

Niveaumodellen

Bijlage bij aflevering 3 van de serie *Formatief evalueren bij wiskunde*

Inleiding

Niveaucriteria kun je gebruiken om groei van leerlingen in kaart te brengen en horen bij een leerdoel, een leerinhoud in het bijzonder. Die groei kan betrekking hebben op verschillende onderdelen van wiskundig denken en handelen. Je kunt niveaucriteria formuleren op basis van niveaumodellen. Deze modellen zijn generiek van karakter en hebben betrekking op een bepaald aspect van wiskundig denken en handelen. In deze bijlage staat een aantal voorbeelden van dergelijke niveaumodellen.

Standaardbewerkingen

Een standaardbewerking is een bewerking waarvan verwacht mag worden dat een leerling die op routine uitvoert. Denk aan basisbewerkingen bij het rekenen, procentberekeningen en herleiden van algebraïsche vormen, maar ook aan het oplossen van een lineaire of kwadratische vergelijking en het differentiëren van standaardfuncties.

Voor standaardbewerkingen kan het zogenaamde handelingsmodel als uitgangspunt dienen om niveaucriteria op te stellen. Dit model kent vier niveaus en ziet er als volgt uit.


formeel abstract	De leerling voert een standaardbewerking uit met behulp van formele rekenregels en bijpassende schrijfwijzen.
visueel abstract	De leerling voert een standaardbewerking uit met behulp van denkmodellen en andere schema's.
visueel concreet	De leerling voert een standaardbewerking uit door hem in een context op papier of ander medium na te spelen.
informeel handelen	De leerling voert een standaardbewerking uit door hem in een context met concrete dingen na te spelen.

Voorbeeld

Een voorbeeld van een standaardbewerking is deling van een getal van twee cijfers door een getal van één cijfer; bijvoorbeeld $85 : 5 = 17$.

formeel abstract	De leerling maakt de opgave met behulp van een staartdeling of van de hapmethode.
visueel abstract	De leerling tekent een rechthoek, waarvan een van de zijden 5 lengte-eenheden groot is en waarvan de oppervlakte 85 eenheden groot is. De andere zijde is gelijk



	aan de uitkomst van de deling. <div style="text-align: center;">  </div>
visueel concreet	De leerling tekent 85 dingen en verdeelt die in 5 rijen. Vervolgens telt hij uit hoeveel dingen een rij bestaat. Misschien gebruikt hij al speciale symbolen om tientallen in beeld te brengen.
informeel handelen	De leerling verzamelt 85 snoepjes of steentjes en verdeelt die in groepjes van 5. Vervolgens telt hij hoeveel groepjes hij heeft.

Inzicht

Wiskundig inzicht gaat over het mentaal beeld dat leerlingen van wiskundige artefacten ('dingen', zoals driehoek, variabele, formule, kans) en van bewerkingen heeft én hoe artefacten en bewerkingen met elkaar samenhangen. Het geheel vormt het mentaal schema van de leerling. Het onderhouden, uitbreiden en gebruiken hiervan kan onder de term inzicht gerekend worden.

Van een wiskundig artefact kan een leerling zich op vier verschillende niveaus een mentaal beeld gevormd hebben. Een leraar kan daar achter komen door een leerling de vraag te stellen: "Wat weet je van ...?" Het antwoord daarop geeft hem een indicatie van op welk niveau het mentaal beeld van een artefact een leerling heeft.

4	De leerling beschouwt het artefact als een mentaal object dat samenhangt met andere objecten. Hij geeft redeneringen en verklaart eigenschappen verklaren op basis van die samenhang. Hij beschouwt eigenschappen als zelfstandige mentale objecten.
3	De leerling brengt eigenschappen en kenmerken van het artefact met elkaar in verband en geeft zodoende verklaringen van eigenschappen. Hij beschouwt zodoende artefacten als zelfstandige mentale objecten.
2	De leerling geeft een definitie van het artefact, bijvoorbeeld in de vorm van enkele definiërende kenmerken. Hij noemt desgevraagd ook eigenschappen van het artefact.
1	De leerling geeft een voorbeeld van het artefact.

Ook voor wiskundige bewerkingen kunnen inzichtniveaus worden geformuleerd. Het gaat er dan niet zozeer om uitvoering van een bewerking, maar om welk mentaal beeld een leerling van een bewerking heeft.

4	De leerling beschouwt de bewerking (en in sommige gevallen ook haar uitkomsten) als een mentaal object dat samenhangt met andere (bewerkings)objecten.
3	De leerling beschouwt de bewerking (en in sommige gevallen ook haar uitkomsten) als een mentaal object.



2	De leerling kan de bewerking op meer dan één manier uitvoeren, kan inverse bewerkingen uitvoeren, weet wat ze betekent en wanneer ze gebruikt kan worden.
1	De leerling voert de bewerking uit.

Voorbeelden van gebruik van deze modellen staan in aflevering 3 van de filmserie.

Niveaus van wiskundig communiceren

Wiskundig communiceren gaat over het gebruik van namen en symbolen voor concepten en begrippen, eigenschappen en bewerkingen. Uit onderzoek blijken aanwijzingen dat er samenhang bestaat tussen het niveau van wiskundig inzicht en het niveau van wiskundig communiceren. We onderscheiden drie niveaus.

3 wiskundetaal	De leerling bezigt wiskundig correcte namen en verwoordt eigenschappen en bewerkingen met wiskundige terminologie en symbolen.
2 schoolboektaal	De leerling bezigt namen en verwoordingen uit de lesmethode, die niet noodzakelijk overeenstemmen met die uit de wiskunde.
1 dagelijkse taal	De leerling verwoordt concepten, begrippen eigenschappen en bewerkingen met plaatjes en schema's.

Voorbeelden

Benamingen voor de richtingscoëfficiënt van een lineaire grafiek

3 wiskundetaal	richtingscoëfficiënt
2 schoolboektaal	hellinggetal, stijgetal
1 dagelijkse taal	Tekent een grafiek en wijst de steilheid aan

Verwoording van de Stelling van Pythagoras

3 wiskundetaal	$a^2 + b^2 = c^2$, waarbij a = lengte van een rechthoekszijde b = lengte van de andere rechthoekszijde c = lengte van de schuine zijde
2 schoolboektaal	In sommige lesmethoden voor vmbo wordt de stelling van Pythagoras als volgt verwoord. <i>rechthoekszijde</i> = <i>rechthoekszijde</i> ² = <i>rechthoekszijde</i> = <i>rechthoekszijde</i> ² = _____ + <i>schuine zijde</i> ² = <i>schuine zijde</i> =
1 dagelijkse taal	Tekent een rechthoekige driehoek en legt de stelling van Pythagoras uit door de betreffende zijden in de tekening aan te wijzen.



Verwoording van optelling van twee getallen

3 wiskundetaal	$4 + 7 = 11$
2 schoolboektaal	4 met 7 erbij = 11
1 dagelijkse taal	Tekent vier dingen en doet er zeven bij. Dan heb je er elf.

Niveaus van probleemoplossen

Een probleem is een taak of opgave waarvan verwacht mag worden dat een leerling die niet op routine op kan lossen. Hij moet nadenken over welke stappen tot een oplossing leiden. Een probleem kan wiskundig van aard zijn (zoals ze bijvoorbeeld in de examens wiskunde B voorkomen) of voortkomen uit een situatie in beroep of dagelijks leven. In het laatste geval is er sprake van een toepassingsprobleem. We onderscheiden vier niveaus.

4 De leerling formuleert het probleem als een reken/wiskundig probleem, bepaalt een uitkomst en geeft op basis van de uitkomst een oplossing van het probleem.

3 De leerling maakt een visuele of schematische of ict-voorstelling van de probleemsituatie en vindt met behulp daarvan een oplossing.

2 De leerling lost een probleem op door binnen de context van het probleem, vaak met trial-and-error, een oplossing te construeren.

1 De leerling construeert een oplossing door de situatie met concrete dingen na te spelen.





Voorbeeld

In een rekentoets 2F komt de volgende opgave voor: *Hoeveel blikken soep van 400 ml gaan er in een pan van 2 liter?* Voor leerlingen uit de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo is dit een probleem, want ze moeten ml in liters omrekenen of omgekeerd en vervolgens een deling uitvoeren. De vier beschreven niveaus van probleemoplossen zien er als volgt uit.

4
De leerling bedenkt dat hij 2 liter naar ml moet omrekenen en de uitkomst daarvan door 400 moet delen. Misschien moet hij de uitkomst nog afronden, maar daar blijkt in dit geval geen sprake te zijn.

3
De leerling maakt een tabel waaruit hij de oplossing kan aflezen.

aantal blikken	1	10	5
hoeveelheid soep (in ml)	400	4000	2000

2
De leerling schrijft iets als:  = 400 ml,  = 800 ml,  = 1600 ml. Als ik er dan nog één  bij doe kom ik op 2000 ml = 2 liter.



1

De leerling neemt een pan met een maatstreepjes en een aantal blikken soep. Hij giet de blikken in de pan totdat het maatstreepje 2 liter bereikt is.

Modelleerniveaus

Wiskundig modelleren gaat over het construeren van wiskundige modellen. Dat is een weergave van een situatie in wiskundige termen, zoals formules, vergelijkingen en statistische hypothesen. Met behulp van een wiskundig model kunnen we berekeningen doen die tot doel hebben een probleem op te lossen, voorspellingen te doen of een bepaalde theorie uit een bepaald vakgebied te verifiëren c.q. te ontcrachten. We onderscheiden drie niveaus.

3 De leerling stelt zonder voorbereidende berekeningen een wiskundig model op.

2 De leerling rekent een aantal gevallen door, onderkent een patroon en beschrijft die in een bepaalde vorm

1 De leerling rekent een aantal gevallen door en geeft die weer in een bepaalde representatie

Voorbeeld

Maak een wiskundig model voor het tijdverlies (in minuten) als je een aantal kilometer op een autoweg, waar je 100 km/uur mag rijden, maar 80 km/uur rijdt.

3

Hij kiest voor de afstand in km de variabele x en drukt het tijdverlies v uit in x .

$$v = \frac{x}{80} - \frac{x}{100} = x \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{100} \right) = 0,0025x \text{ (uren)} = 0,15x \text{ (minuten)}$$

2

Hij rekent voor een aantal kilometrages het tijdverschil uit, geeft die weer in een tabel, ziet dat er een regelmaat is en geeft die regelmaat op een of andere wijze weer.

1

Hij rekent voor een aantal kilometrages het tijdverschil uit en geeft die weer in een tabel.

Redeneerniveaus

Wiskundig redeneren komt aan bod bij de vraag of een bepaalde bewering, eigenschap of formule correct is of niet. De wijze waarop een leerling een bewering, eigenschap of formule aantoont kan worden uitgedrukt in een viertal redeneerniveaus.

4 De leerling toont een bewering, eigenschap of formule aan met behulp van een wiskundige redenering of verwijzing naar een axioma.

3 De leerling toont een bewering, eigenschap of formule aan door middel van plaatjes, schema's, of denkmodellen

2 De leerling toont in een specifieke situatie of context een bewering, eigenschap of formule aan.

1 De leerling toont een bewering, eigenschap of formule aan in enkele voorbeelden en neemt aan dat ze dan altijd geldt.



Voorbeeld

De eigenschap in dit voorbeeld is dat als je in een vermenigvuldiging van twee gehele getallen beide verwisselt, de uitkomst gelijk blijft (de zogenaamde 'wissel eigenschap' of 'commutatieve eigenschap' van vermenigvuldiging).

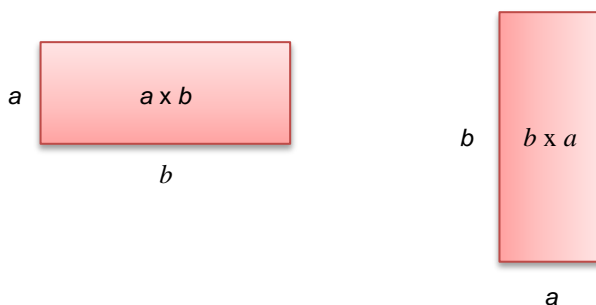
4

De leerling maakt eerst aannemelijk dat $1 \times a = a \times 1$.

Als vervolgens $a < b$, dan is $a \times b = a \times (a + 1 + 1 + \dots + 1) = a \times a + a \times 1 + a \times 1 + \dots + a \times 1 = a \times a + 1 \times a + 1 \times a + \dots + 1 \times a = (a + 1 + 1 + \dots + 1) \times a = b \times a$

3

Een vermenigvuldiging kan worden voorgesteld als een rechthoek, waarvan de zijden gelijk zijn aan de getallen en waarvan de oppervlakte gelijk is aan de uitkomst. Als we de rechthoek een kwart slag kantelen, verwisselen we beide getallen. Je kunt zien dat de oppervlakte van de rechthoek niet verandert.



2

We hebben vier groepjes van zeven leerlingen. Als we uit elk groepje 3 leerlingen halen, houden we per groepje 4 leerlingen over. Van de 12 leerlingen die uit een groepje gehaald zijn, kunnen we 3 nieuwe groepjes van vier leerlingen maken. In totaal hebben we 7 groepjes van 4 leerlingen.

1

De leerling berekent 8×4 en 4×8 , 5×7 en 7×5 en constateert dat de uitkomsten paarsgewijs gelijk zijn.

Voorbeeld

Eigenschap: De som van de hoeken in een vierhoek zijn samen 360° .

4

De leerling verdeelt de vierhoek in twee driehoeken waarvan de hoeken samen altijd 180° zijn.

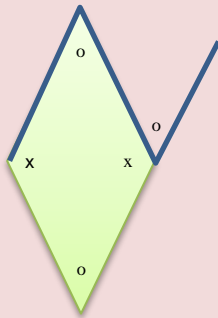
3

De leerling legt vier exemplaren van een vierhoek bij de verschillende hoeken bij elkaar en ziet dat ze precies aansluiten.

2

De leerling tekent een ruit en toont met een Z-hoek aan dat x en o samen 180° zijn. Daaruit volgt de hoeksom eigenschap voor een ruit.





1

De leerling tekent een aantal vierhoeken, meet de hoeken op en constateert dat de som (ongeveer) 360° is.

