



-
-
-

Wiskundige Denkactiviteiten (WDA)

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

28 september 2016

Peter van Wijk

slo

Programma

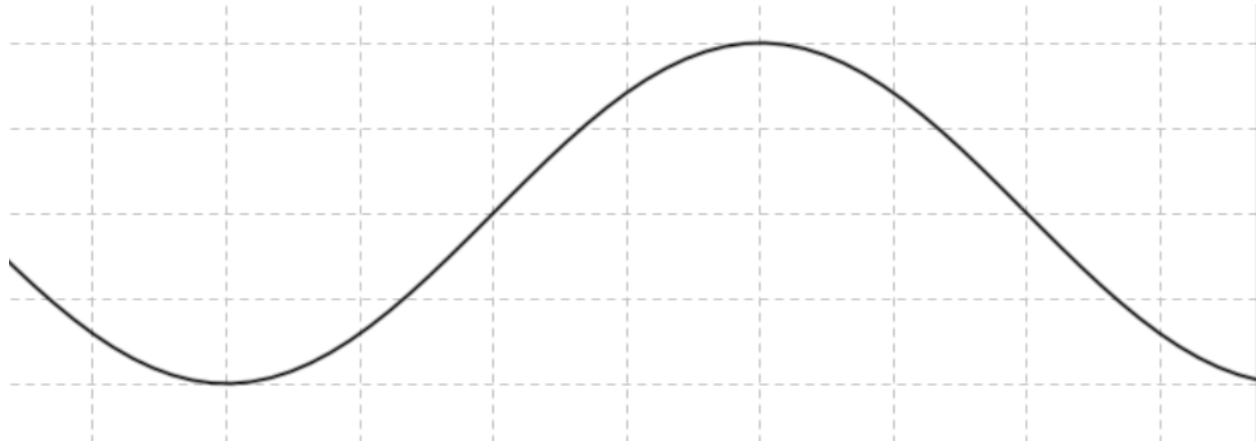
- Voorbeelden van WDA's
- Wat zijn WDA's?
- Hoe zie je dit terug in de centrale examens?
- Welke rol speelt hier de docent?

Voorbeeld

Teken de x-as en de y-as in onderstaande figuur.

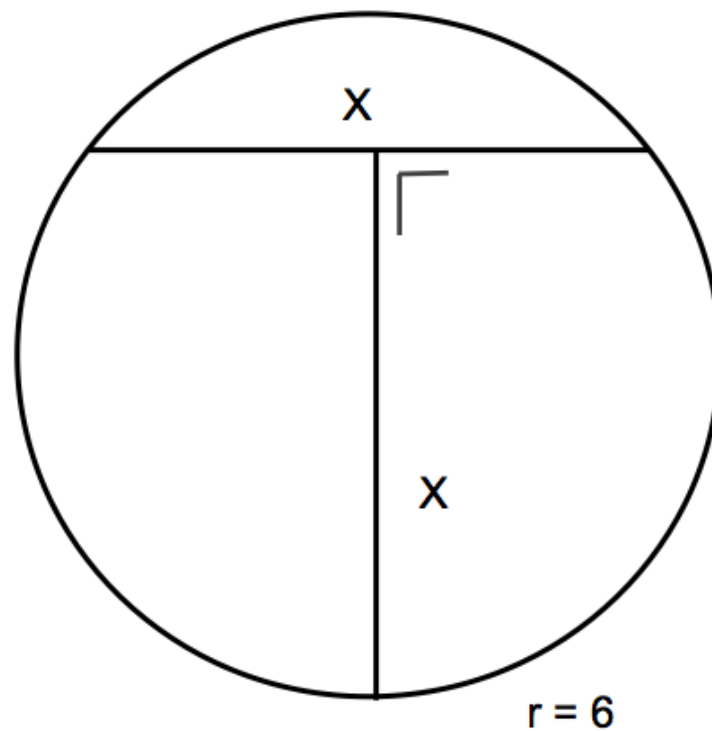
Eenheid x-as: $\frac{1}{2}\rho$

Eenheid y-as: 1



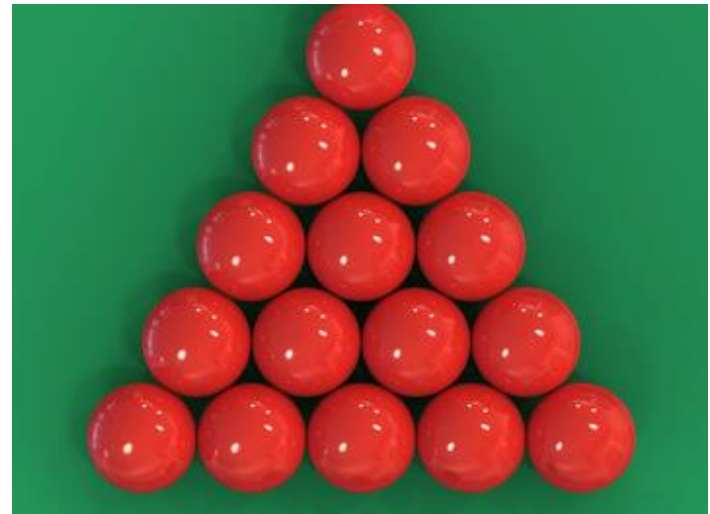
Voorbeeld

Bereken x



Voorbeeld

De 15 rode ballen van een snookerspel passen precies in een frame (gelijkzijdige driehoek) met zijden van 30 cm. Hoe groot is de diameter van zo'n rode bal?



Voorbeeld

Een natte spons weegt 1 kilogram. Dit gewicht bestaat voor 99% uit water.

Knijp de spons zodanig uit dat het gewicht nog maar voor 98% uit water bestaat.

Hoeveel gram weegt hij nu?

Oplossing

- 1000 gram
- 990 gram water (99%)
- 10 gram droge spons (1%)
- 1000 gram
-
(98%)
- 10 gram droge spons
(2%)

Model

Probleemoplossen

structureren

manipuleren

**Wiskundig
Denken**

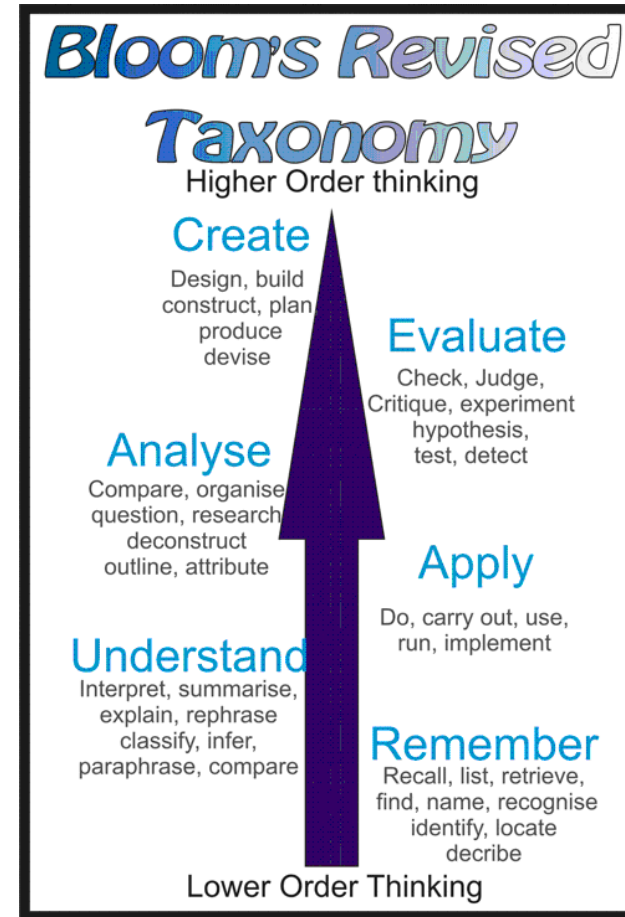
Modelleren

Abstraheren

redeneren

Taxonomie van Bloom

- Higher Order Thinking Skills
- 1956 ..., niets nieuws onder de zon
- Oude wijn in nieuwe zakken



Wiskunde

Enerzijds wordt de wiskunde gezien als een statisch en gestructureerd systeem, opgebouwd uit feiten, procedures en concepten. Een systeem dat kan worden *gememoriseerd en gereproduceerd*.

Anderzijds wordt de kern van de wiskunde opgevat als *een dynamisch proces*, wiskunde als een menselijke activiteit, geïnspireerd door de manier waarop 'doers and users' wiskunde bedrijven (van Streun, 2015).

Misverstanden over WDA

- WDA is altijd moeilijk en ingewikkeld
- WDA is alleen voor goede leerlingen
- WDA is alleen voor de Tweede Fase
- WDA is altijd groot
- WDA kost veel lestijd

Voorbeeld

- Hoe verandert de grafiek van $f(x) = x^2 - 8x$ als je in de formule de 8 verandert in een 6?
- En hoe als de laatste x wordt weggelaten?

Voorbeeld

De oplossing van onderstaand stelsel is $(5, -4)$.
Bereken a en b .

$$\begin{cases} ax + by = 3a \\ bx + ay = -6 \end{cases}$$

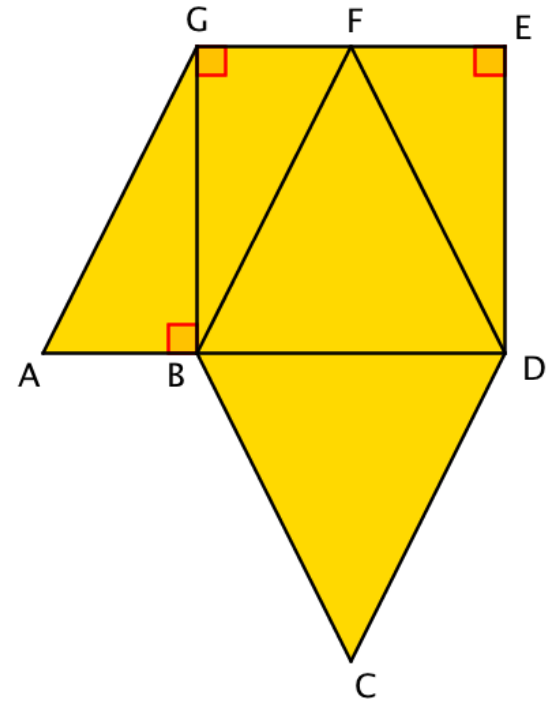
Voorbeelden

Vierhoek BDEG is een vierkant
en ABFG een parallellogram.
Hoek C is 54° .

Kun je alle andere hoeken
berekenen?

Zo ja, bereken de grootte van
de andere hoeken.

Zo nee, leg uit waarom.



Voorbeeld

Hoe ziet de grafiek er uit van:

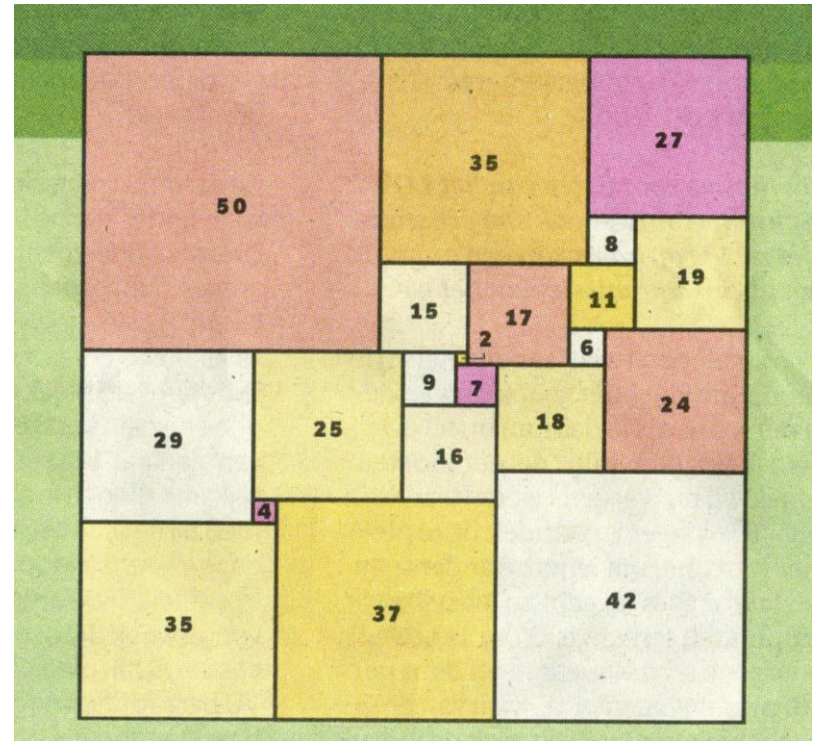
$$\frac{1}{f(x)}$$

$$\sqrt{f(x)}$$



Voorbeeld

Bestaat er een vierkant dat uit kleine vierkanten is opgebouwd, waarbij geen vierkant even groot is?



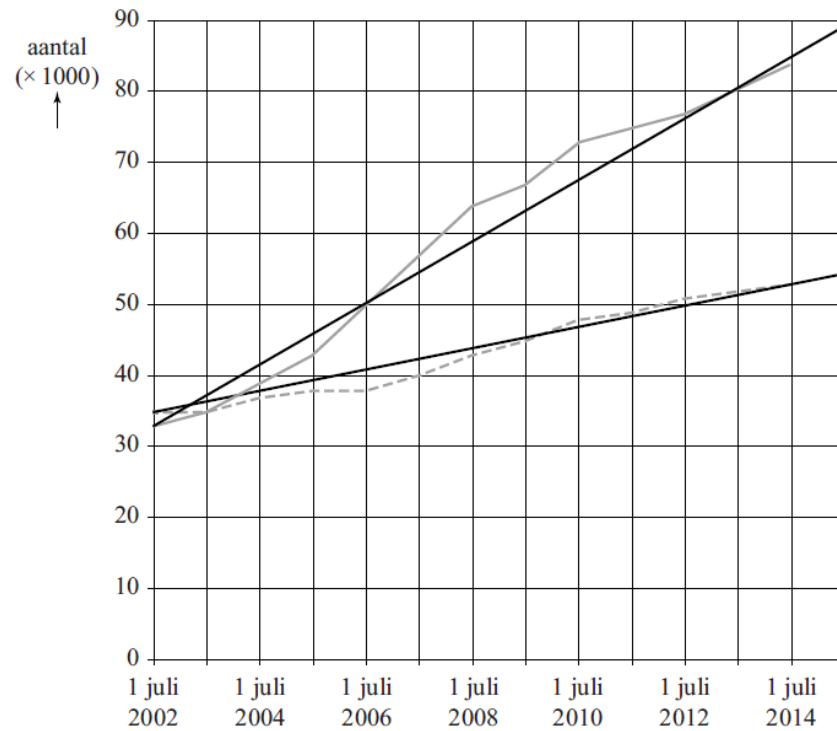
Centrale examens

Vrouwenvoetbal

Vrouwenvoetbal is in. Steeds meer vrouwen en meisjes in Nederland zijn lid van een voetbalclub. In de figuur zie je de ontwikkeling van het aantal vrouwelijke leden van voetbalclubs in de periode 2002 tot en met 2014, telkens gemeten op 1 juli van het betreffende jaar. In de figuur is onder andere te zien dat zowel bij de jeugd als bij de senioren het aantal leden toeneemt.

Omdat het aantal leden bij de jeugd sneller groeit dan bij de senioren, wordt het percentage senioren bij de voetbalsters steeds lager. In 2002 was nog iets meer dan 50% van de voetbalsters senior, in 2014 was dat percentage geslonken tot minder dan 40%.

figuur



Legenda:

— jeugd (junioren en pupillen)

- - - - senioren

De ontwikkeling van zowel het aantal leden bij de jeugd als bij de senioren is te benaderen door een lineair verband. De bijbehorende lijnen zijn in de figuur weergegeven. We gaan ervan uit dat de aantallen leden van de beide groepen zich volgens de getekende lijnen zullen blijven ontwikkelen. Het percentage senioren zal dan nog verder afnemen.

In een bepaald jaar zal op 1 juli het percentage senioren voor het eerst lager zijn dan 35% van het totaal aantal leden.

8p 22 Onderzoek in welk jaar dat is.



De klok op de foto hierboven heeft een kleine wijzer met een lengte van 8,5 cm en een grote wijzer met een lengte van 12,5 cm. Het uiteinde van de kleine wijzer noemen we A ; het uiteinde van de grote wijzer noemen we B .

Als het bijvoorbeeld 2:00 uur is, dan wijst de kleine wijzer precies naar 2 en staat de grote wijzer precies op 12.

Is het bijvoorbeeld 2:15 uur (kwart over twee), dan heeft de kleine wijzer precies een kwart van de hoek tussen de 2 en de 3 afgelegd; de grote wijzer staat dan precies op 3.

Op de klok op de foto is het precies 2:25 uur (vijf voor half drie).

- 7p 11 Bereken in deze situatie de afstand tussen A en B . Geef je antwoord in gehele millimeters nauwkeurig. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

tabel tarief motorrijtuigenbelasting

| Brandstof | 1000 kg | 1100 kg | 1200 kg |
|------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| gas | € 125,- / kwartaal | € 162,- / kwartaal | € 198,- / kwartaal |
| benzine | € 97,- / kwartaal | € 119,- / kwartaal | € 141,- / kwartaal |
| diesel | € 223,- / kwartaal | € 258,- / kwartaal | € 292,- / kwartaal |

Neem aan dat er voor de auto geen andere kosten zijn dan hierboven vermeld en dat de genoemde kosten niet wijzigen in de komende 6 jaar.

Joris heeft precies € 12 500,- op zijn spaarrekening staan. Hij wil daarmee de auto in één keer betalen. Als hij die € 12 500,- op zijn spaarrekening zou laten staan, zou hij jaarlijks 2,5% rente bijgeschreven krijgen. Door de auto in één keer te betalen, loopt hij de renteopbrengst in deze 6 jaar mis.

Joris wil de auto kopen als de totale kosten hiervan maximaal € 450,- per maand zijn. Hij telt alleen de gemiste rente over zijn spaargeld op bij de overige kosten voor de auto.

- 8p 21 Onderzoek of Joris deze auto wil kopen, aangenomen dat hij de auto over 6 jaar verkoopt voor € 2750,-.

De Eierland

De Eierland is een vuurtoren op de noordpunt van het Waddeneiland Texel. Zie figuur 1.

In deze figuur is ook een belangrijke scheepvaartroute door de Noordzee getekend, die in de buurt van Texel grofweg van zuidwest naar noordoost loopt. De route passeert De Eierland aan de noordkant op een afstand van ongeveer 28 kilometer.

figuur 1



Het licht van de vuurtoren De Eierland heeft bij helder weer een reikwijdte van ongeveer 54 kilometer.

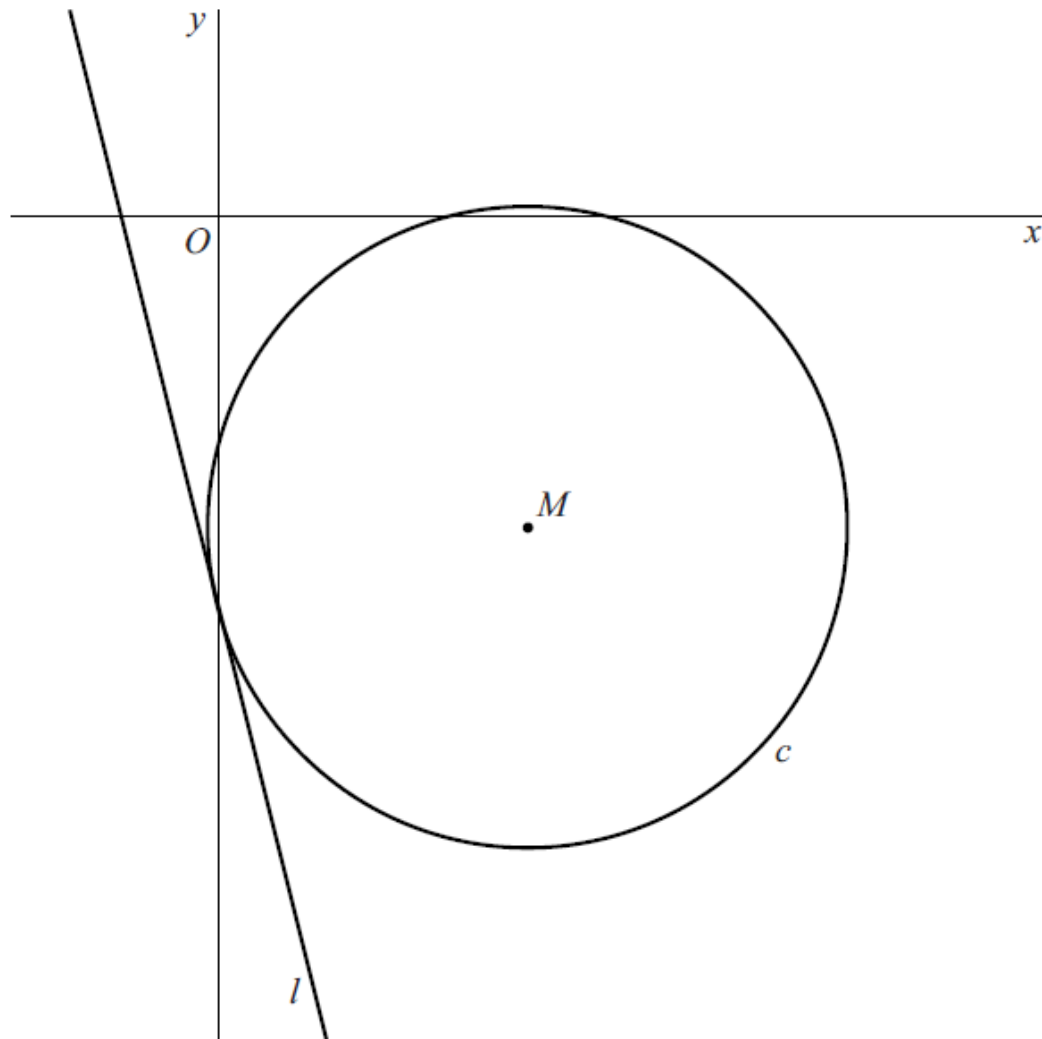
Een schip vaart met een snelheid van 22 km/uur over de aangegeven scheepvaartroute.

- 19 Bereken hoeveel tijd dit schip binnen het bereik van De Eierland vaart. Geef je antwoord in kwartieren nauwkeurig.

Cirkel en lijn

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 6y = -8\frac{2}{5}$ en middelpunt M en de lijn l met vergelijking $y = -4x - 3\frac{3}{4}$. Zie de figuur.

figuur



In de figuur lijkt het erop dat l de cirkel raakt. Als l inderdaad c raakt, dan is de afstand van M tot l gelijk aan de straal van c . Echter, de afstand van M tot l is kleiner dan de straal van c .

- 8p 17 Toon op algebraïsche wijze aan dat de afstand van M tot l kleiner is dan de straal van c .

Correctievoorschrift

- De afstand van M tot l is kleiner dan de straal als l en c twee snijpunten hebben 2
- Dit is het geval als de vergelijking $x^2 + (-4x - 3\frac{3}{4})^2 - 6x + 6(-4x - 3\frac{3}{4}) = -8\frac{2}{5}$ twee oplossingen heeft 1
- Uit $x^2 + (-4x - 3\frac{3}{4})^2 - 6x + 6(-4x - 3\frac{3}{4}) = -8\frac{2}{5}$ volgt $x^2 + 16x^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3\frac{3}{4}x + (3\frac{3}{4})^2 - 6x - 24x - 6 \cdot 3\frac{3}{4} = -8\frac{2}{5}$ 2
- Hieruit volgt $x^2 + 16x^2 + 30x + 14\frac{1}{16} - 6x - 24x - 22\frac{1}{2} = -8\frac{2}{5}$ 1
- Hieruit volgt $17x^2 = \frac{3}{80}$ 1
- (Dit geeft $x = \sqrt{\frac{3}{1360}}$ of $x = -\sqrt{\frac{3}{1360}}$ dus) deze vergelijking heeft twee oplossingen (dus de afstand van M tot l is kleiner dan de straal van c) 1

**De rol van de docent: de kunst van
het stellen van vragen**

**Vragen die wiskundig denken en
discussie stimuleren**

Begrijpen

verklaren, verhelderen, beschrijven, voorbeelden geven, toelichten, uitleggen, onderbouwen, aantonen

- Waarom ligt het punt (3, 6) niet op de lijn met vergelijking $y = x + 2$?
- Hoe zou je iemand uitleggen waarom 2^3 niet hetzelfde is als 2×3 ?

Analyseren

*vergelijken, selecteren, indelen, kenmerken
bepalen, determineren, structureren, ontleden*

- $y = ax + b$

Wanneer je a laat variëren, welk effect heeft dat dan op de grafiek? En welk effect heeft het wanneer je b laat variëren?

- Een leerling heeft bij een vergelijking van een lijn de volgende tabel gemaakt. Leg uit welk getal niet klopt.

| | | | | |
|-----|----|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 10 | 8 | 5 | 4 |

Evalueren

bekritisieren, testen, beoordelen, doorlichten

- Wanneer je een getal neemt en dat door een getal deelt, dan wordt de uitkomst altijd kleiner.
- Is deze uitspraak altijd waar of niet waar? Waarom? Leg uit?



Denk-tijd

Een denkpauze voelt niet altijd prettig. Maar onderzoek heeft uitgewezen dat het volgende kan gebeuren.

- De lengte van de antwoorden neemt toe
- Het zelfvertrouwen van de leerlingen neemt toe.
- Zwakkere leerlingen gaan meer bijdragen.
- Er is een grotere variëteit aan antwoorden.
- Discipline problemen nemen af.
- Het aantal creatieve antwoorden neemt toe.

Een reactie ontlocken

- Heeft iemand een oplossing die je met de klas wilt delen?
- Kun je hun oplossing uitleggen?
- Kun je aanwijzen welk deel lastig was?

Doorvragen

- Kun je daar iets meer over vertellen?
- Hoe kreeg je ...?
- Laat eens één voor één je stappen zien. Waar ben je begonnen?
- Kun je dat nog anders zeggen/uitleggen?
- Wanneer je zegt ..., bedoel je dan ...?
- Kun je laten zien dat dat goed is?

Moedig leerlingen aan om ook vragen te stellen

NIET

- Zijn er nog vragen?
- Snapt iedereen dit?

Maar

- Heb je nog een vraag waarop je een antwoord wilt weten?
- Staan er nog vraagtekens in je schrift? Wat is de vraag?
- Geef mij een vraag!

Vijf principes bij vragen stellen

1. Plan je vragen die leerlingen helpen bij het leggen van verbanden, reflectie en het wiskundig redeneren.
2. Stel vragen zo, dat iedereen betrokken wordt.
3. Geef denk-tijd.
4. Moedig leerlingen aan tot het stellen van vragen.
5. Ga op reacties van leerlingen in (op zo'n manier dat ze verder gaan met denken...), vraag door.
Geef geen waardeoordeel.

De top-10!

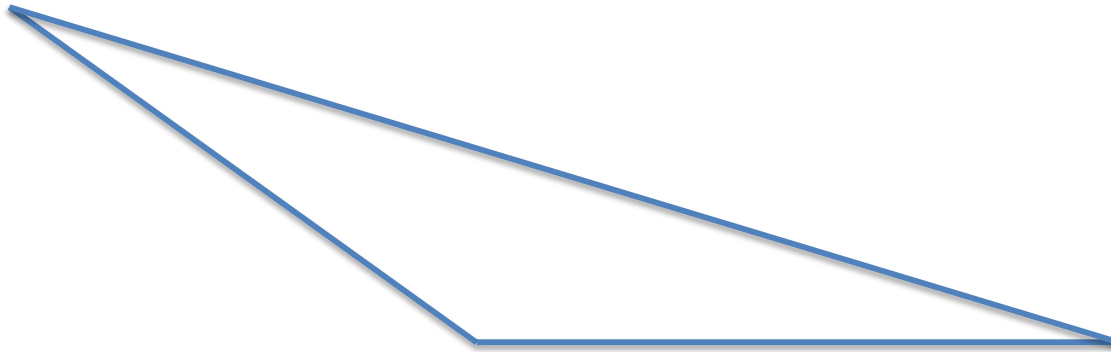
De ideale denkactiverende wiskundeleraar:

- geeft geen antwoorden, maar stelt vragen
- geeft leerlingen denktijd
- vraagt door op reacties van leerlingen
- heeft zelf plezier in wiskundig denken
- bedenkt bij het voorbereiden van de les op welke manier hij het denken kan activeren
- besteedt aandacht aan het oplossingsproces
- reflecteert met de hele klas op de gebruikte strategieën
- bouwt de hoeveelheid hulp in de loop van de tijd af
- geeft het wiskundig denken ook een plaats in de toets
- is doorlopend alert op kansen om leerlingen aan te zetten tot wiskundig denken.

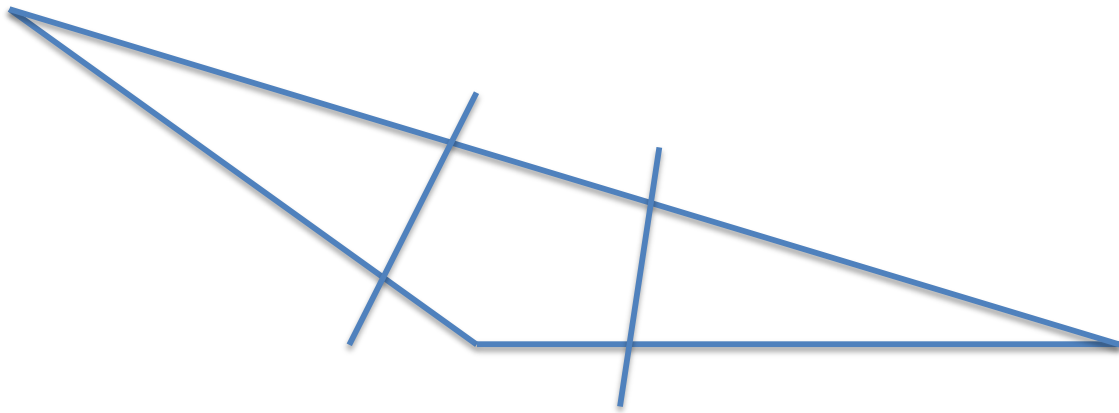
Conclusies WDA's

- Doorlopend proces: begin in onderbouw
- Rol docent belangrijk: vragen stellen, uitdagen
- Het komt terug in Centraal Examens wiskunde

Stomphoekige driehoek



slo



slo

Vragen