee formules beschrijven hetzelfde verband als ze door middel van een herleiding in elkaar om te zetten zijn. Enkele waarden invullen en de uitkomsten vergelijken geeft nooit uitsluitel of twee formules gelijkwaardig zijn, wel of twee formules ongelijkwaardig zijn.	Formules herleiden. Zie AV11 Formules combineren zonder pijlenketting. Zie AV12
Voorstellingvormen van verbanden			

Hoofdonderwerp: Rekenen, meten en schatten

Onderwerp	Verrijkmogelijkheden		
	Kennis	Inzicht	Vaardigheden
Handig rekenen			
Rekenmachinegebruik		Relaties tussen irrationale wortels onderkennen zonder gebruikmaking van de rekenmachine. Zie RMS1 Oneindig veel decimalen. Zie RMS2 Breuken als zelfstandige getallen beschouwen. Zie RMS3 Een percentage als een zelfstandig object beschouwen. Zie RMS4	
Meten en schatten			
Basisrekentechnieken	Verhoudingentaal. Zie RMS5	Uitleg van de optel- en aftrekgeregels met behulp van het permanentieprincipe. Zie RMS6. Negatieve getallen invullen. Zie RMS7 Verhoudingen met behulp van variabelen beschrijven. Zie RMS8 Haakjes wegwerken verklaren. Zie RMS9	Breuken ordenen door ze gelijknamig te maken. Zie RMS3 Verhoudingsproblemen zonder verhoudingstabel oplossen. Zie RMS10

Hoofdonder: Meetkunde

	Verrijkmogelijkheden		
Onderwerp	Kennis	Inzicht	Vaardigheden
Voorstellingen van objecten	Figuren herkennen op basis van hun eigenschappen. Zie M1	Een verbinding leggen tussen iso-hoogtelijnen en doorsneden. Wat maakt een CT-scan in een ziekenhuis van een menselijk lichaam: aanzichten, doorsneden of uitslagen?	
Schatten, meten en berekenen	Hoeken aanduiden met Griekse letters.	Een schaalverhouding als zelfstandig object beschouwen. Zie M2	
Redeneren en tekenen	Gebruik van de stelling van Pythagoras in een formele weergave. Zie ook M3	Goniometrische verhoudingen als zelfstandig object beschouwen. Zie M4 Geef aan wanneer twee driehoeken gelijkvormig zijn. Zie M5 Redeneeropgaven met gebruikmaking van gelijkvormigheid. Zie M5	

Hoofdonderwerp: Informatieverwerking, statistiek

	<i>Verrijkmogelijkheden</i>		
<i>Onderwerp</i>	<i>Kennis</i>	<i>Inzicht</i>	<i>Vaardigheden</i>
Statistische representatievormen		Leg uit hoe je de kwartielafstand kunt aflezen uit een boxplot. Een graaf gebruiken om een toevalsituatie uit te beelden.	
Verwachtingen en conclusies		Een graaf gebruiken om kansen te berekenen.	

Voorbeelduitwerkingen van verrijkmogelijkheden

Deze bijlage bevat verrijksvoorbeelden die verhoging van het niveau van formeel en abstract denken van leerlingen beogen. De nummering correspondeert met die uit bijlage C.

AV1 Lineaire formules en evenredigheid herkennen

- Welk van de onderstaande formules zijn lineaire formules?

$$y = 2x + 5$$

$$y = 5 + 2x$$

$$y = 5$$

$$y = \frac{2x+5}{4}$$

$$2x + 3y = 5$$

$$2y + 3x = 5$$

- Wat is bij elk van bovenstaande formules de waarde van a en b in de algemene vorm $y = ax + b$?

- Bij welke formules hoort een evenredig verband?

$$y = 2x$$

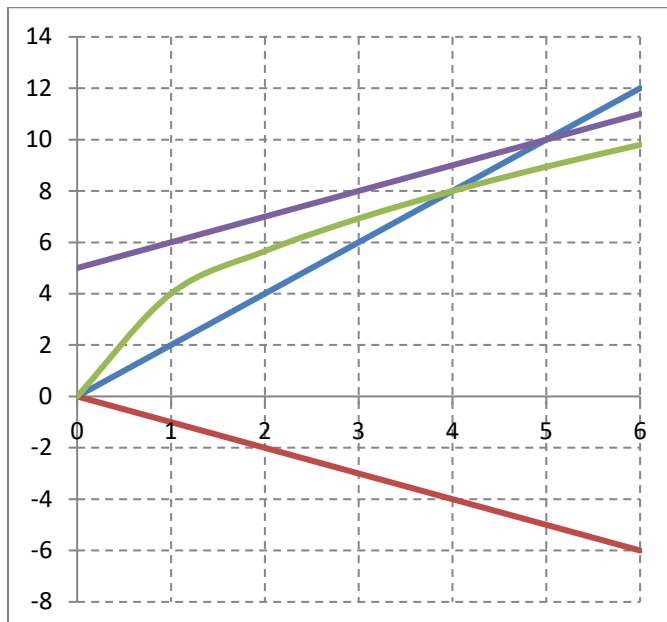
$$y = 2x + 2$$

$$y = 2x - 2$$

$$y = -2x$$

$$y = 2$$

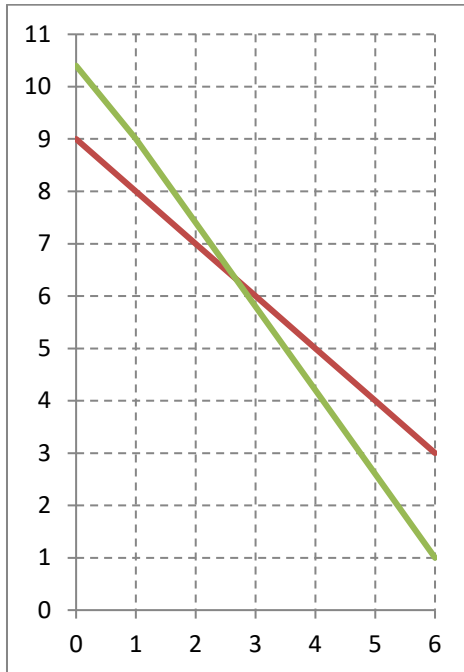
- Welk van onderstaande grafieken horen bij een evenredig verband?



AV2 Een formule bij een lineair verband opstellen

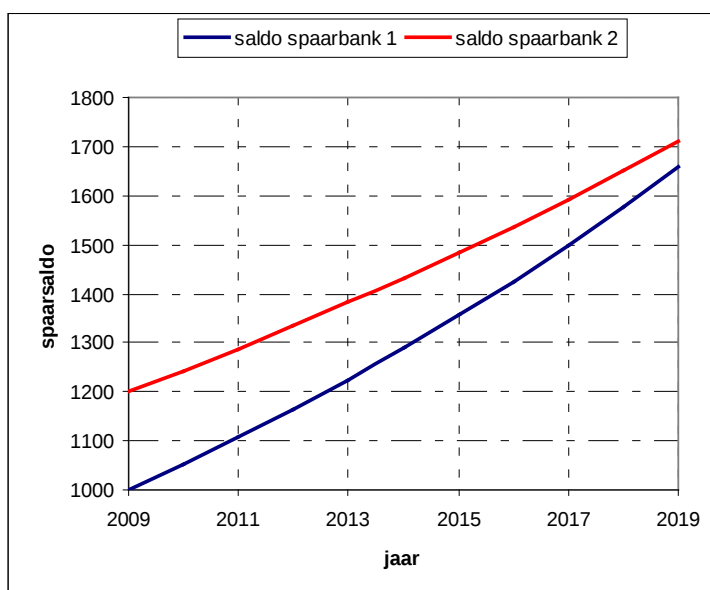
- In de grafiek hieronder staan twee rechte lijnen.

- Geef de formule bij het lineair verband waarvan de rode lijn de grafiek voorstelt.
- Geef de formule bij het lineair verband waarvan de groene lijn de grafiek voorstelt.
- Op de grafiek van een lineair verband liggen de punten (1,3; 4,5) en (2,5; 9,9). Hoe luidt zijn formule?



AV3 Winnende grafieken

In de onderstaande figuur zie je de groei van een spaarsaldo van € 1000 bij twee verschillende spaarbanken als gevolg van "rente op rente". Bij een van beide banken ontvang je een welkomstpremie van € 200. Leg aan de hand van deze grafiek uit dat het op de lange termijn altijd loont om een spaarrekening met een hoger rentepercentage te kiezen in plaats van een met een laag rentepercentage en een welkomstpremie.



In een land wonen 20 miljoen inwoners. Het land produceert dit jaar voldoende graan om 25 miljoen inwoners te kunnen voeden. De graanproductie neemt jaarlijks lineair toe. De bevolking van het land neemt exponentieel toe. Wat betekent dit op lange termijn voor de graanvoorziening van de inwoners van dit land?

Je hebt van je grootouders € 2500 ontvangen om op een spaarrekening te storten. De spaarbank biedt je twee mogelijkheden:

- er wordt jaarlijks 3% rente over dit bedrag aan je uitgekeerd en als je stopt met sparen ontvang je je inleg van € 2500 terug of:
- je ontvangt jaarlijks 2,5% rente die telkens aan je spaarsaldo wordt toegevoegd. Als je stopt met sparen wordt het gehele spaarsaldo aan je uitgekeerd.

Als je lang wil sparen, wat kun je dan het beste kiezen?

AV4 Redeneren met wortelverbanden

Hoe ver je kunt kijken vanaf een punt wordt bepaald door de hoogte: hoe hoger je gaat staan, hoe verder je kunt kijken. Maar als je al heel hoog staat, kun je amper verder kijken. Waarom beschrijft een wortelverband deze situatie het beste?

Het verband tussen kijkafstand en de hoogte van waar je kijkt is een wortelverband. Wanneer neemt de kijkafstand relatief het sterkst toe: als je op een twee keer zo hoog duin aan zee gaat staan of wanneer je van de eerste (58 m) naar de tweede trans (116 m) van de Eiffeltoren klimt?

AV5 Alle grafieken gaan door hetzelfde punt

Welk punt ligt op alle grafieken van verbanden waarvan de formule de vorm $y = x^b$ heeft?

AV6 Formules omrekenen

Leid uit $pV = rT$ af dat $p = \frac{rT}{V}$ en $V = \frac{rT}{p}$

Bij natuurkunde wordt bij dit soort herleidingen vaak gebruik gemaakt van een ezelsbruggetje in de vorm van een driehoek.

AV7 Kwadratische tabellen

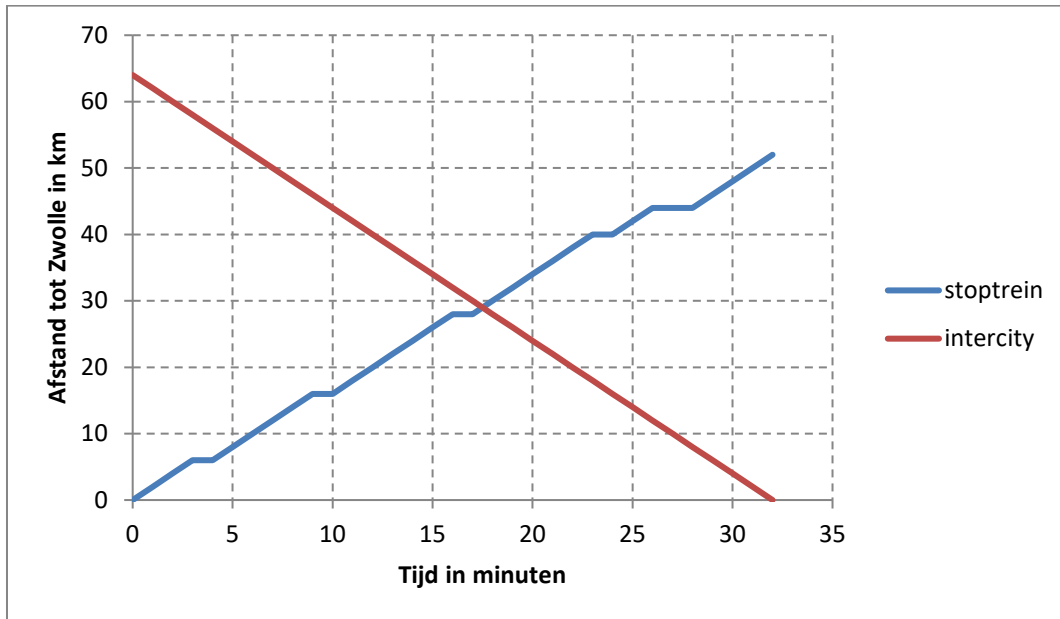
Zet de regelmaat in de onderstaande tabel voort.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	6	10	?

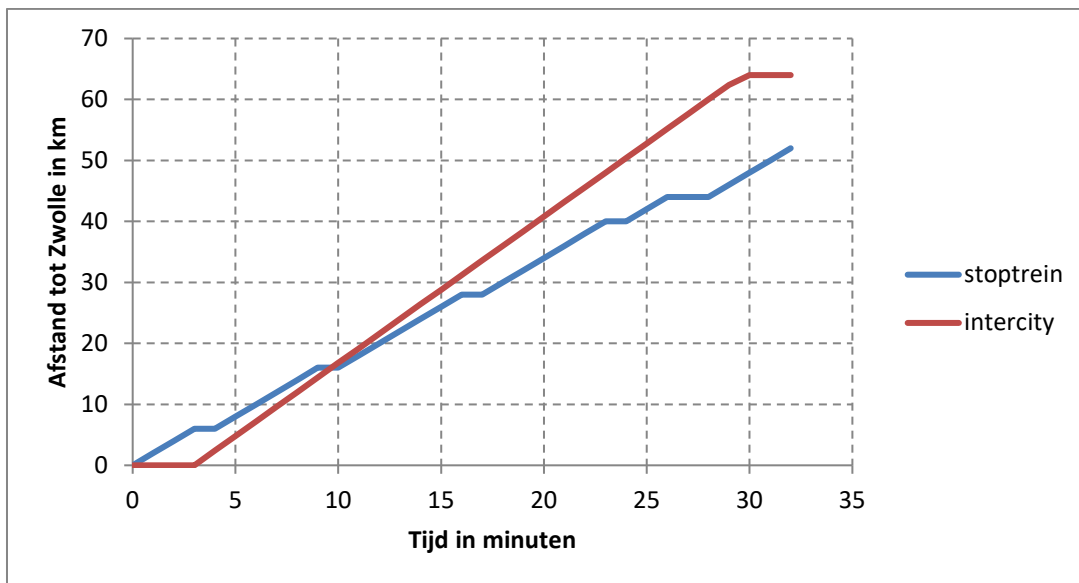
Welke formule hoort bij deze tabel?

AV8 Snijdende grafieken

In de onderstaande figuur is weergegeven hoever twee treinen verwijderd zijn van het station van Zwolle op de spoorlijn Zwolle – Amersfoort. Welke situatie doet zich voor op het snijpunt van beide grafieken?



Beantwoord deze vraag ook in de onderstaande situatie.



AV9 Interpoleren met behulp van een formule

Gegeven is de onderstaande tabel die een verband beschrijft.

x	0	5	10	15
y	8	12	19	22

Bereken met behulp van lineaire interpolatie y als $x = 7$.

Een adequate berekening gaat als volgt: $x = 7$ ligt op $\frac{2}{5}$ deel tussen $x = 5$ en $x = 10$, dus moet de gevraagde y-waarde op $\frac{2}{5}$ deel liggen tussen $y = 12$ en $y = 19$. Deze waarde luidt daarom: $y = 12 + \frac{2}{5} \times (19 - 12) = 14,8$.

Een meer formele benadering maakt gebruik van de interpolatieformule $y = y_0 + (y_1 - y_0) \times \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. In deze

formule worden de volgende waarden ingevuld: $x_0 = 5$,
 $x_1 = 10$, $x = 7$, $y_0 = 12$ en $y_1 = 19$ met $y = 14,8$ als resultaat.

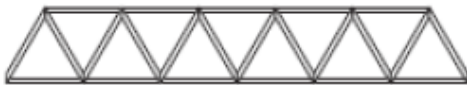
AV10 Namen van variabelen

In de theoretische leerweg wordt gebruik gemaakt van woordformules of van formules met lettervariabelen, waarbij de letter een relatie kent met de grootte die beschreven wordt, bijvoorbeeld h = hoogte en a = aantal. Het verdient aanbeveling ook variabelen met namen te benoemen waarbij de relatie afwezig is, bijvoorbeeld x = hoogte en y = aantal.

AV11 Formules herleiden

Het aardige van onderstaand voorbeeld is dat de formules ogenschijnlijk erg van elkaar verschillen, vanuit een ander perspectief tot stand komen en toch hetzelfde verband beschrijven.

Een brug van onderstaande vorm heeft een lengte L en R balken. Het aantal balken kent een verband met de lengte van de brug.



Leg uit dat elk van de onderstaande formules dit verband beschrijven:

$$R = L \times 3 + (L - 1)$$

$$R = L + (L - 1) + 2L$$

In het onderstaande voorbeeld moet door middel van herleiding een antwoord op een vraag gegeven worden.

In een land wordt 40% belasting geheven over het deel van het inkomen dat hoger is dan de zogenaamde belastingvrije voet van € 12.000. Het te betalen bedrag aan belasting is gelijk aan de uitkomst van deze berekening verminderd met een heffingskorting van € 400. Een parlementslid wil de belastingvrije voet afschaffen en alleen een heffingskorting geven. Hoe groot moet die zijn zodat niemand meer of minder belasting betaalt?

Oplossing: $b = 0,4(i - 12.000) - 400 = 0,4i - 4.800 - 400 = 0,4i - 5.200$. (b = te betalen belastingbedrag, i = inkomen). Als iemand 40% belasting betaalt over zijn hele inkomen en € 5200 heffingskorting ontvangt, dan betaalt hij precies hetzelfde bedrag als in de oude situatie.

AV12 Formules combineren zonder pijlenketting

- T-9** In de tabel zie je de confectiematen voor herenkleding in Amerika en West-Europa.
- a** Een formule voor het verband tussen de twee maten is $m = e - 10$. Hierin is m de Amerikaanse maat en e de Europese maat.
Controleer of de formule bij de tabel past.
 - b** In Australië wordt een andere maat gebruikt. Als je de Amerikaanse maat weet, kun je de Australische maat a berekenen met de formule $a = 2,5m + 10$. Dwight heeft Amerikaanse maat 42. Welke Australische maat heeft hij dan?
 - c** Maak van de twee formules één formule waarmee je meteen van de Europese naar Australische maat kunt omrekenen. Maak eerst de nieuwe pijlenketting.
 - d** Schrijf de nieuwe formule zonder haakjes.

Bron: Moderne Wiskunde deel 3A kgt, negende editie

Een havo-variant van onderdeel c van dit vraagstuk luidt: Geef aan hoe je de Australische maat van een kledingstuk (rechtstreeks) kunt uitrekenen als je de Europese maat kent.

Oplossing: $a = 2,5m + 10 = 2,5(e - 10) + 10 = 2,5e - 25 + 10 = 2,5e - 15$. Je vermenigvuldigt de Europese maat met 2,5 en trekt van het resultaat 15 af.

RMS1 Relaties tussen wortels

Om bij leerlingen de gedachte te versterken dat irrationale wortels zelfstandige getalsobjecten zijn, kunnen opgaven gebruikt worden zoals hieronder.

Laat aan de hand van de onderstaande figuur zien dat $\sqrt{18} = 3 \times \sqrt{2}$.

Oppervlakte = 2	Oppervlakte = 2	Oppervlakte = 2
Oppervlakte = 2	Oppervlakte = 2	Oppervlakte = 2
Oppervlakte = 2	Oppervlakte = 2	Oppervlakte = 2

Oplossing: de zijde van een klein vierkant is gelijk aan $\sqrt{2}$. De zijde van het grote vierkant is gelijk aan de wortel uit zijn oppervlakte, ofwel $\sqrt{18}$. Uit de figuur blijkt dat er drie zijden van een kleine vierkant in de zijde van een groot vierkant passen.

RMS2 Oneindig veel decimalen

Kun je uit de eerste vijftig decimalen van $\frac{1}{7}$ de eenenvijftigste decimaal afleiden? En van π ?

RMS3 Breuken

Breuken vormen proces en object ineen; enerzijds kun je een breuk opvatten als een deling van teller door noemer, anderzijds als een getal dat zich ergens tussen twee gehele getallen bevindt. Mavo-leerlingen kunnen de proceskant van een breuk goed hanteren en worden daarin in sommige methoden ook gestimuleerd door breukoperaties uit te leggen door gebruik te maken van de rekenmachine.

Een breuk kan ook als een getal beschouwd worden met verschillende representaties. Zo kent $\frac{3}{4}$ als alternatieve representaties $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ en 0,75. Leerlingen die dit denkniveau niet beheersen, spreken een breuk uit als "drie gedeeld door vier" en zijn niet tevreden met een uitkomst als $\frac{3}{4}$ van een bepaalde berekening.

RMS4 Percentages als zelfstandige reken- of wiskundige objecten

Hierbij kan het gaan om opgaven waarbij geen aantal of hoeveelheid gegeven is, zoals:

1. Op een auto wordt 20% korting gegeven en jij bedingt op het afgeprijsde bedrag nog eens 10% korting. Hoeveel korting krijg je in totaal? Antwoord: 28%.
2. Een winkel maakt reclame dat ze zaterdag a.s. alle artikelen zonder BTW verkoopt en overal 21% korting op geeft. Klopt dat? Nee, want de winkelier zou maar $100 - \frac{100}{1,21} \approx 17,4\%$ korting moeten geven.

RMS5 Wanneer is er sprake van een verhoudingssituatie?

Typische "verhoudingstaal" komt in methoden weinig voor. Denk daarbij aan termen als "per", "1 op 3", "elke derde Nederlander". Als elke achtste Nederlander overgewicht heeft, welk deel van de Nederlanders heeft dan overgewicht? Als de verhouding tussen het aantal werklozen en het aantal werkenden 3 : 17 is, welk deel van de beroepsbevolking is dan werkloos?

Iets verder gaat het herkennen van een verhoudingssituatie in een situatie. Als je twee keer zo ver reist met je OV-chipkaart, moet je dan ook twee keer zo veel betalen? Antwoord: nee, omdat je bij elke reis een starttarief moet betalen. Als je twee keer zo ver reist met je auto, ben je dan twee keer zo veel benzine kwijt? Antwoord: door de bank genomen wel.

RMS6 Permanentieprincipe

Om bij leerlingen de gedachte te versterken dat de negatieve getallen een uitbreiding van de positieve gevallen vormen, kan bijvoorbeeld het aftrekken van getallen uitgelegd worden door het onderstaande rijtje sommen als het ware voor te zetten.

$$\begin{aligned} 4 - 1 &= 3 \\ 4 - 2 &= 2 \\ 4 - 3 &= 1 \\ 4 - 4 &= 0 \\ 4 - 5 &= ? \\ 4 - 6 &= ? \end{aligned}$$

Zo komen negatieve getallen in beeld als achterwaartse voortzetting van positieve getallen. Dit wordt aangeduid met het "permanentieprincipe". Op een vergelijkbare wijze kan ook het aftrekken van negatieve getallen toegelicht worden.

RMS7 Negatieve getallen invullen

Bereken $-a$, $-a^2$ en $(-a)^2$ voor $a = 3$ en $a = -3$

RMS8 Verhoudingen en variabelen

De lengte van de zijden van een rechthoek verhouden zich als 1 : 2 en zijn oppervlakte is gelijk aan 50 cm^2 . Bereken de lengte van de zijden van deze rechthoek.

Oplossing: Stel dat de zijden van de rechthoek x en y cm lang zijn. Uit het gegeven dat $x : y = 1 : 2$, volgt dat $y = 2x$. De oppervlakte is gelijk aan $xy = 2x^2$. Omdat gegeven is dat deze oppervlakte gelijk is aan 50 cm^2 , volgt dat $2x^2 = 50$, ofwel $x^2 = 25$ en dus $x = 5$. De gevraagde afmetingen zijn 5 bij 10 cm

RMS9 Haakjes wegwerken verklaren

Een gezelschap van zes personen neemt elk een kop koffie met een punt appelgebak. De ober rekent zes keer de prijs van een kop koffie plus zes keer de prijs van een punt appelgebak, maar Rob rekent zes keer de prijs van een kop koffie plus een punt appelgebak en stelt dat beide berekeningswijzen dezelfde uitkomst leveren. Klopt dat?

Oplossing 1:

Ja, dat volgt uit de distributieve eigenschap voor optellingen en vermenigvuldigingen.

Oplossing 2:

Dat kun je zien aan de hand van onderstaand plaatje.

	prijs kop koffie	prijs punt appelgebak
6		
	prijs kop koffie + punt appelgebak	
6		

RMS10 Verhoudingsproblemen anders en vaak sneller oplossen

- 13** In een recept staat dat je 400 gram bloem nodig hebt om 24 koekjes te bakken. Agnes heeft maar 350 gram bloem. Ze wil weten hoeveel koekjes ze daarmee kan bakken.
- a** Gebruik de verhoudingstabel om uit te rekenen hoeveel koekjes Agnes kan bakken met 350 gram bloem.
- b** In een vol pak bloem zit meestal 1000 gram. Bereken hoeveel koekjes je kunt bakken met een vol pak bloem.

aantal gram bloem	400	1	...
aantal koekjes	24	...	...

Bron: Moderne Wiskunde. Deel 3A kgt, negende editie

Je kunt een verhoudingsprobleem ook door middel van een verhoudingsfactor uitrekenen. Als je in de verhoudingstabel de terugrekening naar 1 achterwege laat en beide berekeningen combineert, krijg je onderstaande verhoudingstabel.

	: 400 x 350	
		
aantal gram bloem	400	350
aantal koekjes	24	21
		
	: 400 x 350	

De berekening kan ook geschreven worden als $24 \times \frac{350}{400}$. Het getal $\frac{350}{400} = \frac{7}{8} = 0,875$ is een verhoudingsfactor. Je

kunt het verhoudingsprobleem ook oplossen door middel van de berekening $\frac{24}{400} \times 350$. Daarom is $\frac{24}{400} = 0,06$

ook een verhoudingsfactor bij dit probleem. Dit getal verschijnt in de verhoudingstabel uit de opgave onder de 1.

Een verhoudingsprobleem kent twee verhoudingsfactoren. Welke je het beste kunt gebruiken, hangt af van welke factor het gemakkelijkst uitgerekend kan worden.

Ten slotte valt te overwegen om het verschijnsel kruisproduct hier aan de orde te stellen. In een verhoudingstabel als de onderstaande geldt altijd dat $24 \times 350 = 400 \times ?$. Daarmee kan berekend worden wat er op de plaats van het vraagteken moet staan.

aantal gram bloem	400		350
aantal koekjes	24		?

M1 Verhoudingsproblemen anders en vaak sneller oplossen

Geef telkens aan welke tweedimensionale figuur beschreven wordt in de beschrijving.

- a. De figuur bestaat uit punten die allemaal op een vaste afstand van een gegeven punt liggen.

Antwoord: cirkel

- b. De diagonalen van de figuur zijn even lang.

Antwoord: rechthoek

- c. Alle overliggende zijden van de figuur zijn evenwijdig.

Antwoord: parallellogram

- d. Twee van de vier zijden van de figuur zijn evenwijdig.

Antwoord: trapezium

M2 Een schaalverhouding als zelfstandig object beschouwen

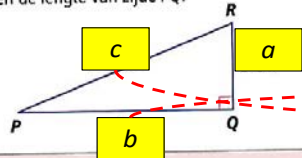
Ook een schaalverhouding kan als een zelfstandig wiskundig object beschouwd worden. Of leerlingen dit denkniveau beheersen blijkt bij het oplossen van een opgave als:

Een Engelse autokaart kent een schaal van 3 miles to 1 inch. Schrijf deze schaal in de vorm 1 : ... als je weet dat 1 mile = 1609 m en 1 inch = 2,54 cm.

M3 Gebruik van de stelling van Pythagoras in een formele weergave

Dubbelklik op onderstaande figuur voor een animatie.

Voorbeeld
Bereken de lengte van zijde PQ.



zijde	kwadraat
RQ = 3	9
PQ = ?	...
PR = 7	49

3 $PQ = \sqrt{40}$
 $PQ \approx 6,3 \text{ cm}$

Stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 \\
 9 + b^2 &= 49 \\
 b^2 &= 40 \\
 b &= \sqrt{40} \approx 6,3 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

M4 Goniometrische verhoudingen als zelfstandige wiskundige objecten

In het mavo worden goniometrische verhoudingen meestal ingezet bij berekeningen in rechthoekige driehoeken van de vorm:

- de lengte van twee zijden gegeven, bereken de grootte van de hoeken
- de lengte van een zijde en de grootte van een hoek gegeven, bereken de lengte van de andere zijden

De driehoek in kwestie kan op zijn lange zijde liggen of op een punt staan. Ook kan de driehoek voorkomen in een ruimtefiguur. De tangens wordt gebruikt om hellingshoek en hellingspercentage van een helling met elkaar te verbinden, maar dan zijn hoogteverschil en horizontale afstand of afstand over de helling zelf meestal gegeven.

Voor havo kan het nuttig zijn goniometrische verhoudingen als zelfstandige objecten te beschouwen. Dat is noodzakelijk in de volgende voorbeeldopgaven:

1. Bereken met je rekenmachine $\sin 50^\circ$. Van welke hoek heeft de cosinus dezelfde waarde als de uitkomst? Beantwoord dezelfde vragen voor $\sin 70^\circ$. Wat valt je op? Geldt dat altijd? Geef een verklaring.
2. Wat is de hellingshoek bij een hellingspercentage van 100%? Bereken het hellingspercentage bij een hellingshoek van 10° .
3. Opgave 41 hoofdstuk 9, Getal & Ruimte 3 KGT

A 41 a Bereken in de driehoek bij het muurtje de grootte van de zonnehoek. D

b Bij de boom heb je natuurlijk dezelfde zonnehoek. Bereken de hoogte van de boom.

c In de buurt van de boom staat een flatgebouw. Dat kun je op de tekening niet zien. Die flat is 35 meter hoog. Bereken de lengte van de schaduw van de flat. Maak eerst een schets.

The diagram shows a landscape with a blue sky and green ground. On the left, a grey wall is 1.20 m high. A red dashed line from the top of the wall to the ground represents the sun's rays, forming an angle labeled 'zonnehoek' with the ground. The shadow of the wall is 0.80 m long. To the right of the wall is a green tree. A red dashed line from the top of the tree to the ground also represents the sun's rays, forming the same 'zonnehoek' with the ground. The shadow of the tree is 5.35 m long. The sun is represented by a small yellow circle in the sky.

Bron: Getal & Ruimte, deel 3 KGT, negende editie

Leerlingen die de opgaven (b) en (c) kunnen maken zonder de zonnehoek uit te rekenen, dat wil zeggen: door enkel de tangens van de zonnehoek te berekenen en die te gebruiken om de hoogte van de boom te berekenen, geven er blijk van een goniometrische verhouding als een zelfstandig object te kunnen beschouwen.

M5 Gelijkvormigheid

1. Wanneer zijn twee driehoeken gelijkvormig? (Er is meer dan één mogelijkheid)
 - a. Als een hoek en een zijde van beide driehoeken gelijk zijn.
 - b. Als twee hoeken van beide driehoeken gelijk zijn.

- c. Als twee zijden van beide driehoeken gelijk zijn.
2. Figuren van welke van de hieronder genoemde vormen zijn altijd gelijkvormig aan elkaar? (Er zijn meer antwoorden mogelijk)
- vierkanten
 - rechthoeken
 - ruiten
 - vliegers
 - rechthoekige driehoeken
 - gelijkvormige driehoeken
 - gelijkbenige driehoeken
3. Wanneer is de schaduw van een rechthoek onder een lamp gelijkvormig met de rechthoek zelf?
 Antwoord: als je de rechthoek recht onder de lamp hangt en als de lamp precies boven het snijpunt van de diagonalen van de rechthoek geplaatst is.

In hoeverre geldt het bovenstaande voor driehoeken?

4. Als je een rechthoek loodrecht op de zonnestralen houdt terwijl de zon niet recht aan de hemel staat, welke overeenkomsten heeft zijn schaduw dan met de rechthoek zelf?
- De schaduw komt precies overeen met de rechthoek.
 - De schaduw is gelijkvormig met de rechthoek.
 - De schaduw is ook een rechthoek die langer is dan, maar wel even breed is als de rechthoek zelf.
 - De schaduw is ook een rechthoek met andere afmetingen dan de rechthoek zelf.
5. De lengte en de breedte van een stuk A4-papier verhouden zich als $\sqrt{2} : 1$. Als je een vel A4-papier in de lengte in tweeën verdeelt, krijg je een vel A5-papier. Laat zien dat een vel A5 gelijkvormig is met een vel A4.

Antwoord: de lengte van een vel A5 is gelijk aan de breedte van een vel A4. De breedte van een vel A5 is gelijk aan de helft van de lengte van een vel A4. Daarom verhouden lengte en breedte van een vel A5 zich als $1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} : \frac{1}{2} \times 2 = \sqrt{2} : 1$ en dat is dezelfde verhouding als bij een vel A4.

6. De breedte en de hoogte van de schermen van alle moderne LCD- en plasma tv-toestellen hebben een vaste verhouding. De grootte van een tv-scherm wordt in het algemeen aangeduid met zijn diagonaal. Mijn tv-scherm heeft een diagonaal van 80 cm. Zijn breedte is 69,6 cm en zijn hoogte is 39,5 cm. Wat zijn de afmetingen van een tv-scherm met een diagonaal van 60 cm?
7. Je staat naast een lamp. Als je even ver van de lamp af staat als de lamp hoger hangt dan jouw hoofd, wat weet je dan over hoe lang je schaduw is? En als je twee keer zover van de lamp af staat?

Antwoord: die is in het eerste geval even lang dan jijzelf en in het tweede geval twee keer zo lang als jijzelf.