Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo/vwo

Implementatie examenprogamma havo/vwo 2015

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

slo

Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo/vwo

Implementatie examenprogramma havo/vwo 2015

Oktober 2017

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

2017 SLO (nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling), Enschede

Auteurs: Anne van Streun, Peter Kop
Eindredactie: Nico Alink, Jos Tolboom
Illustratie: Henk Meijer e.a.

Informatie
SLO
Afdeling: tweede fase
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 661
Internet: www.slo.nl
E-mail: tweedefase@slo.nl

AN: 3.7616.728

Inhoud

Oriëntatie

Deze publicatie is bedoeld voor wiskundedocenten die les geven in de onderbouw havo-vwo en inspiratie zoeken voor het ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten in hun onderwijs.
In de nieuwe examenprogramma's, die vanaf 2015 van kracht zijn in het vierde leerjaar, is een belangrijk leerdoel het bevorderen van wiskundige denkactiviteiten in alle wiskundevakken. Die wiskundige denkactiviteiten (WDA) zijn gekarakteriseerd door termen zoals 'Probleemoplossen en analytisch denken', 'Modelleren en algebraïseren', 'Ordenen en structureren', 'Formules manipuleren', 'Abstraheren', 'Logisch redeneren en bewijzen'.
In de syllabi bij de centrale examens staat een alinea die ook voor de onderbouw havo-vwo leidend is:
"De kandidaat moet beschikken over productieve vaardigheden waarmee de kandidaat, niet op routine, complexe probleemsituaties kan aanpakken. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen."

In de twee vorige publicaties van het SLO, namelijk *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* (Van Streun, 2014) en *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten bovenbouw havo*-vwo (Van Streun, 2016), ging het onder andere over de manier waarop docenten in hun handelen in de klas die wiskundige denkactiviteiten kunnen stimuleren. Het advies was om in samenwerking met de collega's te werken aan een leerlijn vanaf leerjaar 1 tot en met het eindexamen. Dat betekent het samen ontwerpen, uitvoeren en evalueren van onderwijs dat gericht is op het bevorderen van wiskundig denken in alle leerjaren.

In de tot nu toe verschenen schoolboeken is er, wat betreft de bevordering van het wiskundig denken, nog geen duidelijke leerlijn te ontdekken. Het is kennelijk aan de wiskundedocent (en wiskundesectie) zelf om een leerlijn te ontwerpen waarmee de gewenste attitude en vaardigheden bij de leerlingen worden gestimuleerd. Deze publicatie heeft daarom tot doel ideeën aan te leveren voor die leerlijn in de onderbouw havo-vwo. Het is aan de wiskundedocent zelf om te beoordelen of een onderwijsontwerp past bij de eigen situatie. De ontwerpen in deze publicatie zijn dan ook te zien als bronnen die kunnen inspireren tot een eigen ontwerp. Ze zijn niet vervangend voor de schoolboeken, maar bedoeld als aanvulling op de leerlijn voor WDA.

Na enkele inleidende hoofdstukken zijn de onderwijsontwerpen ingedeeld naar het leerstofgebied en de plaats in de opbouw van onderwijs. Voor elk leerstofgebied is een driedeling gemaakt:

1. *Van exploreren naar structuur*
   Denkopgaven in te zetten voor de start van een nieuw deelgebied.
2. *Van kennis naar probleemoplossen*
   Denkopgaven om te leren basiskennis te gebruiken in niet-standaard situaties.
3. *Van exploreren naar redeneren/abstraheren*
   Verdiepende denkopgaven in het logisch redeneren en/of abstraheren.

De opgaven zijn onderverdeeld in *Oefeningen* en *Opdrachten.* De *Oefeningen* zijn minder complex en bestaan de ene keer uit een reeks samenhangende opgaven om de samenhang in de inhoud van een onderwerp te versterken of de probleemaanpak voor leerlingen te expliciteren. Een andere keer zijn het voorbeeldopgaven die exemplarisch bij een hoofdstuk uit het schoolboek kunnen worden ingezet. De *Opdrachten* zijn groter, opener en complexer en kunnen dienen ter vervanging van een VNO-didactiek (Voordoen-Nadoen-Oefenen) uit het schoolboek of een meer systematische probleemaanpak stimuleren.
De teksten in een kader met een licht gekleurde achtergrond, veelal allerlei opgaven, zijn bedoeld als leerlingmateriaal.
Het Register geeft een overzicht van alle voorbeelden; dat vergemakkelijkt het snel zoeken naar een onderwerp.

1. Probleemstelling

Door de eeuwen heen hebben wiskundedocenten, auteurs van wiskundeboeken en bedenkers van leerplannen geprobeerd in het door hen bedoelde wiskundeonderwijs een goede balans te vinden tussen het verwerven van *parate kennis en vaardigheden* aan de ene kant en het bevorderen van het *wiskundig denken* aan de andere kant. Zie bijvoorbeeld *Honderd jaar wiskundeonderwijs* (Goffree, Van Hoorn, & Zwaneveld, 2000), *Een onbekookte nieuwigheid?* (Smid, 1997) en *Actoren en factoren achter het wiskundecurriculum sinds 1600* (Krüger, 2014).

In deze publicatie gaat het met name over de vraag *hoe* dat wiskundig denken in de dagelijkse onderwijspraktijk kan worden bevorderd. Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa heeft het decennia geleden als volgt treffend geformuleerd:
"Iedere leerling kan men laten beleven, wat het is, op het *eigen verstand* vertrouwend, een *eigen inzicht* in een voor hem begrijpelijk gesteld probleem te vormen en, eventueel, ook een eigen oplossing te vinden. En dit is des te gemakkelijker, hoe minder gecompliceerd het probleem is; dus niet eerst aan 't eind van de cursus, maar in het begin. Daardoor wordt tevens de gelegenheid tot het oefenen in het niet-denken uitgeschakeld! Hoe meer de leerling het opbouwen van de leerstof meebeleeft, des te meer gelegenheid krijgt hij om het denken te oefenen en des te meer wordt de leerstof zijn eigen bezit." (Ehrenfest-Afanassjewa, 1960)

Een kenmerk van de nieuwe examenprogramma's havo-vwo is de expliciete aandacht voor de genoemde balans tussen verschillende typen leerdoelen. In de syllabi bij de nieuwe examenprogramma's worden die typen leerdoelen als volgt verwoord:
- Met *parate vaardigheden* wordt hier bedoeld de wiskundige basistechnieken die de kandidaat routinematig moet beheersen.
- Bij *productieve vaardigheden* is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door *inzicht*, *overzicht*, *probleemaanpak* en *metacognitieve vaardigheden* een *strategie* moeten bedenken om het probleem op te lossen.

De parate kennis en vaardigheden zijn dus een essentieel onderdeel van het denkgereedschap waarmee leerlingen *niet-op-routine* opgaven kunnen aanpakken en oplossen. Het andere deel van dat denkgereedschap noemen we *wiskundige denkactiviteiten*. Die kunnen zowel betrekking hebben op het benutten van *inzicht* (betekenissen gebruiken, abstraheren van onderliggende begrippen), het hebben van *overzicht* (samenhangen beheersen, verbanden inzien) als op het toepassen voor het *oplossen van niet-standaard problemen*.

De probleemstelling van deze handreiking voor docenten is:

Hoe kunnen we in de dagelijkse onderwijspraktijk activiteiten ontwikkelen en opdrachten ontwerpen, die het wiskundig denken van de leerlingen, bevorderen?

In het al genoemde deel voor bovenbouw havo-vwo (Van Streun, 2016) was de leerstof van de wiskundevakken in de bovenbouw het medium om wiskundige denkactiviteiten te ontwikkelen, in dit deel heeft de leerstof van de onderbouw havo-vwo die functie.

2. De stimulerende wiskundedocent(e)

Onderwijs, schoolboeken of computerlessen gebaseerd op de directe VNO-instructie (Voordoen-Nadoen-Oefenen) of op het bij voorbaat opknippen van een probleem in deelvraagjes, kunnen op korte termijn tot succes leiden in het doen verwerven van parate vaardigheden. Voor het doen verwerven van productieve vaardigheden op de lange termijn zal de docent(e) andere activiteiten moeten toepassen dan alleen maar doceren, uitleggen en controleren.

Kort samengevat komen bij de verschillende didactische onderzoeken en ontwerpen de volgende aandachtspunten steeds weer naar voren:

- Leerlingen hebben zelfvertrouwen en een stimulerende omgeving nodig om aan niet-standaard opdrachten te kunnen werken. De docent(e) moet het vereiste werkklimaat scheppen.
- Leerlingen zijn in de schoolse situaties veelal tevreden met succes op korte termijn door kant en klare specifieke oplossingsmethoden voor typen opgaven te memoriseren. De docent(e) moet doorvragen naar het waarom.
- De docent(e) modelleert de aanpak van een probleem door steeds eerst de *analyse van het probleem* (Wat wordt er gevraagd? Wat is er gegeven? Wat volgt daar direct uit? Welke voorwaarden zijn er?) centraal te stellen en dan door te vragen naar een *plan van aanpak* (Maak een tekening. Reken een getallenvoorbeeld door. Heb je al iets dergelijks eerder gezien. …….)
- De docent(e) formuleert *"hele taken"* en splitst niet op voorhand het grote probleem op in kleine deelstappen.
- De docent(e) organiseert een variatie van werkwijzen, b.v. naar een idee van Schoenfeld (1992):
  - brainstormen over een mogelijke aanpak van een probleem
  - vervolgens in tweetallen of groepjes laten uitwerken
  - rondlopen en waar nodig wat hints geven, niet uitleggen
  - oplossingswegen laten toelichten
  - samen reflecteren en generaliseren.

In de al genoemde SLO-publicatie *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* (Van Streun, 2014) geven leraren aan hoe zij dat in hun lessen doen. Een geïnterviewde wiskundedocent in die SLO-publicatie formuleerde het zo:

> *Natuurlijk ken ik na zoveel jaren ervaring al die sommetjes wel die de leerlingen moeten maken. Er zijn collega's die daarom hun lessen niet meer voorbereiden. Wel gemakkelijk, maar op die manier bereik je natuurlijk geen diepgang. Mijn lesvoorbereiding is altijd een antwoord op mijn vraag: "Hoe kan ik ze over wiskunde aan het denken krijgen?" Het gaat om de waarom-vraag! En dus moeten ze leren redeneren, ook over simpele formules.*

Marja Bos schreef in Euclides met als titel *"Zelfwerkzaamheid? Zelfstandig leren!"* (1996) aan het begin van de hype over zelfstandig werken het volgende:
"Zo nu en dan kun je als docent dit soort zaken 'hardop denkend' demonstreren; uiteindelijk moet de leerling leren zichzelf deze vragen te stellen - het proces is dan geautomatiseerd. De docent heeft ook een belangrijke (maar moeilijke) rol bij de begeleiding van leerlingen inzake hun leerstrategieën, studievaardigheden en probleemoplossingsvaardigheden. Daarbij zijn klassikale momenten van groot belang: Hoe heb jij het aangepakt? Waarom? Wat leverde dat op? Hoe stuur je je aanpak bij? Wat neem je je nu voor? Enzovoort. Een cyclisch proces dat voor ieder verschillend is, maar waarbij veel geleerd kan worden van andermans ervaringen."
Ze sluit af met de oproep:
"Laat wiskunde niet verworden tot een schoolvak waarbij iedere leerling 'in individuele zelfwerkzaamheid' haastig de aangeboden rijen sommetjes afwerkt. Dat is niet alleen dodelijk saai, maar bovendien ineffectief!"

Leerdoelen en daarbij passende activiteiten van de docent(e)

In het *Handboek Wiskundedidactiek* (Drijvers, Van Streun, & Zwaneveld, 2012) worden de na te streven leerdoelen in ons wiskundeonderwijs besproken en met tal van voorbeelden geïllustreerd. Toegespitst op die leerdoelen zijn de volgende docentactiviteiten te onderkennen:

Weten dat Selecteren van de kernen (lang niet alles hoeven leerlingen paraat te hebben) inclusief standaardopgaven, met inzicht en denksteuntjes onderwijzen, regelmatig onderhouden, norm 100% paraat, individueel oefenen en toetsen b.v. met computerprogramma's. Goed te toetsen met pen en papier, korte antwoord vragen of computer.

De docent heeft vooral een controlerende en normbewakende rol.

Weten hoe Problemen en grotere opdrachten individueel en in groepjes laten maken, rapporteren over aanpak, verplichte terugblik, lessen trekken voor de volgende keer, een algemene en een persoonsgebonden probleemaanpak laten ontwikkelen. Toetsing door problemen te laten maken, open vraagstellingen, zelfstandig onderzoek.

De docent is vooral procesbegeleider.

Weten waarom Overzichten laten maken, samenhangen en abstracties laten zoeken en expliciteren, in toepassingen de onderliggende wiskundige kernen laten opsporen. Toetsen door te vragen naar samenhangen, naar uitleg, naar redeneringen, naar zelf te bedenken voorbeelden, enz.

De docent is actief in het leiden van het gesprek en de interactie met de groep.

Weten over weten Vanaf de brugklasleerlingen laten rapporteren over de zelf gemaakte fouten, de eigen manier van werken een eigen opzoekboekje laten maken, toetsen laten verbeteren met eigen commentaar, reflectievragen inbouwen.

De docent bewaakt dat dit gebeurt en spreekt ook individueel na.

Houding Ruimte geven voor eigen initiatief en eigen producties in het aanleren van nieuwe wiskundige concepten, geïntegreerde wiskundige activiteiten, onderzoek, profielwerkstukken enzovoort. Zelfvertrouwen bevorderen.

De docent inspireert, reflecteert, selecteert geschikte taken, werkt samen met collega's, gaat buurten bij andere vakken voor integratietaken, enzovoort.

Combinaties van leerdoelen en docentactiviteiten

In de eerste plaats is het vanzelfsprekend dat voor veel opdrachten combinaties van weten nodig zijn. Bij eenvoudige toepassingsproblemen is het van belang dat leerlingen de onderliggende wiskundige structuur van de probleemsituatie *herkennen* en dit vervolgens kunnen *gebruiken*. Herkennen houdt in dat leerlingen die kennis ook echt moeten hebben (*weten dat*), begrijpen dat die kennis alles met het voorliggende probleem heeft te maken (*weten waarom*), en die relatie kunnen gebruiken voor het oplossen van het probleem (*weten hoe*).

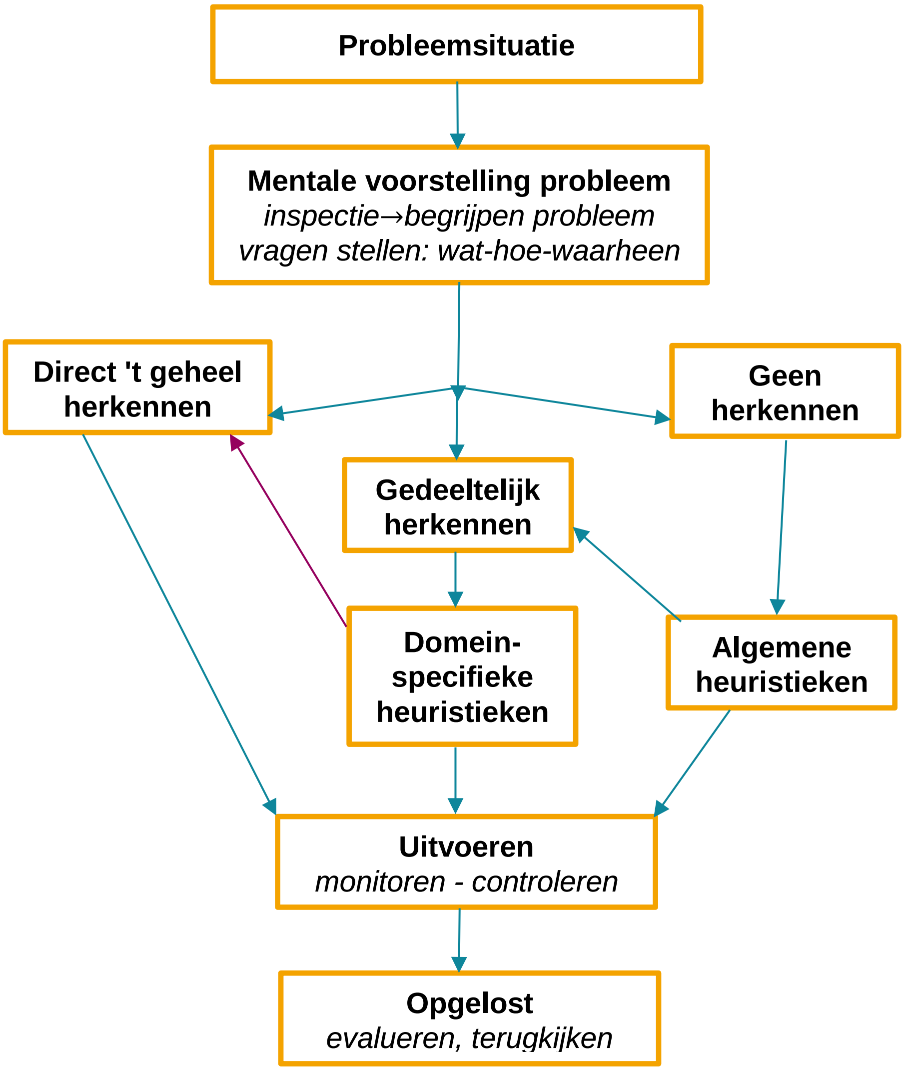
In de tweede plaats geldt dat leerlingen moeten worden ondersteund als zij niet op eigen kracht een opdracht tot een goed einde kunnen brengen. De docent of een medeleerling assisteert op zo'n manier dat de leerling zelf de opdracht kan afmaken. Essentieel is dat die hulp *niet* de complexiteit of de uitdaging van de opdracht reduceert b.v. door het geheel te verknippen in ministapjes. Verder moeten de leerlingen worden gestimuleerd zichzelf vragen te stellen: Hoe staat het met de voortgang van mijn oplossen? Zonder een stimulerende docent in een stimulerende onderwijsomgeving valt niet te verwachten dat leerlingen hun wiskundig denken en probleemoplossen ontwikkelen.

In de publicatie *Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs* (Janssen, Hulshof, & Van Veen, 2016) wordt het uitgangspunt 'hele taak eerst' voor alle schoolvakken gekoppeld aan een meer uitgewerkte beschrijving van *gefaseerde hulp*, met tal van voorbeelden voor het vak wiskunde (Kop & Van Streun, 2016 - §3.27).

3. Wiskundige denkactiviteiten in de onderbouw havo/vwo

3.1 Het aanpakken en oplossen van niet-routine opgaven

Voordat we verder gaan over de manier waarop wij leerlingen kunnen helpen hun wiskundig denken te ontwikkelen en niet-routine opgaven aan te pakken en op te lossen, is het goed even te recapituleren wat (psychologisch) onderzoek ons heeft te vertellen. Op het gebied van het begrijpen van de werking van het werkgeheugen en het langetermijngeheugen en het begrijpen van oplossingsprocessen zijn langzamerhand betrouwbare onderzoeksgegevens beschikbaar. Daarnaast slagen de moderne neurowetenschappers er zelfs in om met MRI-scans aan te geven of een mens kennis reproduceert of al denkend een probleem aanpakt.
De ontwikkeling van de didactiek van een gestructureerd vak als wiskunde kan niet voorbijgaan aan die wetenschappelijk onderbouwde kennis. Aan de hand van het volgende schema lichten we toe wat die kennis betekent voor het bevorderen van wiskundig denken.



Stap voor stap lichten we dit schema toe. Daarna volgen twee voorbeelden.

Probleemsituatie:
Een taak, een opgave, een situatie die vragen oproept, een open of gesloten opdracht, kortom een neutrale term, want wat voor de ene mens (leerling) routine is blijkt voor een ander een schier onoverkomelijk probleem.

Mentale voorstelling:
Dit is de probleemsituatie, zoals de oplosser het 'ziet', een zich ontwikkelend geheel aan ideeën in het werkgeheugen, vanaf de eerste inspectie en het (enigszins) begrijpen van wat er aan de hand is. Die mentale voorstelling staat in dit schema bij de start van het oplossen, maar kan/zal door elke actie rijker en veelzijdiger kunnen worden.

Direct het geheel herkennen:
Bij de eerste inspectie en het begrijpen van de probleemsituatie kan uit het langetermijngeheugen direct een type opgave of techniek worden opgeroepen, *Weten dat,* waarna liquidatie van het probleem volgt. De kanttekening is dat onze leerlingen vaak snel en associatief grijpen naar het eerste wat bij hen opkomt zonder tijd te nemen voor inspectie. (Eerst even op je handen zitten en kijken of die associatie wel klopt.)
Iets kunnen herkennen heeft alles te maken met de manier waarop je kennis in het langetermijngeheugen is georganiseerd. Zijn het allemaal losse brokjes, dan is het op de duur lastig om voor elk los brokje een aanknopingspunt (een signaal) terug te vinden. Het herkennen gaat bijvoorbeeld van globaal "*dit is een formule"* via *"welke typen formules ken ik"*, naar *"kwadratisch?", "een tabel maken", "oh ja, symmetrisch"* en dan *"de top ligt op de symmetrieas"*. Voor de toets sla ik in het langetermijngeheugen op " $x_{top} = \frac{-b}{2a}$ ", maar drie weken later is het allicht iets anders. Niet meer terug te vinden!

Gedeeltelijk herkennen:
Ook na de inspectie en het (enigszins) begrijpen van de probleemsituatie komt er uit het langetermijngeheugen nu nog niet een oplossingsmethode naar boven. Wel zien we dat het over een formule gaat, of een berekening van de lengte van een lijnstuk of een ander type opgave, die we weleens hebben gezien.
"Hoe moet dit?" vragen onze leerlingen dan al snel. Inderdaad het gaat over *Weten hoe.* Toch is het type probleem in deze oplossingsroute ons wel bekend en daarvoor hebben we, als het goed is, ook een aantal heuristische methoden (zoekstrategieën) in onze gereedschapskist. Dat roepen we ook op uit ons langetermijngeheugen.
Deze domeinspecifieke heuristieken zijn gebonden aan het type problemen dat we hebben herkend. Bij formules kan het bijvoorbeeld gaan over doorrekenen van een getallenvoorbeeld, het maken van een tabel, het schetsen van een grafiek, het onderzoeken van het gedrag ver weg. Voor het berekenen van de lengte van een lijnstuk gaat het om het inkleuren van wat je weet en wat je moet berekenen in een tekening. En om het oproepen van een lijstje van manieren waarop je ooit de lengte van een lijnstuk hebt berekend. En om het inzetten van een werkschema voor de uitvoering van en berekening, zoals het werkschema bij de stelling van Pythagoras of de berekening met gelijkvormige driehoeken.
Bij het werken volgens zo'n heuristiek ontwikkelt zich de mentale voorstelling van wat er aan de hand is en kan ineens ook "directe" herkenning plaats vinden van hoe het al weer moet.

Geen herkennen:
Natuurlijk komt het voor dat er geen enkele herkenning plaats vindt of dat herkennen zelfs onmogelijk is. Centraal staat dan de analyse van de gegeven situatie, de analyse van het doel en het zoeken naar "middelen" om de kloof tussen beide te overbruggen. Bij de klassieke meetkundebewijzen gaat het dan om *vooruitdenken, terugdenken*, *relevante stellingen oproepen* en een *plan maken*.

Uitvoeren:
Een kenmerk van 'goede' oplossers is dat zij zo nu en dan even de actie stilzetten, zich afvragen hoever ze nu zijn, even teruggaan naar de vraag en dergelijke. Dat noemt men *monitoren*.

Opgelost:
De bedoeling van al die opgaven, die wij leerlingen voorleggen, is dat zij er iets van leren en iets leren over hun eigen kennis en aanpak. Het is twijfelachtig of leerlingen iets algemeens leren van opgaven die opgesplitst zijn in ministapjes, opgaven die het niet-denken bevorderen.
Wat je wilt bereiken is dat zij terugkijken op een worsteling met een probleem, opmerken wat hen verder helpt en noteren wat zij voor het vervolg aan kennis en aanpak moeten onthouden. *Weten over weten* en *Houding.*

Voorbeeld: Leerlingen werken aan een inhaalprobleem

In *Opdracht 5.1.2.2.c Hardlopers* staat een analoog probleem dat voorkwam in het onderzoeksproject *Heuristisch wiskundeonderwijs* (Van Streun, 1989). Eind 3 vwo maakten ruim 400 leerlingen die opgave en eind 4 vwo nog eens, met een andere context. De laatste opgave was:
Een trimmer vertrekt voor een duurloop van 10 kilometer 's morgens om 9.00 uur. Hij houdt een constante snelheid aan van 120 meter per minuut. Een andere trimmer vertrekt van hetzelfde startpunt voor dezelfde duurloop om 9.15 uur. Hij houdt een constante snelheid van 200 meter per minuut aan.
Op welke afstand van het startpunt haalt de tweede trimmer de eerste in?

Na de fase van probleemverkenning ligt er allicht niet direct een oplossingsroute voor de hand. De *gedeeltelijke herkenning* van het type probleem, suggereert dat het wel iets met formules of vergelijkingen of grafieken of tabellen kan zijn. Een specifieke heuristische methode is *reken een getallenvoorbeeld door.* Dat helpt voor de ontwikkeling van de mentale voorstelling van het probleem.
Na 40 minuten is de eerste trimmer op 40·120 m = 4800 m.
Na 40 minuten is de tweede trimmer op (40-15)·200 m = 5000 m.

Zo zit de probleemsituatie in elkaar, herkenning dat het met een vergelijking kan. Vervang *40* door *t*, *"maak een formule"* en los de vergelijking op.

Het kan ook met een "*algemene heuristiek"*, namelijk door systematisch het verschil tussen beide trimmers stap voor stap te reduceren.
Om 9.15 is het verschil in afgelegde afstand 1800 m.
Per minuut haalt de tweede trimmer 80 m op de eerste in.
*Na 1800 **:** 80 = 22,5 minuten gaat de tweede de eerste voorbij.*
Dat is op een afstand van 22,5·200=4500 m.

De analogie tussen het oplossen van de vergelijking $(t-15)\cdot 200 = 120t$ of $200t - 1800 = 120t$ en deze redenering is te mooi om niet in de evaluatie mee te nemen!
Wat deden die 400 leerlingen beide keren?

methode	tabel	grafiek	vergelijking	redenering
eind 3 vwo	52	13	20	20
eind 4 vwo	55	31	141	34

De tabel en grafiek waren voor hen niet alleen specifieke zoekstrategieën, maar ook een manier om direct aan te sturen op een oplossing. Formules (vergelijkingen) maken is ook een specifieke heuristiek, die leidt tot een bekende routine-opgave, die standaard wordt opgelost.

Voorbeeld: Leerlingen werken aan het maximaal aantal snijpunten

Dezelfde groep leerlingen maakten eind 3 vwo en eind 4 vwo de bekende opgave over het maximaal aantal snijpunten van snijdende lijnen. (Zie ook Opdracht 5.3.2.2.d.)
Het maximaal aantal snijpunten bij drie elkaar snijdende lijnen is 3.
Bij vier elkaar snijdende lijnen is het maximaal aantal snijpunten 6. Wat is het maximaal aantal snijpunten bij n lijnen?

Ook hier kunnen de leerlingen weer verschillende routes volgen. Een directe herkenning zal niet optreden, tenzij leerlingen deze specifieke opgave al eens hebben opgelost en gememoriseerd.
De meeste leerlingen hadden geen idee hoe ze dit probleem konden aanpakken. Aan het einde van 4 vwo was er één leerling die *herkende* dat dit als een combinatorisch probleem kan worden opgevat. In de combinatorische formulering gaat het om het aantal verschillende manieren, waarop twee lijnen uit n lijnen kunnen worden gekozen. Die leerling schreef zonder verdere uitleg gewoon op: $\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}$. Een sterk staaltje van transfer vanuit het ene subdomein (de kansrekening) naar een ander subdomein (de meetkunde).
Hoe deden de andere leerlingen het?

methode	redenering	tabel-grafiek	combinatoriek
eind 3 vwo	16	1	
eind 4 vwo	5	3	1

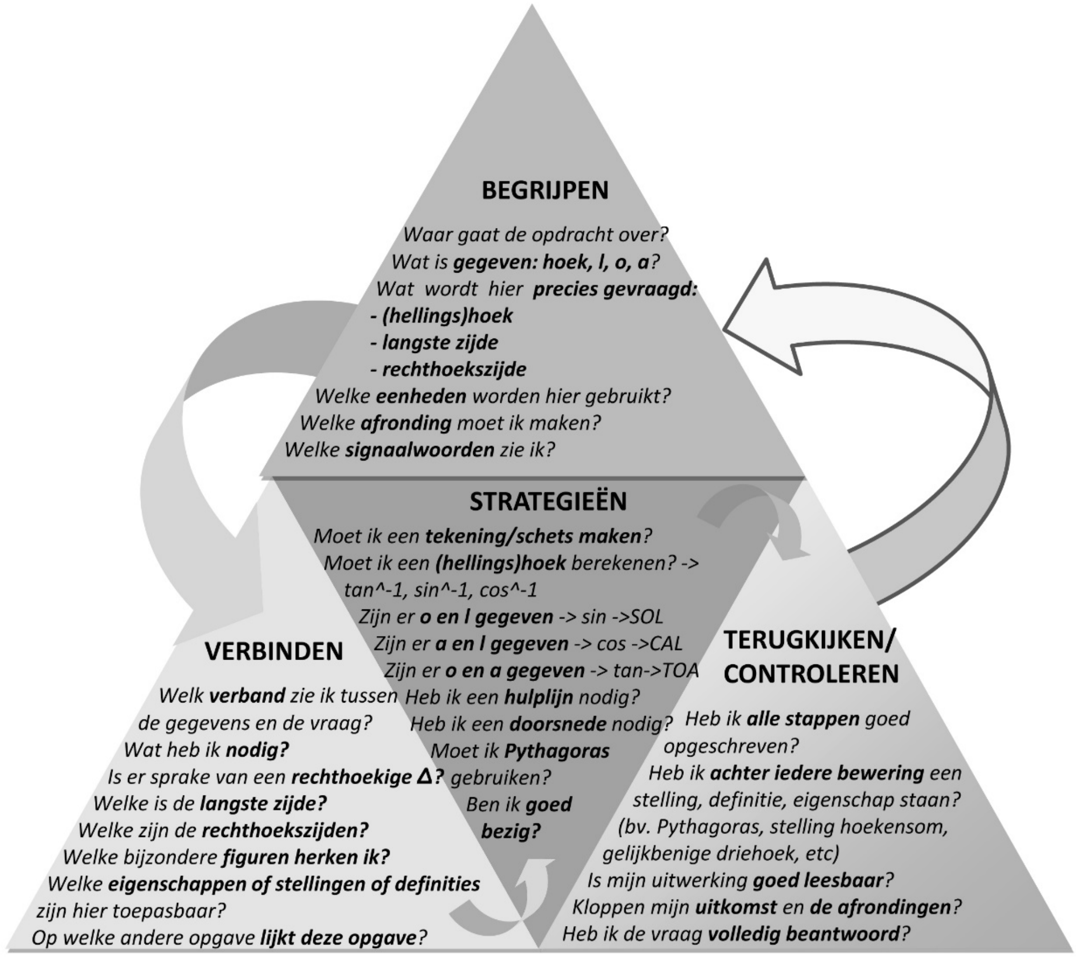
De redenering is een algemene aanpak, maar wel specifiek voor dit ene probleem.
Elke lijn snijdt $(n-1)$ andere lijnen. Dat geldt voor n lijnen, dus $n(n-1)$ snijpunten.
Elke lijn is dubbel geteld, dus de helft, $\frac{1}{2}n(n-1)$ snijpunten.

Enkele leerlingen maakten eerst een tabel, tekenden daarbij een grafiek, herkenden een parabool en diepten vervolgens uit hun langetermijngeheugen de techniek op voor het opstellen van een kwadratische formule uit een grafiek.

3.2 Wat willen we bereiken en hoe werken we daaraan?

Recent is een voor deze publicatie relevant praktijkonderzoek gepubliceerd (Ernst-Militaru, Nijhof, Ghysels, 2016), dat de NRO-onderwijsprijs heeft gekregen. Twee wiskundedocenten hebben, met ondersteuning van een medewerker van de Universiteit van Maastricht, onderwijs ontworpen met als doel de metacognitieve vaardigheden van leerlingen te bevorderen. Ze maakten daarbij gebruik van een META-kaart, waarmee leerlingen hun aanpak konden structureren. Hieronder volgt een voorbeeld van een door hen gebruikte META-kaart, gevolgd door wat aanbevelingen voor docenten. We vergelijken hun ontwerp met de aanpak in deze publicatie en de beide voorgaande. Daarna volgt in § 3.3 ons model voor een probleemaanpak in leerlingentaal.

META-kaart VWO3- Goniometrie



BEGRIJPEN slaat op het begrijpen van het probleem.
VERBINDEN is het zoeken naar relevante kennis.
STRATEGIEËN zijn heuristische zoekmethoden, inclusief plannen en monitoren.
TERUGKIJKEN/CONTROLEREN is inclusief het leren van je eigen aanpak.

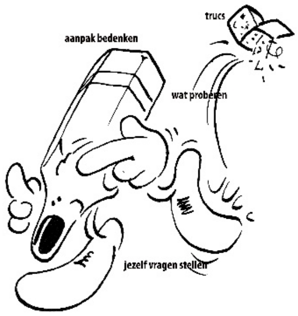
De door hen aanbevolen didactische werkvormen zijn:

- leerling op bord actief signaalwoorden laten onderstrepen;
- elkaar vertellen welke strategie ze gaan gebruiken;
- schatten voor oplossen, controleren na oplossen, in een klassengesprek;
- META-kaart samen invullen;
- samenwerken m.b.v. META-kaart, zonder directe steun van docent/antwoordenboek;
- leerlingen elkaars werk laten nakijken en laten uitleggen wat goed/fout is;

- analoge opgaven laten zoeken;
- mindmappen in groepjes of individueel laten maken om oude/nieuwe kennis te ordenen;
- discussiëren over hoe je wiskunde leert.

De onderzoekers rapporteren dat in hun onderzoek leerlingen van het tweede kwartiel (de 25% net onder de mediaan) het meeste baat bij deze aanpak hadden. Met name de leerlingen in het vierde kwartiel (de 25% met de hoogste cijfers) deden er weinig mee (zonder de META-kaart konden ze ook wel oplossingen produceren) en waardeerden deze benadering negatief.
Wim Bos betoogde ooit in Euclides (Bos, 1955) dat die leerlingen niet leerden om problemen op te lossen en hij adviseerde om hen moeilijker problemen voor te leggen, zodat ze wel systematisch een probleem leerden aanpakken!

De relatie met het model voor het oplossen van wiskundige problemen



In de vorige paragraaf werd het model voor het oplossen van wiskundige problemen besproken. Hier gaat het over een manier om in het wiskundeonderwijs leerlingen te leren beter problemen op te lossen. Deze META-kaart interpreteren we nu in het licht van wat we weten over het oplossen van een wiskundig probleem.

Inspectie
De tijd nemen om eens rustig te kijken naar de opgave. Even '*op je handen zitten*' in plaats van direct aan het werk te gaan met iets wat je te binnen schiet.
Dat is in de eerste plaats een *houding*, de tijd nemen om vragen te stellen aan de opgave.

Begrijpen
Dat is het begrijpen van de opgave. Dan moet je wel even rommelen, rekenen, tekenen, even heen en weer switchen tussen de gegeven situatie en het doel wat je moet bereiken.
Even rommelen betekent wel dat je wat probeert, wat doet!

Herkennen
Nu je de tijd hebt genomen, komt het verschil tussen *herkennen* en *probleemoplossen*. In termen van de syllabi bij de nieuwe examenprogramma's gaat het om het verschil tussen *reproductieve kennis en vaardigheden* en *productieve kennis en vaardigheden.* Leerlingen kunnen voor standaardopgaven direct de oplossingsroute herkennen (*Weten dat)*, zodat de opgave voor hen geen probleem is. Ze koppelen *direct* de opgave aan hun wiskundig gereedschap en lossen zo het probleem, dat voor hen geen probleem is. Dat is natuurlijk des te gemakkelijker als de opgave in een

rijtje, paragraaf of hoofdstuk staat met analoge opgaven. Een selectie maken uit het wiskundig gereedschap is dan onnodig. Pas bij gemengde opgaven uit een algemene herhaling blijkt of leerlingen *zicht* hebben op hun wiskundig gereedschap en daar relevante kennis uit kunnen selecteren.

Leerlingen in eenzelfde klas verschillen sterk in de mate waarin zij kennis kunnen reproduceren. Sommige leerlingen slagen er goed in om veel typen opgaven met de bijbehorende oplossingsroute te memoriseren, ook zonder dat zij het *waarom* desgevraagd kunnen uitleggen. Zij *reproduceren* het antwoord op routine. Voor anderen zijn ook veel 'standaardopgaven' problemen, waar zij een strategie voor moeten inzetten om tot een oplossingsroute te komen. Alle leerlingen moeten leren om niet-routine vraagstukken aan te pakken en op te lossen. In hun repertoire moeten zij ook kunnen beschikken over heuristische methoden, zoekmethoden, om de relevante kennis te kunnen mobiliseren.

Heuristische methoden: Weten hoe

De heuristische methoden, ook wel zoekmethoden genoemd, komen in beeld zodra de oplosser niet onmiddellijk 'ziet' hoe nu verder te komen in het oplossingsproces. Zij lopen uiteen van heel algemene methoden tot meer specifieke methoden. Een algemene probleemanalyse is bijvoorbeeld:

Vooruitdenken: wat volgt er direct uit de gegeven situatie (tekening, formule, verhaal)
Terugdenken: de weg terug, welke denkstappen leiden tot het doel
Gereedschap: welke kennis overbrugt de kloof tussen gegevens en de gestelde vraag

Het systematisch kunnen zoeken in het beschikbare wiskundig gereedschap is bij het oplossen van een probleem essentieel. Dat vereist een *overzicht*, zoals het kunnen interpreteren van een formule in termen van een grafiek of een context, het op een rijtje hebben van alle meetkundige situaties waarin gelijke hoeken voorkomen, enzovoort. Van het versterken van dat overzicht maken we bij de ontwerpen in deze publicatie veel werk.

Meer specifieke heuristische methoden zijn het maken van een schets van de situatie, van een meetkundige figuur, van een grafiek of het doorrekenen van een getallenvoorbeeld, of het maken van een formule. (Zie ook het deel voor bovenbouw havo-vwo (Van Streun, 2016) met veel voorbeelden op het niveau van de bovenbouw havo-vwo.)

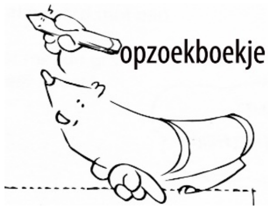
Uitwerken

Tijdens het heuristisch zoeken, kan ineens herkenning optreden, omdat in het lange termijn geheugen een oplossingsmethode of een relevante eigenschap wordt geactualiseerd. Oh ja, zo kan het! De zogenaamde aha-erlebnis kan snel opkomen, maar soms ook pas na uren zoeken! "Dat zie je toch meteen" verzuchtte eens een wiskundestudent nadat hij een half uur met een probleempje had geworsteld (Van Streun, 1991).

In dat proces van verder uitwerken komen verschillende kanten van het metadenken (*Weten over weten)* en de *Houding* weer aan de orde. Nu en dan even stilstaan en kijken waar je bent, waarom klopt dit, doorzetten, kan het ook anders, terug naar de vraag, enzovoort.

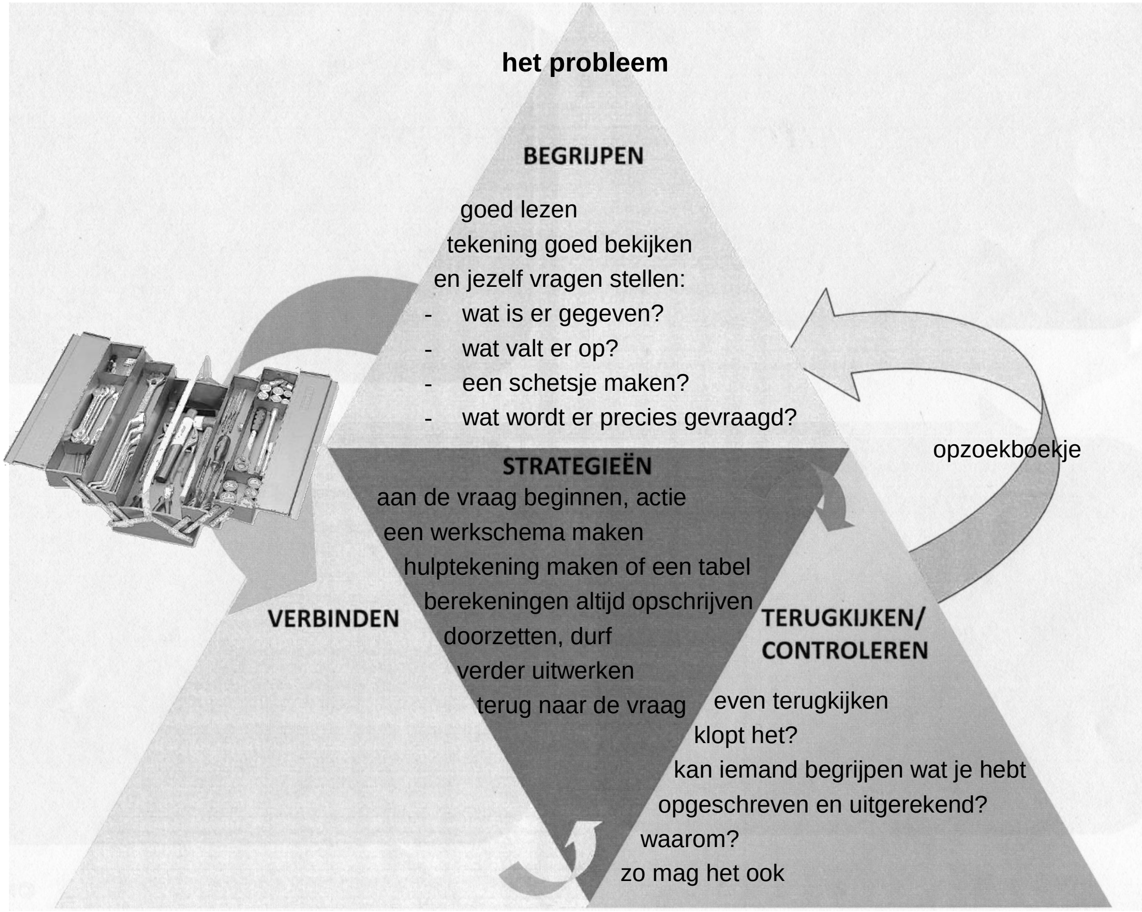
Reflecteren

Naast het controleren door nog eens terug naar de vraag te gaan, moet bij de afronding ook weer de vraag worden beantwoord wat er nu over de eigen aanpak is geleerd.
En dat is weer vast te leggen in het eigen *opzoekboekj*e.



Algemeen en/of specifiek voor één onderwerp

In de volgende "META-kaart" (waarin een aantal van de hierboven genoemde heuristieken is vermeld) is een algemene aanpak beschreven, die vervolgens verder per domein (meetkunde, formules) kan worden toegespitst. De ontwerpers van de besproken META-kaart passen het ook toe op een heel specifiek onderwerp als Goniometrie. Het is de vraag of leerlingen dan een algemene aanpak leren.


het probleem
BEGRIJPEN
goed lezen
tekening goed bekijken
en jezelf vragen stellen:
- wat is er gegeven?
- wat valt er op?
- een schetsje maken?
- wat wordt er precies gevraagd?
opzoekboekje
STRATEGIEËN
aan de vraag beginnen, actie
een werkschema maken
hulptekening maken of een tabel
berekeningen altijd opschrijven
doorzetten, durf
verder uitwerken
terug naar de vraag
VERBINDEN
TERUGKIJKEN/
CONTROLEREN
even terugkijken
klopt het?
kan iemand begrijpen wat je hebt
opgeschreven en uitgerekend?
waarom?
zo mag het ook

3.3 Probleemaanpak voor leerlingen

In leerjaar 1 komen de leerlingen binnen uit verschillende basisscholen, waar zij veel tijd aan het rekenen hebben moeten besteden. Daarbij hebben zij heel verschillende werkwijzen en gewoonten geleerd. In de nieuwe omgeving moet het ontwikkelen van een positieve houding en goede werkgewoonten prioriteit hebben. De leerlingen moeten ervaren dat wiskunde leren vooral wiskunde doen is. En dat wiskunde doen alles te maken heeft met je hersens leren gebruiken.

Het beïnvloeden van de houding en de probleemaanpak van leerlingen is vaak een proces van jaren waar de hele wiskundesectie aan werkt. Het introduceren van een META-kaart of een ander houvast voor leerlingen helpt niet als er in de interactie tussen leerlingen en leraar niet alle aandacht voor is. Het begint met het stimuleren van een positieve houding.

Houding

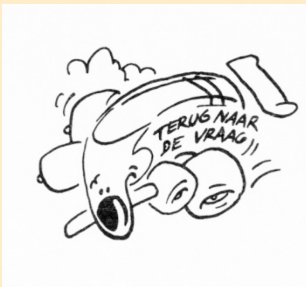
Je moet er eerst aan willen beginnen. Die houding heeft te maken met plezier hebben in de activiteit, het vertrouwen dat je wel wat kunt, de interesse krijgen, enzovoort. Al werkende moet het je eigen probleem worden, wil je er iets van of over leren. En soms moet je je vastbijten in een probleem en doorzetten.
Essentieel is natuurlijk dat de wiskundedocent(e) geen kans voorbij laat gaan om hierover met de leerlingen in gesprek te gaan: "wiskunde is mensenwerk".
Aanknopingspunten voor die interactie kunnen de volgende invalshoeken zijn:

Ik kan het!

Weten over weten

Dit gaat over je eigen weten en aanpak bijhouden, terugkijken, jezelf vragen stellen. Praten met jezelf over je vorderingen, over de vraag waar je ook al weer mee bezig bent, het controleren en terugkijken, het zoeken van een goede probleemaanpak, enzovoort. In dit verband wordt de term *monitoren* gebruikt: even uit je eigen oplossingspoging stappen en daar van buitenaf naar kijken voordat je verder gaat. En *reflecteren* op de toegepaste aanpak en de methoden, afwegen wanneer welke probleemaanpak veel belooft, het eigen repertoire aan methoden uitbreiden. Aanknopingspunten zijn:

inzoomen & uitzoomen



Weten waarom

Leerlingen die een vaardigheid zonder begrip leren, hebben heel veel oefening nodig om de stappen niet te vergeten. Als leerlingen de operaties begrijpen, dan zijn ze beter in staat om ze te reconstrueren en ze in samenhang met andere operaties te zien.

Leerlingen leren dat niet door alleen maar zelfstandig opgaven te maken. Het gaat er om samen met de docent na te denken over wat al die opgaven gemeen hebben, welke betekenissen er aan vast zitten, welke onderliggende begrippen moeten worden begrepen, welke heuristische methoden er geleerd moeten worden. Zonder interactie met en tussen de klas of groepjes leerlingen gaat het niet. En natuurlijk in toetsen ook vragen om uitleg!

Leg eens uit waarom ....

Weten hoe

Eerst even op je handen zitten...

Waar gaat dit over?
Wat is gegeven?
Waar moet ik naar toe?
Wat zou ik kunnen doen?
Komt mij dit bekend voor?

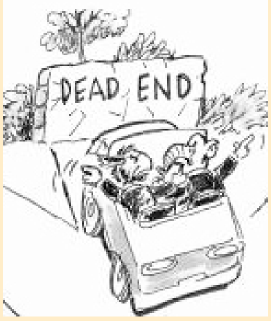
Herken ik iets uit mijn wiskundig gereedschap?

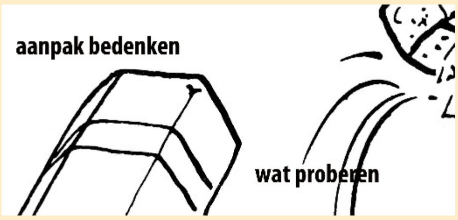
Gaat het over formules? Welke dan?
Gaat het over lengte van lijnstukken?
Gaat het over ...?

Stuck!

Schrijf in je opzoekboekje op waarom je vast zit.

Ik begrijp niet...
Ik weet niet wat nu te doen...
Ik kan niet zien hoe...
Ik kan niet zien waarom...
Ik herinner me niet...





!! Aha, een goed idee!

Samenwerken helpt vaak

Hoe ver ben ik? Wat weet ik nog meer?
Wat heb ik nog nodig? Hoe kom ik daar?
Heb ik het wel goed gelezen?

?! Klopt het?!
Heb ik de vraag beantwoord?
Hoe kan ik mijn oplossing controleren?
Kan iemand anders begrijpen wat ik heb opgeschreven?

Wat ging goed/slecht?
Wat heb je over je aanpak geleerd?
Wat moet je opschrijven om niet weer te vergeten?

3.4 Drie invalshoeken voor deze ontwerpen

Bronnen voor aanvulling en vervanging
De schoolboeken voor het vak wiskunde zitten barstensvol met leerstof en sommen, aangevuld met digitaal lesmateriaal, hulp op maat, individuele leerroutes enzovoort. En toch verloopt het leerproces van de leerlingen niet optimaal en lijkt het dat er van de eerdergenoemde doelstellingen weinig terecht komt. Nogmaals, de syllabi bij de nieuwe eindexamenprogramma's formuleren het kernachtig:

"De kandidaat moet beschikken over productieve vaardigheden waarmee de kandidaat, niet op routine, complexe probleemsituaties kan aanpakken. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen."

Onze analyse is dat ook in de onderbouw nog geen optimale en doorlopende leerlijn in de schoolboeken voorkomt, maar dat integendeel alle aandacht is gericht op het "overbrengen" van reproductieve kennis en vaardigheden. Daarnaast is in de onderbouw havo-vwo de *opbouw* en *volgorde* van grote leerstofeenheden, zoals de brokstukken van verbanden en vergelijkingen, in tientallen jaren niet veranderd. Los van een sausje contexten is de structuur nooit weer opnieuw doordacht en sluit deels ook niet aan op de breedte van de bovenbouw havo-vwo met wiskunde A, wiskunde B en wiskunde C. Ook met een vergrootglas zijn er in de schoolboeken zelden aanwijzingen te vinden voor een systematische probleemaanpak (*Weten hoe)*, laat staan van het bevorderen van metadenken (*Weten over weten)*. En de *Houding,* die lijkt te worden bevorderd, is het memoriseren van alle leerstofbrokjes die in het boek staan, zonder enige samenhang.

Kennelijk concentreren de verantwoordelijke auteurs zich op de route van *directe herkenning* uit het oplossingsmodel van §3.1. En wij, wiskundedocenten, ervaren dat we steeds weer moeten herhalen en herhalen met voor de modale leerling alleen succes op korte termijn. Dat is niet verrassend want onderzoek naar de werking van het geheugen heeft al tientallen jaren uitgewezen dat op die manier geen blijvende leeropbrengst wordt behaald. Alleen heel intelligente leerlingen doorzien op eigen kracht in al die aangeboden fragmenten de samenhang (een kenmerk van intelligentie) en met dat *overzicht* behalen zij zonder veel inspanning goede cijfers op de gebruikelijke toetsen.

Deze publicatie is bedoeld als bronnenboek en inspiratie voor wiskundedocenten die (deels) instemmen met bovenstaande analyse. De voorbeelden van ontwerpen zijn bedoeld als inspiratie voor het ontwerpen van de eigen lessen en kunnen dienen als aanvulling of vervanging van delen uit de schoolboeken. Wegens het overweldigend aanbod aan leerstof moeten wiskundeleraren en wiskundesectie ook nu al keuzes maken. Bij de ontwerpen staat vermeld waar zij in de twee grote schoolmethoden kunnen worden ingezet. Natuurlijk zou een schoolmethode waarin alle belangrijke lange-termijn-doelen geïntegreerd zijn opgenomen, het beste hulpmiddel voor docenten en leerlingen zijn. Nu zo'n methode nog niet beschikbaar is, zijn de ontwerpen in deze publicatie gecentreerd op de start van een onderwerp, op het oplossen van problemen met inzet van de al beheerste wiskunde en op het redeneren/abstraheren in verschillende fasen van het leerproces. Die drie invalshoeken zijn als volgt gemotiveerd en ingevuld.

Van exploreren naar structuur
"Hoe meer de leerling het opbouwen van de leerstof meebeleeft, des te meer gelegenheid krijgt hij om het denken te oefenen en des te meer wordt de leerstof zijn eigen bezit"

Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

Het is mogelijk en wenselijk om leerlingen *vanaf het begin* te activeren en aan het denken te zetten over de wiskundige begrippen en eigenschappen die aan de orde komen. Elk onderwerp of hoofdstuk kan beginnen met het *Exploreren* aan de hand van concrete ervaringen. Leerlingen werken aan vrije of doelgerichte opdrachten met concreet materiaal of met situaties uit de werkelijkheid. Op basis van de opgedane ervaringen kunnen leerlingen zelf het gebied van de meetkundige vormen *structureren* en opgespoorde eigenschappen *expliciteren.* In §4.1 worden daar voorbeelden van gegeven. Het *overzicht* op en de *structuur* van die expliciet vastgelegde en te memoriseren wiskundige kennis en vaardigheden met standaard toepassingen moet dan tot de *parate kennis en*

vaardigheden gaan behoren.
De eigen ervaringen bij het exploreren kunnen functioneren als denkankers voor het geheugen. De voorwaarde is dan wel dat het gehele deelgebied in een heldere samenhang is geordend en daar ontbreekt het vaak aan. De ontwerpen zijn daarom vaak gericht op het *samenhangend herstructureren* van een deelgebied.

Van kennis naar probleemoplossen
Uiteraard gaat het bij het bedoeld exploreren ook om probleemoplossen, maar bij de tweede invalshoek gaat het vervolgens over de vraag hoe leerlingen kunnen leren de verworven kennis te mobiliseren in de aanpak van niet-standaard opgaven, de wiskundige problemen. Over die probleemaanpak moet in de les met de klas en in de groepjes veel worden gepraat. Leerlingen leren dat niet door alleen maar sommen te maken, waarbij het soms de vraag is of zij er iets van opsteken.
In de vorige paragrafen is al beargumenteerd waarom deze aanpak expliciet aandacht in de lessen nodig heeft.

Van exploreren naar redeneren/abstraheren
Vanouds is in de wiskunde en ook in de schoolwiskunde veel belang gehecht aan het leren logisch *redeneren* (bewijzen) met eigenschappen (stellingen). Met name in de algebra (formules, functies, vergelijkingen) wordt ook in de onderbouw de eerste stappen naar het *abstraheren* gezet. De grens met probleemoplossen is vaag. Hetzelfde geldt voor het *modelleren*, met aspecten als het *formule maken*, het *interpreteren* van een formule in termen van een context, enzovoort. Modelleren doet een beroep op zowel probleemoplossen als redeneren en abstraheren. In deze publicatie staan de meeste modelleervoorbeelden gerangschikt onder probleemoplossen. Het hoofdstuk over statistiek is doortrokken met allerlei aspecten van het modelleren.

4. Meetkunde

Oriëntatie

De vaak verrassende en concrete probleemstellingen in de meetkunde in de onderbouw bieden veel didactische mogelijkheden om leerlingen op elk niveau te boeien. Uiteindelijk gaat het om een beperkt aantal feiten (eigenschappen) en ligt het zwaartepunt bij het rekenen aan standaardopgaven en bij het oplossen van niet-standaard problemen. De meetkunde is bij uitstek het gebied waarin leerlingen kunnen leren logisch te redeneren met een keten aan stellingen (eigenschappen). Meetkundeonderwijs dat van het leren oplossen van problemen en leren redeneren niet systematisch werk maakt, leidt vaak tot leerresultaten met een grote spreiding. Leerlingen die proberen te memoriseren hoe het ook al weer moest, falen bij ieder variatie van de probleemstelling. Zelfs aan de examenresultaten bij meetkundige problemen (B-leerlingen!) is dat te zien.

Van exploreren naar structuur
Op basis van de opgedane ervaringen met concreet materiaal of *GeoGebra* kunnen leerlingen zelf het gebied van de meetkundige vormen *structureren* en opgespoorde eigenschappen *verwoorden.* In paragraaf 4.1 worden daar voorbeelden van gegeven. Het *overzicht* op die expliciet vastgelegde en gememoriseerde meetkundige eigenschappen (stellingen) met standaard toepassingen moet dan tot de *parate kennis en vaardigheden* gaan behoren.

Van kennis naar probleemoplossen
In paragraaf 4.2 gaat het vervolgens over de vraag hoe leerlingen kunnen leren die kennis te mobiliseren in de aanpak van niet-standaard opgaven, de meetkundige problemen. Over die probleemaanpak moet in de les met de klas en in de groepjes veel worden gepraat. Leerlingen leren dat niet door alleen maar sommen te maken.

Van exploreren naar redeneren/abstraheren
Vanouds is de meetkunde het gebied van de schoolwiskunde waarin het *redeneren* (bewijzen) met eigenschappen (stellingen) werd onderwezen. Hoe kunnen we daar in het meetkundeprogramma van de onderbouw nog inhoud aan geven? In paragraaf 4.3 staan enkele ontwerpen.

4.1 Van exploreren naar structuur

Toelichting

In de onderbouw leren leerlingen de namen en eigenschappen van meetkundige figuren. Lesmateriaal ontaardt dan al snel in het benoemen van de figuren en het vertellen wat de relevante eigenschappen zijn. Leerlingen moeten dat dan maar memoriseren en later ophoesten tijdens een toets, zonder dat hun denken over meetkundige vormen wordt gestimuleerd.
Meetkunde in de onderbouw geeft tal van aanknopingspunten voor een andere onderwijsstrategie, waarin leerlingen aan de hand van geschikte probleemstellingen worden uitgedaagd zelf de meetkunde te ordenen en eigenschappen op te sporen. Daarmee wordt ook gewerkt aan een *houding* van durf en vertrouwen op eigen kunnen. Het denken van de leerlingen wordt bevorderd door het zelfstandig exploreren van meetkundige vormen, mits een begeleiding met *gefaseerde hulp* het definitief vastlopen voorkomt. Vanaf de eerste lessen in leerjaar 1 kan op die manier worden gewerkt aan het ontwikkelen van een gewenste houding.

Oefeningen van exploreren naar structuur

Meetkundige figuren construeren

Het construeren van meetkundige figuren vereist nadenken over de vorm, die je wilt maken. Het denken verloopt heel anders als een figuur kant en klaar wordt aangeleverd.

Toelichting

In oefening 4.1.1.a komt na het combineren van drie lengten uit zes de reflectie. Wanneer lukt het wel en wanneer niet? En dan het ordenen naar vorm en tenslotte even op het spoor zetten van de (omgekeerde) stelling van Pythagoras. De volgende oefeningen sluiten hierbij aan en vragen zeker wat denkwerk over de aanpak. De gefaseerde hulp bestaat uit het advies eerst een schetsje (de analysefiguur) te maken en daarin de gegeven lengten en hoeken te tekenen. Een vorm van *doelanalyse.*

Parate vaardigheid

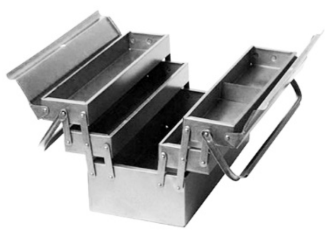
Geen voorkennis nodig.

Werkwijze

Heel geschikt om in kleine groepjes aan te werken en onderling de resultaten uit te wisselen.

Reflectie

Na oefening 4.1.1.a klassikaal inventariseren, namen als scherphoekig, rechthoekig, stomphoekig laten bedenken en die bij de figuren laten schrijven. En dan de uitdagende slotvraag, of je aan de kwadraten van de lengten ook kunt aflezen welke vorm een driehoek heeft! Aan de gereedschapskist *Weten dat* in het *opzoekboekje* wordt de naamgeving van de driehoeken toegevoegd, er is gewerkt aan de *Houding* (ik kan wiskunde doen) en er is gezocht naar een verband, een 'verklaring', *Weten waarom.*
De volgende opgaven lopen geleidelijk op in moeilijkheid, totdat alle leerlingen een aanpak met de analysefiguur nodig hebben!



Plaats in de leerjaren

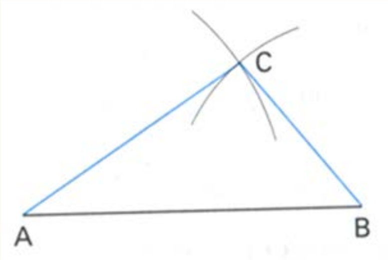
Aan het begin van de meetkunde in leerjaar 1 als de figuren aan de orde komen.

Relatie met schoolboeken

Oefening 4.1.1.a als *Instap* op driehoeken in hoofdstuk 3 Getal & Ruimte 1 hv deel 1 of in hoofdstuk 5 Moderne Wiskunde 1A hv.

Oefening 4.1.1.a *Driehoeken construeren*

Je kunt met een liniaal en een passer driehoeken tekenen (construeren), waarvan je de lengten van de zijden kent.
Teken bijvoorbeeld eerst AB met de goede lengte, cirkel dan de lengte van AC om met de passerpunt in A (zie het boogje) en dan vanuit B de lengte van BC. Waar de boogjes elkaar snijden ligt punt C.



a. Teken nu zoveel mogelijk driehoeken, waarvan de zijden de volgende lengten hebben. (Teken alleen driehoeken met ongelijke zijden.) Zet de lengten erbij in je tekening: 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm.
b. Je kunt niet bij elk drietal lengten een driehoek tekenen. Wanneer wel?
c. Je hebt driehoeken getekend met heel verschillende vormen. Hoe zou jij die in groepjes indelen?
d. Zet bij elke zijde ook het kwadraat van de lengte en vergelijk de drie kwadraten dan. Zoek een verband tussen die getallen en de vorm van de driehoek!

Oefening 4.1.1.b *Vierhoeken construeren*

a. Construeer met passer en liniaal een driehoek ABC met AB = 4 cm, BC = 3 cm en AC = 3 cm.

Met twee van deze driehoeken kun je twee verschillende vierhoeken maken.
b. Construeer met passer en liniaal deze vierhoeken.
Hint: Maak eerst een schetsje.
Weet je hoe ze heten?

Oefening 4.1.1.c *Een rechthoek construeren*

Een rechthoek wordt door zijn diagonalen in vier driehoeken verdeeld. Van een van deze driehoeken zijn alle zijden 4 cm.
Construeer de rechthoek met passer en liniaal. *Hint: Maak eerst een schetsje.*

Oefening 4.1.1.d *Een ruit construeren*

Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden.
Van een ruit zijn de zijden 3 cm en één diagonaal is 5 cm.
Construeer deze ruit met passer en liniaal.

Oefening 4.1.1.e *Een parallellogram construeren*

Een parallellogram is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden.
Van een parallellogram zijn de zijden 3 en 6 cm. Eén diagonaal heeft een lengte van 7 cm.
Construeer dit parallellogram met passer en liniaal.

Oefening 4.1.1.f   *Een zwaartelijn*

Van driehoek ABC is AC = 5 cm en AB = 14 cm. De lijn vanuit C naar het midden van AB snijdt AB in het punt M. (Zo'n lijn heet *zwaartelijn.)* AM = 6 cm.
Construeer driehoek ABC met passer en liniaal.

Schrijf je eigen voorbeelden met de vragen en uitwerking in een ***opzoekboekje****, zodat je het later, bijvoorbeeld voor een toets, nog eens kunt nakijken.*
Als je dat voor elk onderwerp goed bijhoudt, kun je op de duur al jouw wiskundig gereedschap in dat opzoekboekje terugvinden.
En bij wiskunde heb je vroeg of laat altijd weer iets nodig dat je 'vroeger' hebt geleerd.

Opdrachten van exploreren naar structuur

Meetkundige figuren onderzoeken
Een eerste kennismaking met meetkundige vormen en tegelijk een wiskundige denkactiviteit, namelijk het ordenen op basis van zelf bedachte kenmerken.

Opdracht 4.1.2.a   *Soort bij soort*

Overal om je heen zie je meetkundige vormen of figuren. Bepaalde vormen lijken veel op elkaar. Je kunt zeggen dat ze familie van elkaar zijn of tot dezelfde soort behoren. Op het werkblad* staan heel veel meetkundige figuren. Knip ze allemaal uit.

a. Je kunt ze bijvoorbeeld naar grootte indelen. Maak er drie groepen van. Kijk eens bij anderen en leg uit waarom je het zo hebt gedaan.
b. Bedenk zelf drie families van vormen en deel elke vorm van het werkblad in bij een familie. Schrijf op waarom je de vormen zo hebt ingedeeld.
c. Er zijn verschillen binnen elke familie. Maak daar weer groepjes van en leg uit waarom die vormen bij elkaar horen. Waarin verschillen ze?
d. De vormen K, F en J heten *ruiten*. Vorm J is de kleinste, vorm K is twee keer zo groot en vorm F is drie keer zo groot. Zoek bij elk groepje van dezelfde vorm de kleinste en schrijf op met welk getal je die moet vermenigvuldigen om de beide anderen te krijgen.

* werkblad: zie volgende pagina

Toelichting
In wiskunde A gaat het vaak om het ordenen van veel gegevens; hier is het nog concreter. Vooraf wordt de leerlingen geen (wiskundig) criterium opgelegd, want ze moeten zelf gaan bedenken waarom ze de figuren zo hebben ingedeeld.

Parate vaardigheid
Geen voorkennis nodig.

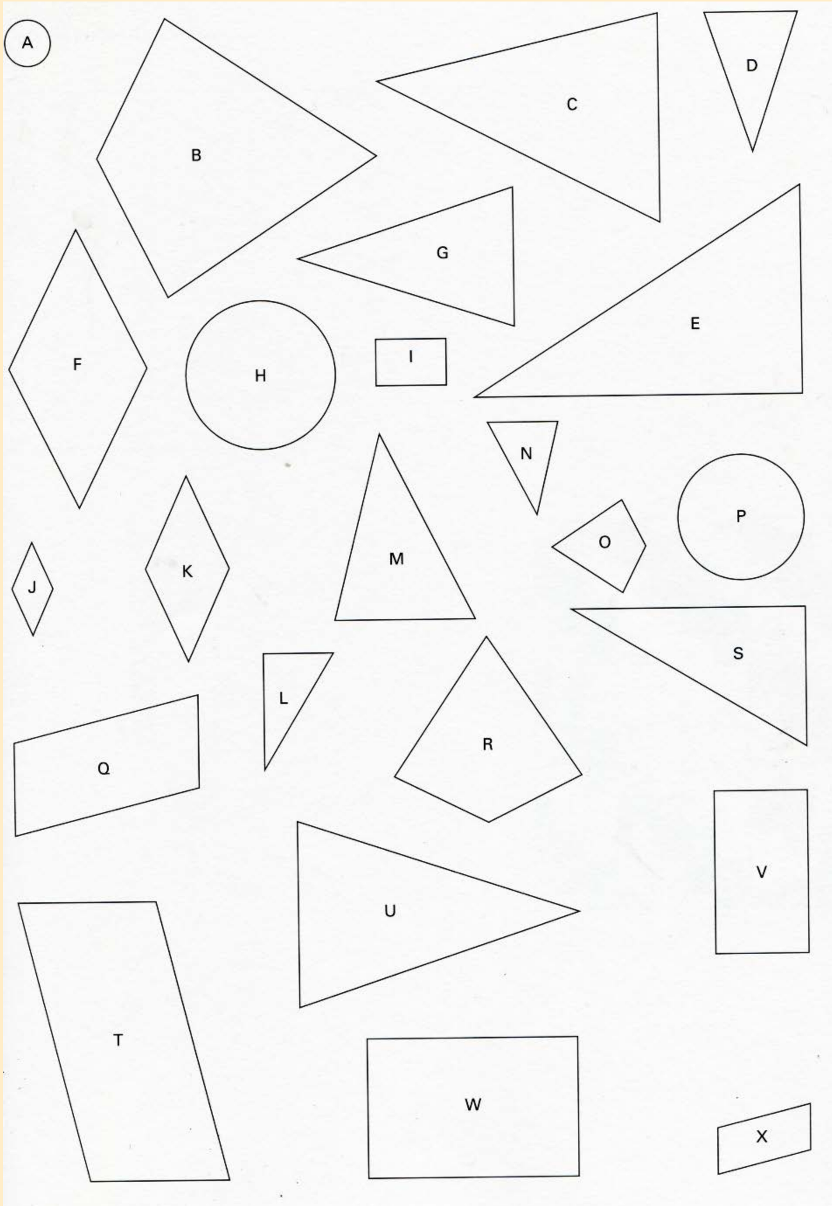
Werkwijze
Heel geschikt om in kleine groepjes aan te werken en onderling de resultaten uit te wisselen.

Reflectie
Op het digibord kunt u allicht de figuren maken (*GeoGebra*) en verschuiven of met een powerpointpresentatie weergeven tot de groepjes die de leerlingen hebben gemaakt. Essentieel is het doorvragen naar het waarom en het laten verwoorden tot een sluitende argumentatie. In deze opdracht ervaren de leerlingen dat zij zelf wiskundig bezig kunnen zijn, *Houding*, en dat zij zelf een redenering moeten leveren, *Weten waarom.*
U kunt vragen of leerlingen namen van de verschillende figuren kennen en die op de uitgeknipte figuren laten schrijven. Het is allicht nog wat vroeg om daar nu al *Weten dat*, voor de gereedschapskist van te maken. Dat hangt mede af van het vervolg in het leerboek. Zie opdracht 4.1.2.b.

Plaats in de leerjaren
Leerjaar 1, het begin van de meetkunde.

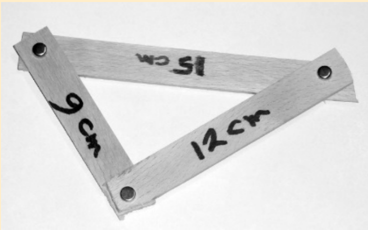
Relatie met schoolboeken
Voorafgaand aan de eerste meetkundehoofdstukken van leerjaar 1.

Werkblad bij opdracht 4.1.2.a



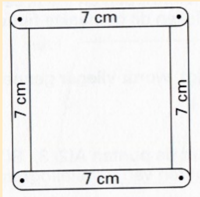
Opdracht 4.1.2.b *Bijzondere vierhoeken*

Met materiaal (hout, karton, plastic) kun je meetkundige figuren maken en ontdekken welke eigenschappen die hebben.

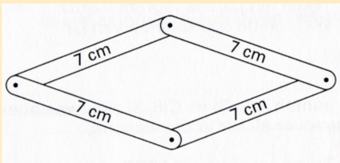


We noemen eerst nog eens de namen van bijzondere vierhoeken.

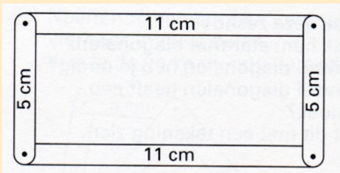
Vierkant
Een vierhoek met vier gelijke zijden en vier gelijke (rechte) hoeken heet een *vierkant*.



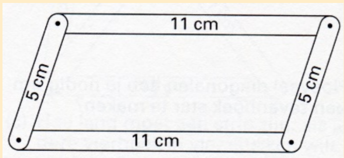
Ruit
Een vierkant kun je vervormen, terwijl de lengten van de zijden wel gelijk blijven.
Een vierhoek met gelijke zijden heet een *ruit.*
(Een vierkant is dus ook een ruit!)



Rechthoek
Een vierhoek met vier rechte hoeken heet een *rechthoek.* (Een vierkant is dus ook een rechthoek!)
De lengten van de zijden, die tegenover elkaar liggen zijn gelijk.



Parallellogram
Een rechthoek kun je vervormen, waarbij de lengten van de zijden gelijk blijven en de zijden ook twee aan twee evenwijdig blijven. De *overstaande zijden* lopen *parallel.*
Een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden heet een *parallellogram*. (Een vierkant, een ruit en een rechthoek zijn dus ook parallellogrammen.)



Vlieger
Met zijden van dezelfde lengten als hiervoor kun je ook een heel andere figuur maken, een *vlieger.* Een vierhoek waarvan twee aan twee *aangrenzende zijden* even lang zijn heet een *vlieger.*

a. Maak voor elk van deze vijf soorten vierhoeken een grote tekening en schrijf ernaast wat je kunt ontdekken over de eigenschappen van de zijden en de hoeken.
b. Zoek ook de assen van symmetrie, de spiegelassen. (Je kunt een figuur zo vouwen langs een spiegelas dat beide delen precies op elkaar passen.)
c. Teken nu ook de diagonalen in elke vierhoek. Wat kun je zeggen over de lengten van de diagonalen en de hoeken die ze met elkaar maken?

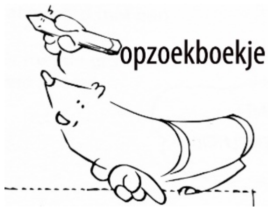
Schrijf je eigen voorbeelden met de vragen en uitwerking in een ***opzoekboekje****, zodat je het later, bijvoorbeeld voor een toets, nog eens kunt nakijken.*
Als je dat voor elk onderwerp goed bijhoudt, kun je op de duur al jouw wiskundig gereedschap in dat opzoekboekje terugvinden.
En bij wiskunde heb je vroeg of laat altijd weer iets nodig dat je "vroeger" hebt geleerd.

Toelichting
In deze opdracht wordt gewerkt aan het systematisch opsporen van de eigenschappen van bijzondere vierhoeken waar ze al eerder kennis mee hebben gemaakt. Het helpt leerlingen als u in uw leslokaal een bak hebt met strips of iets dergelijks, zodat ze echt met de handen figuren kunnen maken en vervormen om na te gaan welke eigenschappen blijven gelden bij vervorming en welke niet. Als wiskundesectie kunt u allicht zoiets laten aanschaffen of laten maken. (Hetzelfde geldt overigens ook voor spiegeltjes.)

Parate vaardigheid
Leerlingen weten al wat evenwijdig is, ze hebben al eens gespiegeld en/of met spiegelsymmetrie gewerkt en kennen in principe de meetkundige figuren met hun 'definitie'.

Werkwijze
Heel geschikt om in kleine groepjes aan te werken en onderling de resultaten uit te wisselen.

Reflectie
Op het digibord kunt u allicht de figuren weergeven en samen in tabelvorm een overzicht laten maken van eigenschappen. Dit is dan het goede moment om de gereedschapskist, *Weten dat*, aan te vullen met die tabel van eigenschappen.
Voor de meetkunde is aan het einde van leerjaar 1 het "opzoekboekje" met het wiskundig gereedschap al aardig gevuld. Allicht staan er nu ook al wat elementen van *Weten hoe*, en *Weten waarom* in.
En u kunt zelf vragen om eens in dat 'opzoekboekje' op te schrijven wat zij moeilijk vinden aan meetkunde en hoe zij een meetkundige opgave aanpakken.



Een mogelijke uitbreiding van deze *Oefening* is dat u leerlingen de opdracht geeft om voor elke figuur eerst de diagonalen AC en BD te tekenen en te bedenken of dat klopt. Daarna de figuur afmaken en onderzoeken of het inderdaad klopt. Aansluitend kan de tabel worden uitgebreid met de eigenschappen van de diagonalen.

Plaats in de leerjaren
Leerjaar 1, tegen het einde van de meetkunde.

Relatie met schoolboeken
Voorafgaand aan hoofdstuk 11 Moderne Wiskunde 1B hv of hoofdstuk 7 Getal & Ruimte 1 hv deel 2.

Oppervlakte en omtrek

Toelichting
Deze opgaven hebben allemaal tot doel om het beeld dat leerlingen hebben van omtrek en oppervlakte te verhelderen. Vaak is alleen maar iets als 'lengte keer breedte' blijven hangen. Concreet materiaal, een soort practicum, is natuurlijk het beste, maar dan moet het boek dicht. Daarna komen pas de oppervlakteformules.

Parate vaardigheid
Niets specifiek.

Werkwijze
In groepjes.

Reflectie
Inventariseren wat ze hebben gedaan en geleerd.

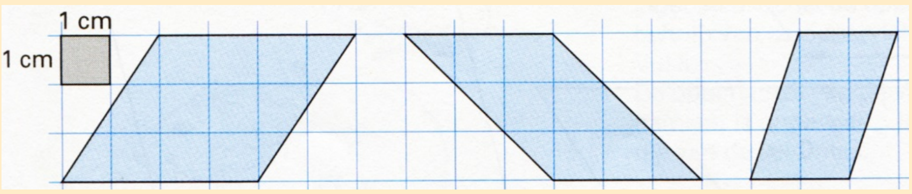
Plaats in de leerjaren
Leerjaar 1, voordat de sommen uit het boek komen.

Relatie met schoolboeken
Voorafgaand aan hoofdstuk 9 Getal & Ruimte 1 hv deel 2.
Voorafgaand aan hoofdstuk 11 Moderne Wiskunde 1B hv.

Opdracht 4.1.2.c *Oppervlakte van meetkundige figuren*

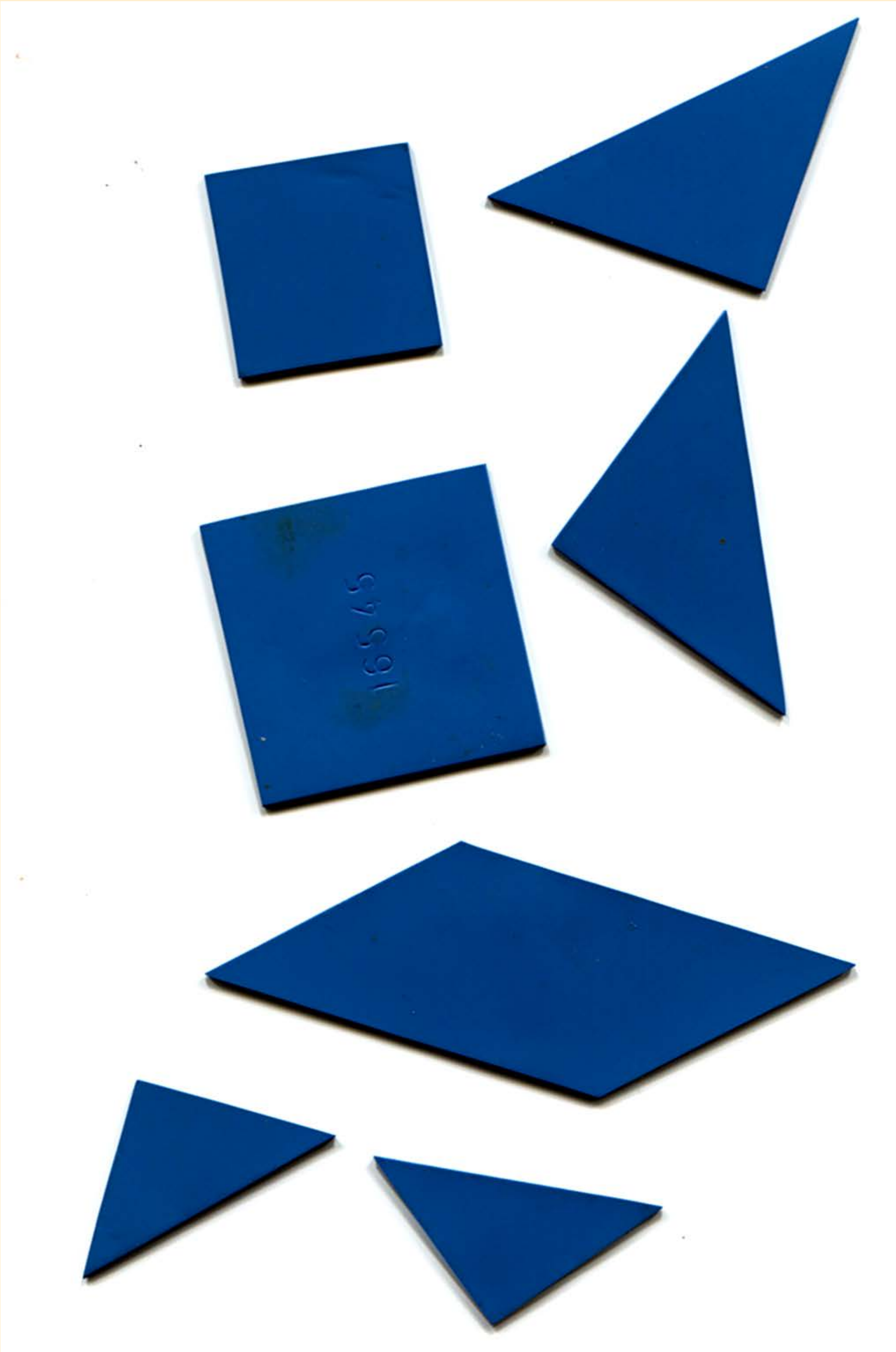
Op het werkblad* zie je 7 meetkundige figuren.
Knip ze uit. Samen kunnen ze één groot vierkant vormen.
Probeer dat maar eens te maken.

a. Het kleinste vierkant heeft een oppervlakte van 10 cm^2.
Zoek nu uit wat de oppervlakte is van alle andere figuren.
b. De oppervlakte van het grootste vierkant is tweemaal de oppervlakte van het kleinste vierkant. Zijn de zijden nu ook twee keer zo lang?
c. Leg van het parallellogram en de twee grote driehoeken één groot parallellogram.
Maak daar nu een rechthoek van met dezelfde oppervlakte.
d. Bedenk hoe je van de volgende parallellogrammen rechthoeken kunt maken.
Bereken zo de oppervlakte van de parallellogrammen.



* werkblad: zie volgende pagina

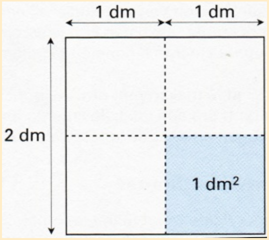
Werkblad bij *Opdracht 4.1.2.c*



Opdracht 4.1.2.d Op en Om

Veel mensen halen oppervlakte en omtrek door elkaar.
Oppervlakte heeft altijd te maken met **op**, je legt **op** de vloer 12 vierkante meter laminaat.
Omtrek heeft altijd te maken met **om**, je loopt het sportveld **om**.
Daar gaat het in deze opgave over.

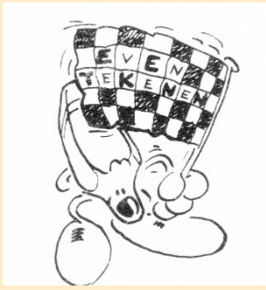
Straatsma heeft een partij oude tegels op de kop getikt, die hij bij zijn volkstuintje wil leggen. Ze hebben een vierkante vorm. De afmetingen zijn 2 dm bij 2 dm.



a. Straatsma legt een pad in zijn volkstuin van 18 bij 2 stoeptegels. Om het hele pad heen legt hij een stoeprand met stukken van 4 dm lengte en 5 cm breedte.
Hoeveel dm stoeprand heeft hij nodig?
Wat is de totale oppervlakte van zijn pad?

b. Zijn pad gaat naar een vierkant terrasje met een oppervlakte van 784 dm^2.
Hoeveel stoeptegels heeft hij nodig voor zijn terras?
Met hoeveel kantstukken van 4 dm lengte kan hij de rand van het terras maken?

c. Straatsma heeft nog 12 kantstukken van 4 dm lengte over.
Tegen de schuur (breedte 4 m) wil hij met de kantstukken aan de drie andere zijden een rechthoekig aardbeienbed begrenzen.
Hoe moet hij die kantstukken leggen om een zo groot mogelijk aardbeienbed te krijgen?



Opdracht 4.1.2.e *In een rij of op een plein*

Op het Museumplein in Amsterdam verzamelden zich in 2016 een half miljoen mensen om feest te vieren tijdens de Uitmarkt. Als je die massa op een rij zet, hoe lang is die rij wel niet? Hoe groot moet een plein wel niet zijn als je alle Chinezen daar wilt plaatsen?

a. Een goede probleemaanpak is om klein te beginnen. Zoek eens uit hoe lang een rij van 10 mensen ongeveer is. Ga met z'n tienen op het schoolplein achter elkaar staan. (Een normale stoeptegel is 30 cm bij 30 cm.)

b. Reken nu verder met jullie antwoord van a. Hoe lang wordt een rij van 100 mensen? En van 100 000 mensen? Hoeveel km is jouw rij van 500 000 mensen?

c. Neem nu een rechthoekig plein in gedachten met stoeptegels van 30 cm bij 30 cm. Zoek uit hoeveel tegels 10 mensen nodig hebben om bij elkaar te staan?

d. Reken verder met je schatting uit vraag c. Op hoeveel tegels plaats jij een half miljoen mensen? Wat zijn de lengte en breedte in meters van een rechthoekig plein waar dat half miljoen mensen kan staan?

e. Naar schatting zijn er op dit moment 1400 miljoen Chinezen. Hoe groot is het plein waar al die Chinezen kunnen staan?

Schrijf in je opzoekboekje op wat je allemaal weet over oppervlakte en omtrek.

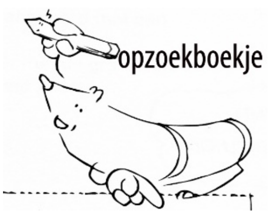
Bedenk zelf enkele voorbeelden over hoe je het berekent.

4.2 Van kennis naar probleemoplossen

Meetkundige problemen

Oriëntatie

De volgende *Oefeningen* en *Opdrachten* zijn bijna allemaal bedoeld voor leerlingen in leerjaar 3 havo-vwo en deels zijn ze ontleend aan schoolboeken. Leerlingen hebben de leerstof voorbij zien komen, maar het is de vraag of hun kennis *operationeel geordend* is. Dat is een andere ordening dan de volgorde waarin de diverse onderwerpen in leerjaar 2 en 3 worden aangeboden. In de interactie tussen leraar en leerlingen zal het terugkijken op al die meetkunde in de loop van deze leerjaren zoiets als het volgende moeten opleveren.



En die operationele kennis kan in het opzoekboekje worden opgeschreven, voordat echte meetkundige problemen met succes kunnen worden aangepakt.

Hoeken berekenen met:

- hoekensom in driehoeken
- overstaande hoeken
- F- en Z-hoeken
- gelijkbenige driehoeken
- verhoudingen met vermenigvuldigingsfactor
- bekende sinus / cosinus/tangens
- ....

Lengten berekenen met:

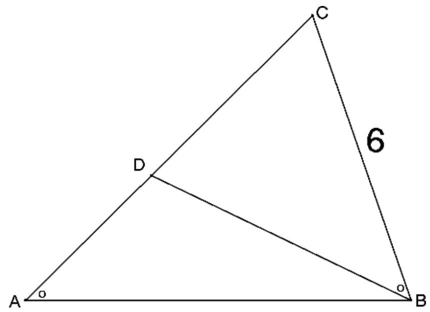
- gelijkbenige driehoeken
- Pythagoras in rechthoekige driehoeken
- sinus/cosinus in eenheidsdriehoek
- ....

In de schoolboeken ontbreken eveneens de meer speciale heuristische methoden over de manier waarop je een meetkundige berekening opzet en uitvoert. Hier volgen twee voorbeelden. Beide werkwijzen horen eigenlijk in de desbetreffende hoofdstukken worden gekoppeld aan de bespreking van respectievelijk gelijkvormigheid en goniometrie. Is dat toen niet gebeurd, dan moeten deze voorbeelden eerst worden besproken. Je mag niet verwachten dat leerlingen zo'n gestructureerde aanpak uit zichzelf ontdekken.
Daarom nu eerst twee voorbeelden om in de klas te bespreken.

Voorbeeld.
Berekening met gelijkvormigheid.
Bekijk de figuur:

De hoeken *BAD* en *CBD* zijn gelijk
BC = 6 en *AC* = 8

Bereken de lengte van *DC.*



Als je hebt uitgezocht welke twee driehoeken gelijkvormig zijn, dan *teken je ze in dezelfde stand naast elkaar.*

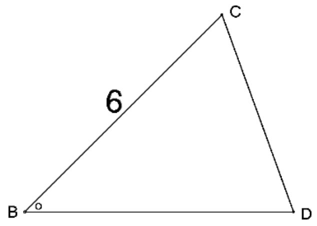
En je ziet:

$\Delta ABC = \frac{8}{6} \times \Delta BDC$ of

$\frac{6}{8} \times \Delta ABC = \Delta BDC$

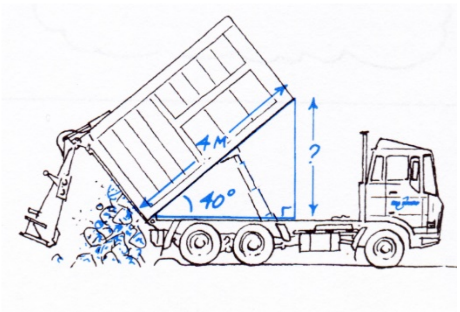
$\frac{6}{8} \times BC = CD$

$\frac{6}{8} \times 6 = CD$

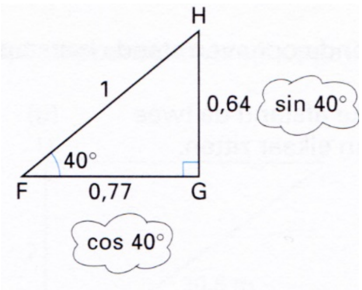


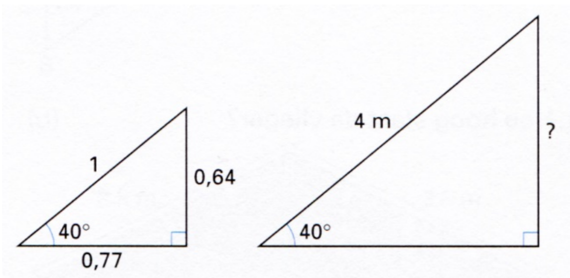
Voorbeeld
Berekening met goniometrie

De bak van een vuilniswagen is 4 m lang. De bodem van de bak maakt een hoek van 400 met het chassis. Het hoogste punt van de bodem boven het chassis bereken je als volgt.



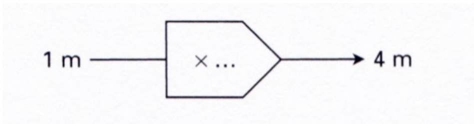
Teken de eenheidsdriehoek in deze stand.



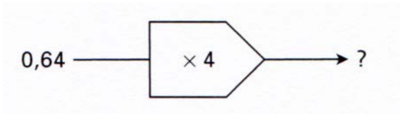


Teken de rechthoekige driehoek uit de opgave ernaast.

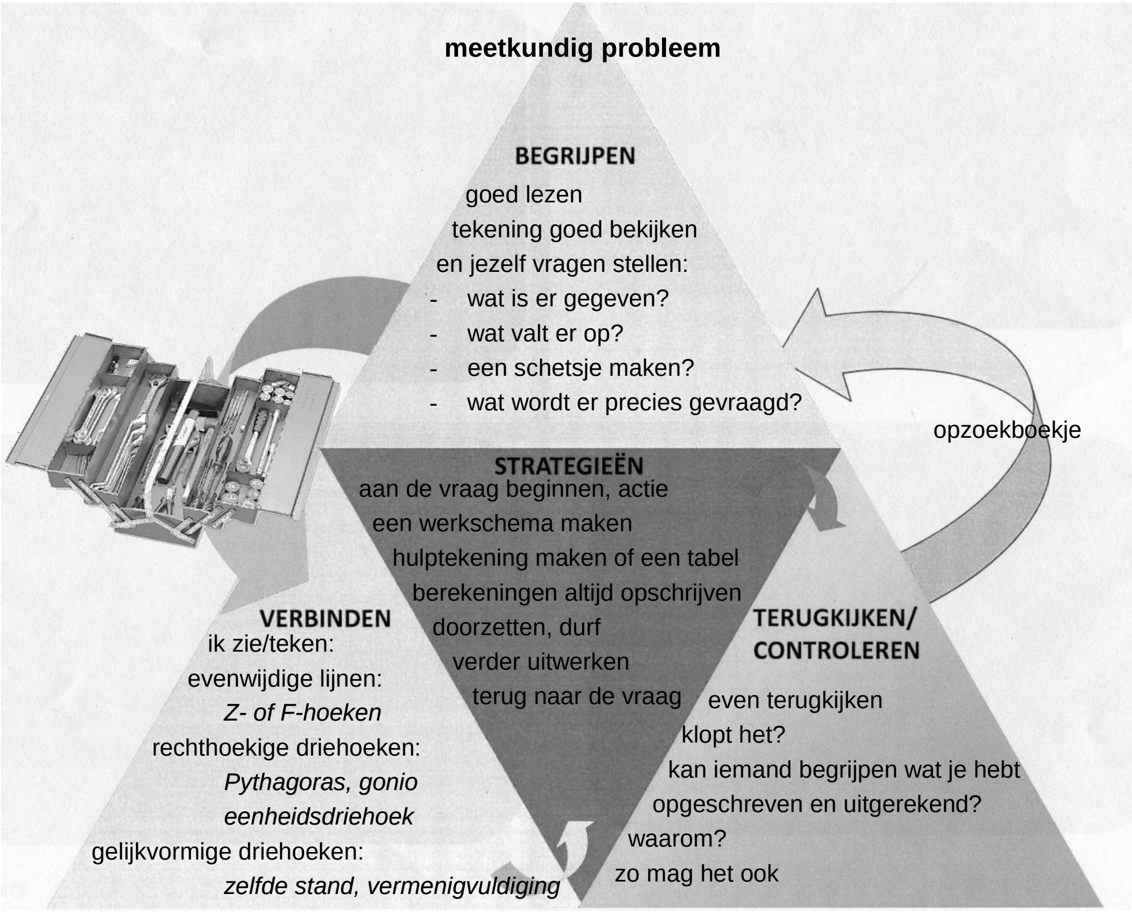
Bereken de vermenigvuldigingsfactor.



Gebruik de vermenigvuldigingsfactor voor het berekenen van de gevraagde lengte.



In de vorm van de eerder besproken META-kaart wordt het overzicht voor de aanpak van een meetkundig probleem dan als volgt.



Oefeningen van kennis naar probleemoplossen

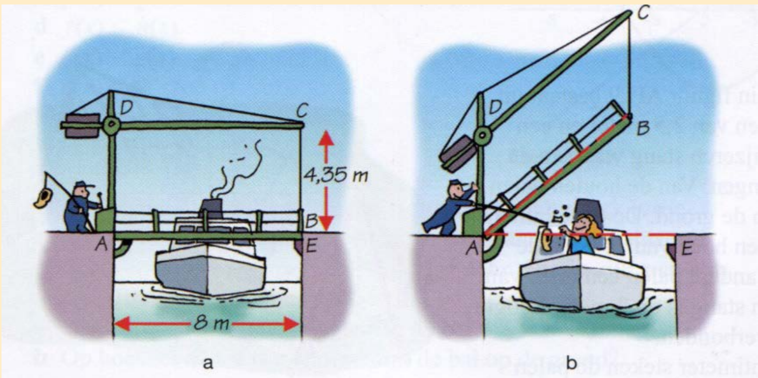
De goniometrie is een aparte eend in de bijt van de meetkunde in de onderbouw. Veel leerlingen slagen er niet in een berekening tot een goed einde te brengen. We bekijken enkele opgaven uit de schoolboeken en kiezen voor de (heuristische) strategie om met de eenheidsdriehoek en de vermenigvuldigingsfactor *k* te rekenen. De overeenkomst in de berekeningen met gelijkvormigheid is te zien in de *Opdrachten.* Weer een stap in het versterken van de onderliggende structuur van de meetkunde. (Deze benadering van de goniometrie sluit ook prima aan bij het gebruik in de natuurkunde en bij de bovenbouw met de eenheidscirkel.)

Vergeleken met de META-kaart voor Goniometrie uit het onderzoeksproject is de aanpak op de vorige bladzijde breder. Als het over opgaven gaat binnen het goniometriehoofdstuk kan het vorige schema veel specifieker alleen over goniometrie gaan, maar dan verlies je tegelijk het algemene karakter in het geval van gemengde problemen. Leerlingen gaan dan steunen op de herinnering op korte termijn, vaak goed genoeg om tijdens de toets opgaven op *herinnering* te maken. Dus reproductie. Een groot deel van de leerlingen heeft dan ook geen behoefte aan een meer gestructureerde aanpak, want ze lossen het op korte termijn (!) wel op met directe herkenning.

De volgende *Oefeningen* gaan alleen over de goniometrie uit de schoolboeken, mede om te laten zien dat de aanpak met de eenheidsdriehoek inzichtelijker is dan de traditionele benadering met verhoudingen.

Oefening 4.2.1.a *De ophaalbrug*

Getal & Ruimte 3 vwo deel 2 AH-6



In de tekening zie je eerst een gesloten ophaalbrug en daarnaast staat de brug gedeeltelijk open. Hoek BAE heet de ophaalhoek.

a. Bereken de hoogte van het punt C in centimeters nauwkeurig bij een ophaalhoek van 32^0.

b. Het punt C bevindt zich op een hoogte van 11,45 meter.
Bereken de bijbehorende ophaalhoek.

Gefaseerde hulp *Probleemaanpak*

a.

- *Wat weet je van die driehoek met zijde AB?*

- *OK, wat is nu de hoogte van B in die driehoek?*

- *Waarmee vermenigvuldig je de eenheidsdriehoek om deze driehoek te krijgen?*

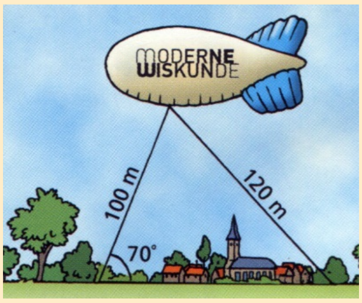
- *Ja, de hoogte van B is 8 sin 32^0 en BC is bekend.*

b.
Ja, dit is nu simpel.
Je weet de hoogte van B en dus de sinus en dus ook de hoek.

Oefening 4.2.1.b *De ballon*

Moderne Wiskunde 3B vwo 8-T-8.

Bij windstil weer wordt een reclameballon opgelaten. De ballon is met twee kabels aan de grond vastgemaakt. De ene kabel is 100 meter lang en de andere kabel is 120 meter lang. De kabel van 100 meter maakt een hoek van 70^0 met de grond.



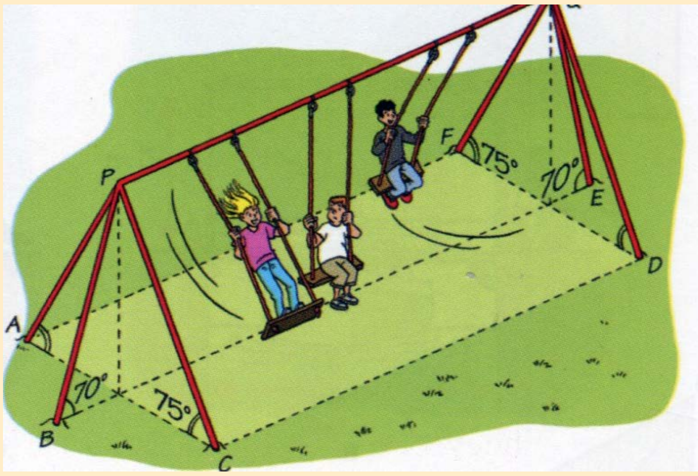
a. Bereken hoeveel meter boven de grond de ballon zweeft.
b. Hoe groot is de hoek die de twee kabels maken?

Gefaseerde hulp *Probleemaanpak*

- *Wat zou je willen gebruiken?* *Een tekening maken*
  Zo kan ik er niets mee.
- *Zoek maar in je gereedschapskist.* *Met gonio? Aha!*
- *Waarmee kun je lengten berekenen?* *Rechthoekige driehoeken maken.*
  Loodlijn trekken.
  Eenheidsdriehoekje tekenen.
- *Mooi, de hoogte heb je nu, 100·sin 70^0.*
- *Hoe nu verder?* *Die hoogtelijn maakt er twee hoeken van.*
  De linkerhoek is 20^0.
  En van de rechterhoek weet ik de cosinus.
  Eenheidsdriehoekje tekenen.

Oefening 4.2.1.c *De schommel*

Getal & Ruimte 3 vwo deel 2 AH-9

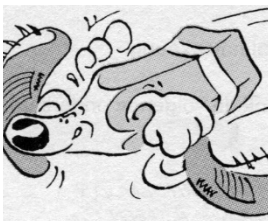


De schommel in de tekening bestaat uit zes houten palen van 2,5 meter en een 6 meter lange ijzeren stang waaraan de schommels hangen. Van de houten palen zit een gedeelte in de grond. De twee buitenste palen maken een hoek van 70^0 met de grond, de vier andere palen een hoek van 75^0. De ijzeren stang is op 2 meter hoogte met de palen verbonden.

a. Hoeveel centimeter steken de palen in de grond?
b. De rechthoek ACDF wordt van een rubberen mat voorzien die € 45,- per m^2 kost. Bereken de prijs van de mat.

De schommel in de tekening bestaat uit zes houten palen van 2,5 meter en een 6 meter lange ijzeren stang waaraan de schommels hangen. Van de houten palen zit een gedeelte in de grond. De twee buitenste palen maken een hoek van 70^0 met de grond, de vier andere palen een hoek van 75^0. De ijzeren stang is op 2 meter hoogte met de palen verbonden.
c. Hoeveel centimeter steken de palen in de grond?
d. De rechthoek ACDF wordt van een rubberen mat voorzien die € 45,- per m^2 kost. Bereken de prijs van de mat.

Gefaseerde hulp



- *Lees het verhaaltje nog eens goed.*
- *Heb je alle gegevens gebruikt?*

Probleemaanpak

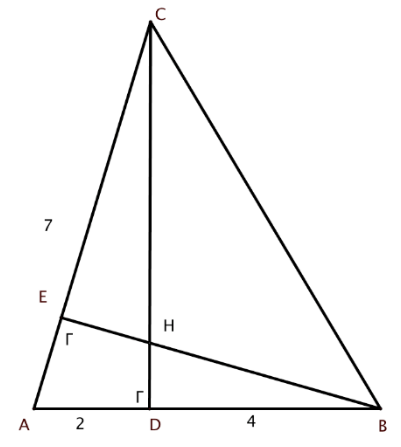
Ik heb driehoek ACF getekend en de gegevens uit de tekening overgenomen. De paallengte noem ik p*.*
Wat nu? Geen idee!

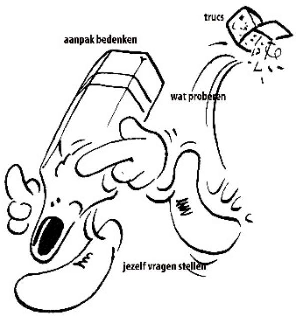
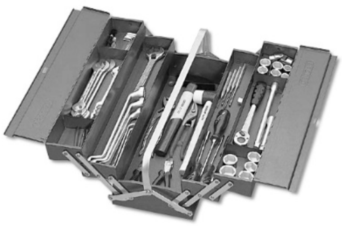
Nee, de hoogte is wel bekend, 2 meter.
En dan is $2 = p \cdot \sin 75^0$*, enzovoort.*

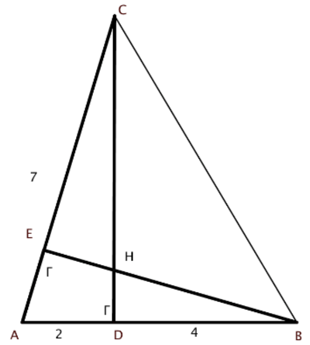
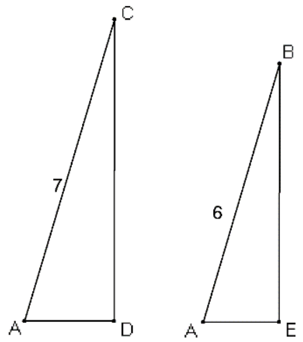
Opdrachten van kennis naar probleemoplossen

Opdracht 4.2.2.a *Hoogtelijnen*

In Δ ABC zijn CD en BE hoogtelijnen.
AC=7, AD=2 en BD=4.
Bereken AE in één decimaal nauwkeurig.



Uitwerking	Aanpak / gefaseerde hulp	opgeroepen beschikbare kennis
		
	Zelf een tekening maken 	
	Vragen stellen aan het probleem	de stelling van Pythagoras
	Rechte hoeken, dus iets met de stelling van Pythagoras?	AE zit in Δ ABE, met een rechte hoek bij E en AB = 6, dat schiet niet op.
	Wat hebben we nog meer? gelijkvormige driehoeken	gelijkvormige driehoeken

	de hoek A *zit ook in* Δ ADC *driehoeken even inkleuren*  	
	- *Δ ADC is ook rechthoekig en heeft met Δ ABE dezelfde hoek bij A.* - *nu de driehoeken in dezelfde stand tekenen.* - *even de vergrotingsfactor uitrekenen en daarmee AE berekenen.*	
Δ AEB = $k \cdot \Delta$ ADC AB = $k \cdot$ AC 6 = $k \cdot 7$, dus $k = \frac{6}{7}$ Dan is AE = $\frac{6}{7} \cdot 2 \approx 1,7$		

Toelichting
Veel leerlingen in 3 havo, voor wie deze opgave is bestemd, zullen aanvankelijk geen idee hebben hoe ze dit probleem moeten aanpakken, tenzij ze dat al vaak hebben gedaan. Ook al beschikken zij over de kennis over gelijkvormige driehoeken, dan nog kunnen ze die niet adequaat inzetten.
Zit een leerling vast dan is *gefaseerde hulp*, uit de kolom "Aanpak" op zijn plaats. Het leerdoel is natuurlijk dat leerlingen zichzelf die vragen gaan stellen. Er is altijd sprake van het heen en weer switchen tussen de gegeven situatie en het selecteren uit de kennis die je al hebt.

Parate vaardigheid
Het identificeren van gelijkvormige driehoeken en het (handig) rekenen met de verhoudingen. Het tekenen van de gelijkvormige driehoeken in gelijke stand zou standaard tot het onderwezen gereedschap moeten horen.

Werkwijze
Iedereen voor zich, individueel of in tweetallen, want iedereen moet de aanpak leren. Een oplossingsgerichte tip, "kijk je moet die twee driehoeken nemen", betekent dat er niets meer kan worden geleerd!

Reflectie
Er zullen ook leerlingen zijn die direct "zien" hoe ze AE moeten uitrekenen. Die leren er geen betere aanpak van en hebben daarom een moeilijker probleem nodig. U kunt hen als toegift, als de anderen nog worstelen met het probleem, vragen om de oppervlakte van vierhoek ADHE te berekenen.

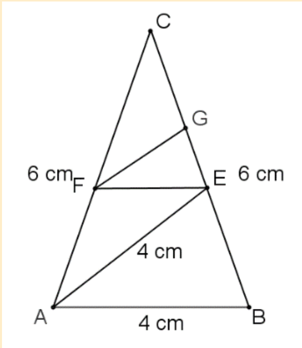
Plaats in de leerjaren
Halverwege 3 havo, maar 3 vwo zal er ook nog wel moeite mee hebben.

Relatie met schoolboeken
Dit is opgave 22 uit de Algemene herhaling van 3 havo deel 1, G&R.

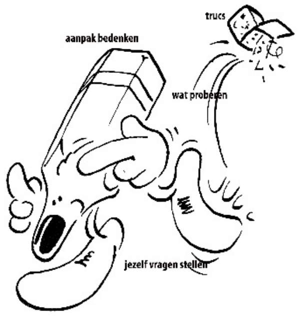
Opdracht 4.2.2.b *Allemaal gelijkbenige driehoeken*

In deze figuur is EF//AB en FG//AE.
AB=AE=4 cm, AC=BC=6 cm.

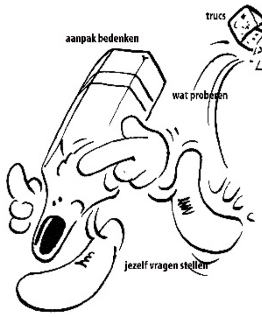
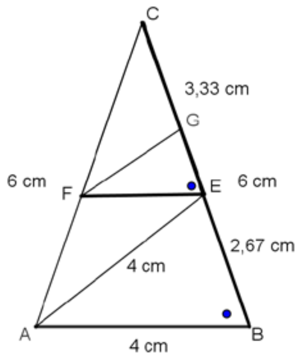
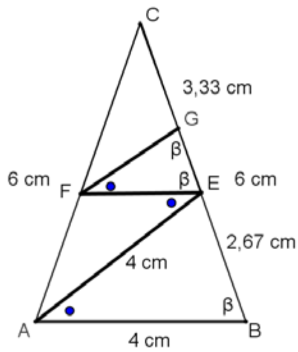
a. Waarom is Δ ABC gelijkvormig met Δ ABE?
b. Bereken achtereenvolgens de lengte van BE, EF en EG in twee decimalen nauwkeurig.
c. Leg uit waarom je rekenstappen correct zijn.



a.

Uitwerking	Aanpak / gefaseerde hulp	opgeroepen beschikbare kennis
		
	Zelf een tekening maken 	
	Vragen stellen aan het probleem	
	Allemaal gelijkbenige driehoeken en evenwijdige lijnen, F- en Z-hoeken?	In Δ ABE is de hoek bij B gelijk aan de hoek bij E
	Oh ja, Δ ABE en Δ ABC hebben de basishoeken gelijk, dus zijn ze gelijkvormig	Driehoeken zijn gelijkvormig als de hoeken twee aan twee gelijk zijn
Δ ABE en Δ ABC zijn gelijkvormig want gelijke basishoeken $\angle$ABC = $\angle$ABE en $\angle$BAC = $\angle$AEB	*Even kijken, de factor k waarmee ik Δ ABC moet vermenigvuldigen om Δ ABE te krijgen is $\frac{2}{3}$ (6 cm wordt 4 cm) en BE is $\frac{8}{3}$ of ongeveer 2,67 cm.*	Rekenen met gelijkvormige figuren doe je door eerst de vermenigvuldigingsfactor te berekenen

b.

Uitwerking	Aanpak / gefaseerde hulp	Beschikbare kennis
		
	Wat weten we over FE? *FE is de zijde van wel drie driehoeken.* *Het zal wel met Δ FEC en Δ ABC moeten, want dat lijkt op andere opgaven, die we hebben gehad.*	
Δ FEC en Δ ABC zijn gelijkvormig dus $k \cdot \Delta FEC = \Delta ABC$ met $k \cdot CE = CB$ of $k \cdot 3{,}33 = 6$ en dus $k = 1{,}8$. Dat geeft $1{,}8 \cdot EF = 4$ en $EF = 2{,}22$.	*Eerst maar eens alles intekenen wat we weten in deze figuur.* 	$\angle FEC = \angle ABC$ (F-hoeken bij evenwijdige lijnen) $\angle ACB$ hebben ze gelijk
Δ EFG is gelijkvormig met Δ BAE, want $\angle GFE = \angle EAB$ (Z-hoeken) en $\angle FEG = \angle ABE$ (F-hoeken). $k \cdot \Delta FEG = \Delta ABE$ $k \cdot FE = AB$ $k \cdot 2{,}22 = 4$ $k = 1{,}8$. Dat geeft $1{,}8 \cdot EG = 2{,}67$ en $EG = 1{,}48$.	*Vragen stellen aan het probleem* *Nu EG nog.* *Die zit alleen in Δ EFG.* *Waarmee is Δ EFG nu gelijkvormig?* *Even inkleuren.* *Evenwijdige lijnen gebruiken?*  *Δ EFG is scherphoekig, het zal wel Δ ABE moeten zijn.*	F-hoeken en Z-hoeken

Wel een heel gedoe. Had het niet eenvoudiger gekund met al die gelijkbenige en gelijkvormige driehoeken?

Toelichting

Voor veel leerlingen in 3 vwo en 3 havo is dit zeker een probleem, waar ze niet direct een oplossingsweg bij zien. De gefaseerde hulp moet weer op de aanpak gericht zijn. Van *exploreren* is door de gesloten vraagstelling geen sprake, terwijl het probleem wat wordt versimpeld door eerst vraag a te stellen en de volgorde van de rekenpartijen voor te zeggen.
Door de vragen a en b weg te laten en alleen te vragen naar het berekenen van de oppervlakte van alle driehoeken wordt deze opgave al meer open en zeker uitdagender.

Parate vaardigheid
Het identificeren van gelijkvormige driehoeken, het (handig) rekenen met de verhoudingen, de gelijkheid van F-hoeken en Z-hoeken bij evenwijdige lijnen.

Werkwijze
Iedereen voor zich, individueel, want iedereen moet de aanpak leren. Bij de meest open vraagstelling "*bereken de oppervlakte van alle driehoekjes"* is samenwerken in groepjes allicht bevorderlijk voor de voortgang.

Reflectie
Het is de moeite waard om ervaring op te doen met de verschillende voorgestelde varianten van deze opgave. Wat helpt leerlingen om beter zelf een probleem op te lossen?

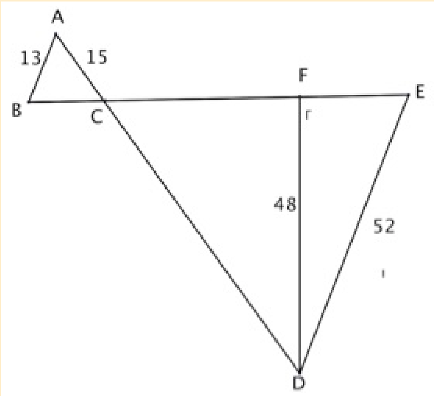
Plaats in de leerjaren
Halverwege 3 vwo (3 havo).

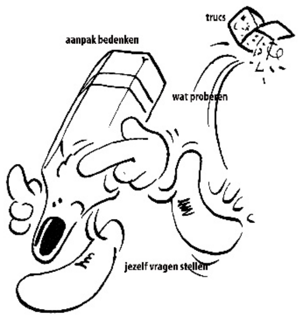
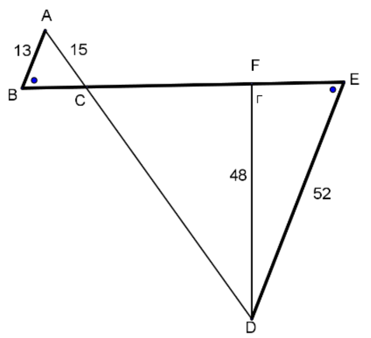
Relatie met schoolboeken
Dit is opgave 12 uit de Algemene herhaling, G&R 3 vwo deel 1.

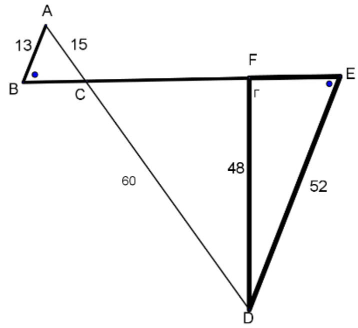
Opdracht 4.2.2.c *Omtrek en oppervlakte*

In de tekening is AB//DE en DF⊥CE.

Wat is de omtrek van Δ ABC en van Δ CDE?
En de oppervlakte?
Leg uit hoe je je antwoorden hebt gevonden.
Beredeneer *waarom* jouw rekenstappen correct zijn.



Uitwerking	Aanpak / gefaseerde hulp	opgeroepen beschikbare kennis
		
	Zelf een tekening maken 	
	Vragen stellen aan het probleem	
	Wat stelt dit voor? Wat is dit? Herken je iets? *Waar lijkt dit op? Waar denk je aan?* *Wat weet je te vertellen over ....* *Die rechte hoek zal wel met de stelling van Pythagoras te maken hebben en die driehoeken lijken wel gelijkvormig.*	
AB//DE ⇒ $\angle B = \angle E$ (Z-hoeken) CD = 4 · AC CD= 60 Δ CDE = 4 · Δ CAB	 *Nog even naast elkaar schetsen in de goede stand, dan is DE 4 keer zo lang als AB.* *De factor is dus 4.*	Ja een Z-hoek, even tekenen, dus de hoeken B en D zijn gelijk, door die evenwijdige lijnen.

Eerst EF uitrekenen in Δ DEF, dat geeft EF = 20. CF in Δ CDF geeft CF=36. Nu hebben we CE = 56 en dan is BC = 14. En de omtrekken rollen er zo uit: 42 en 172.	*CE = 4 · BC, maar beide weet ik niet.* *Wat nu?* *Met welke eigenschappen kan ik nog meer een lengte uitrekenen?* *Oh ja, de hoek bij F is recht, dan kunnen we de stelling van Pythagoras toepassen.* *Klopt het?* *Is de omtrek van Δ CDE gelijk aan 4 keer de omtrek van Δ CAB ?* *Nee. Even zien, een rekenfout, de omtrek van Δ CDE is 168.*  	Pythagoras 
opp. Δ CDE is de helft van 48 · 56, dat is 1344. Dan is opp. van *Δ ABC gelijk aan 1344 **:** 4 = 336*	*Oh ja, de oppervlakte van Δ CDE is de helft van hoogte keer basis, dus 1344. Hoe kom ik nu aan de oppervlakte van Δ ABC ?* *Dan moet ik zeker door 4 delen en wordt de oppervlakte van Δ ABC gelijk aan 336.*	
opp. Δ *ABC is 1344 **:** 16 = 64.*	*Waarom? De hoogte (gemeten vanuit A) is een vierde van DF en de basis BC is een vierde van de basis EC. De oppervlakte van Δ ABC is dan de helft van 12 · 14, dat is 64.* *Dat klopt niet....* *Oh ja, de oppervlakte van Δ CDE moet je door 4 · 4 delen!*	

Toelichting
Leerlingen moeten zoeken in hun repertoire aan kennis en vaardigheden.

Parate vaardigheid
De meetkunde van de onderbouw.

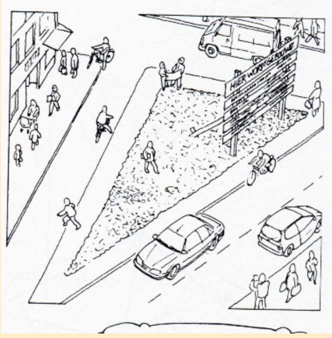
Werkwijze
Individueel of in tweetallen.

Plaats in de leerjaren
Leerjaar 3.

Relatie met schoolboeken
Afsluiting meetkunde.

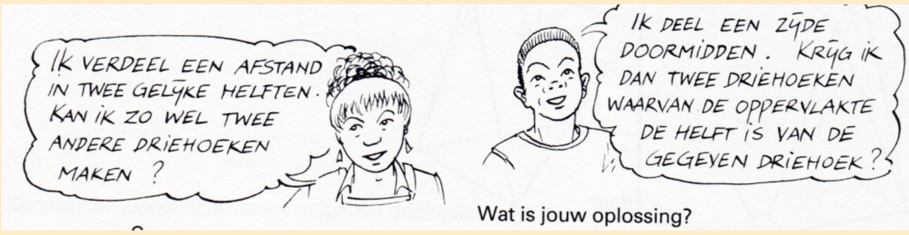
Opdracht 4.2.2.d *Hoe verdeel je een driehoek in drie "gelijke" delen?*

Een aannemer mag op een driehoekig stukje nog drie huizen bouwen. Hij wil dat driehoekig bouwterrein verdelen in drie stukken met dezelfde oppervlakte.

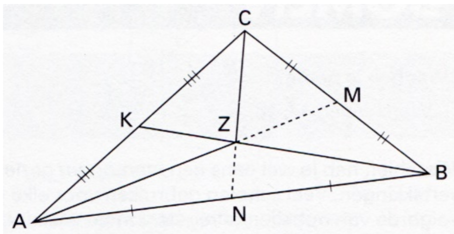


a. Hoe kan hij het bouwterrein verdelen?
b. Je kunt eerst proberen een eenvoudiger probleem aan te pakken.
Probeer bijvoorbeeld de driehoek te verdelen in twee driehoeken met gelijke oppervlakte.
Pas die methode nu ook toe op een verdeling in drie driehoeken.

c. Je kunt ook de drie hoekpunten verbinden met het midden van de overstaande zijde. Beredeneer dat de driehoeken ABZ, AZC en BCZ dezelfde oppervlakte hebben.
d. Er zijn meer manieren om een driehoek te verdelen in drie stukken (driehoeken en/of vierhoeken) met dezelfde oppervlakte. Bedenk zelf een paar manieren.



Toelichting
Vergeleken met de voorgaande opdrachten doet deze opgave veel meer een beroep op de creativiteit van de leerlingen. Dit type opdrachten, wijd verbreid te vinden op het internet, maakt ons meetkundeonderwijs spannender en motiverender dan de klassieke meetkundeproblemen van de voorgaande opdrachten!



Zie voor deze opdracht de website:
http://jwilson.coe.uga.edu/emt668/EMAT6680.2000/Lehman/emat6690/trisecttri's/trisect.html

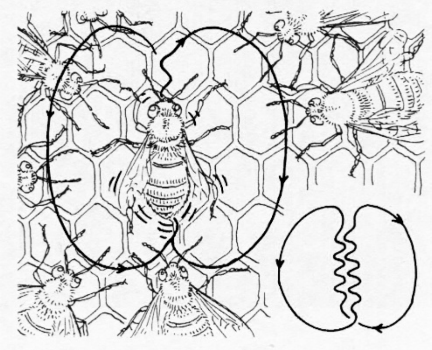
Parate vaardigheid
De oppervlakte van een driehoek kunnen berekenen.

Werkwijze
In groepjes.

Plaats in de leerjaren
Vanaf leerjaar 1.

Relatie met schoolboeken
Ergens na het hoofdstuk waarin de oppervlakte van een driehoek voorkomt.

Opdracht 4.2.2.e *Bijentaal*



De Oostenrijkse bioloog en Nobelprijswinnaar Karl von Frisch heeft onderzocht hoe de bijen in hun 'bijentaal' aan elkaar doorgeven waar voedsel is te vinden. Zodra een bij een rijke voedselbron heeft ontdekt, vliegt zij terug naar de korf om dit aan de andere bijen door te geven. Dat doet zij met een soort dans op de honingraat, die zij minutenlang volhoudt. In het donker van de korf volgen de andere bijen de bewegingen van die bij. Zodra ze de boodschap hebben begrepen, vliegen ze uit om de voedselbron te zoeken.
Als de voedselbron dichtbij de korf is, op ongeveer 50 tot 100 meter afstand, dan voert de bij een rondedans uit. De andere bijen weten nu dat ze in de omgeving van de korf moeten gaan zoeken.
Als de voedselbron verder weg is, dan zie je ze een kwispeldans maken. Zoals in de tekening is te zien, loopt de bij in een acht-vorm over de raat. Tijdens het rechte stuk in het midden kwispelt zij met het achterlijf, vandaar de naam kwispeldans.

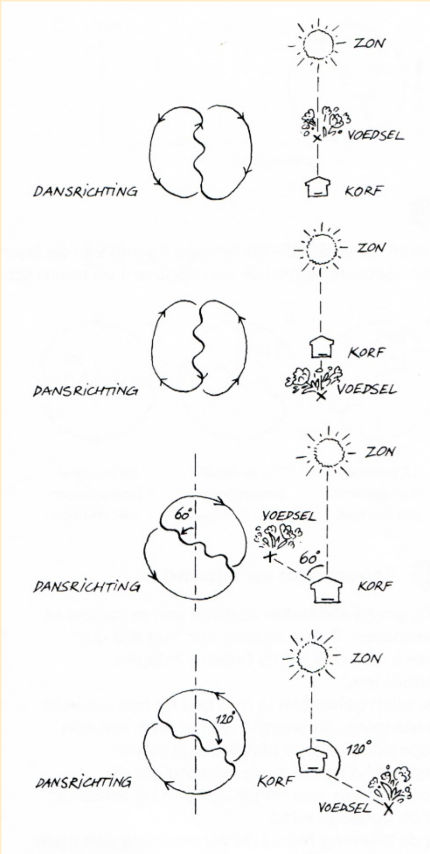
De afstand

Von Frisch ontdekte dat bij een voedselbron op een afstand van 100 meter het kwispelen heel snel gaat, maar dat de kwispelende beweging bij grotere afstanden steeds trager wordt. Zijn meetresultaten staan in de grafiek.
Bij een afstand van 500 meter wordt het rechte stuk ongeveer 6 maal afgelegd in een kwart minuut; bij een afstand van 5 km is dat ongeveer 2 maal per kwart minuut.

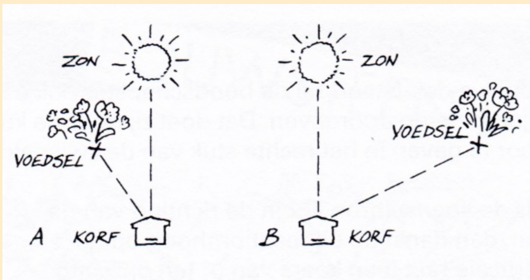
Wat is de afstand bij 3 kwispelbewegingen per kwart minuut? En bij 6 kwispelbewegingen per kwart minuut?

De richting
Behalve de afstand zal de informerende bij ook de richting naar de voedselbron aan de andere bijen moeten doorgeven. Dat doet zij door de koers van de voedselbron ten opzichte van de zon door te geven in het rechte stuk van de kwispeldans.

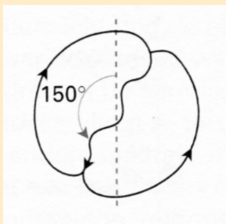
- Als de voedselbron ligt in de richting van de zon, dan danst de bij recht omhoog op de verticale raat (een koers van 0^0 ten opzichte van de zon).
- Danst de bij recht naar beneden, dan ligt de voedselbron van de zon af (een koers van 180^0 ten opzichte van de zon).
- Maakt de bij een hoek van 60^0 naar links ten opzichte van de verticaal, dan is de koers ten opzichte van de zon 60^0 naar links.
- Danst de bij met een hoek naar rechts, dan ligt de voedselbron ook naar rechts



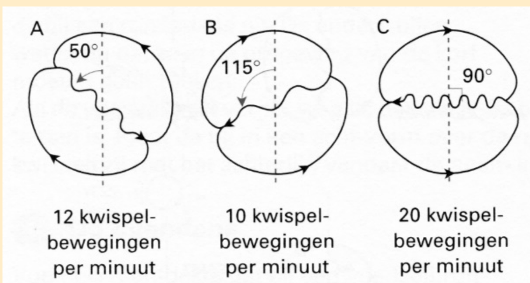
a. Teken de dansrichting bij de twee situaties hiernaast.



b. Teken de onderlinge ligging van de zon, de bijenkorf en de voedselbron bij de bijendans die je hiernaast ziet.

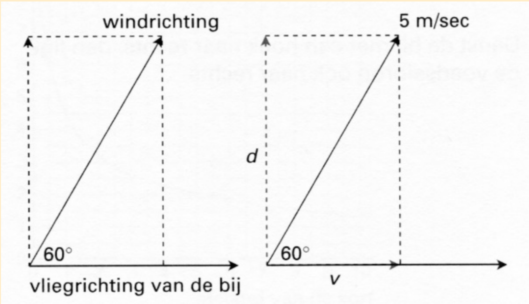


c. Teken bij deze drie bijendansen op schaal de onderlinge ligging van de bijenkorf, de voedselbronnen en de stand van de zon.
Gebruik de grafiek en neem een schaal 1 : 100.000.



Tegenwind en zijwind

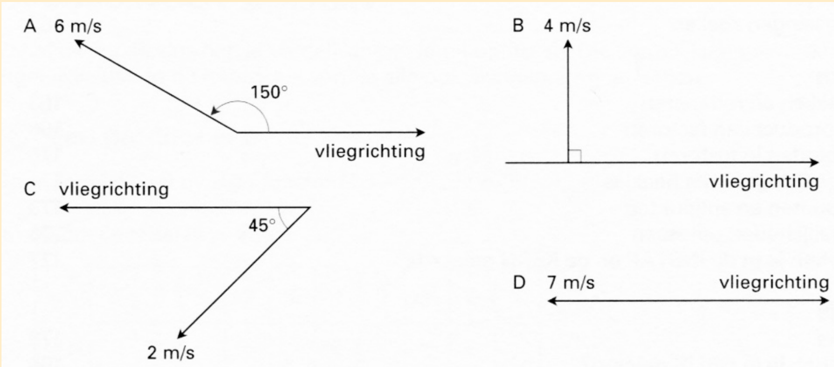
Om de afstand aan te geven, gebruiken de bijen niet de meters, maar de hoeveelheid inspanning, de energie, die het kost om een bepaalde plaats te bereiken. (Wij zeggen ook wel dat het een half uurtje lopen is.) Bij sterke tegenwind geven zij de 'afstand' tot de voedselbron veel hoger aan dan bij windstil weer.



In de tekening maakt de windrichting een hoek van 60^0 met de vliegrichting.
De windsnelheid (hier 5 m/sec) kun je splitsen in een snelheid v langs de vliegrichting van de bij en een snelheid d daar loodrecht op. Bij tegenwind is v negatief.

d. Bereken v en d in m/sec bij een windsnelheid van 5 m/sec.

e. Wat zijn de snelheden langs de vliegrichting en loodrecht erop in de volgende gevallen?



4.3 Van exploreren naar redeneren

Toelichting

In het wiskundeonderwijs heeft het kunnen leveren van een correcte redenering altijd een belangrijke plaats gehad. In de Euclidische meetkunde was het hoogste doel vaak om een bewijs te kunnen vinden en het correct te kunnen opschrijven van een al gegeven bewering in een gegeven meetkundige situatie. Tot ver in de zestiger jaren van de twintigste eeuw leek de opbouw sterk op die van de 'Elementen' van Euclides. In de vijftiger jaren brandde een hevige discussie los over de axiomatische start van die meetkunde ('door twee punten gaat een rechte lijn') en het laten leveren van bewijzen voor stellingen die vanzelfsprekend leken. Met de invoering van de Mammoetwet (mavo-havo-vwo) verdween die opbouw, zonder dat er een vergelijkbare deductieve opbouw (b.v. transformatiemeetkunde) voor in de plaats kwam.

Toch komen de toen gebruikelijke typen opgaven en problemen nog voor in de onderbouw havo-vwo (zie § 4.2.2) en wordt soms gevraagd om een verantwoording van een berekening. Meer recent met de komst van goede software is het proces van het vinden van een vermoeden van een meetkundige eigenschap een natuurlijke manier om vanuit het exploreren van de meetkundige situatie naar een bewijs van het vermoeden te komen. Dat exploreren kan inderdaad met behulp van een programma als *GeoGebra*, maar ook gewoon door variaties te tekenen of te berekenen van de gepresenteerde meetkundige situatie.

In de *Oefeningen* volgen we een opzet van Polya (1962), die door middel van construeren het redeneren en probleemoplossen wilde bevorderen. In de *Opdrachten* gaat het over de vraag of leerlingen nu in 3 vwo *leren te redeneren*. Dan moet het expliciet gaan over het leren exploreren en vervolgens bewijzen op basis van al bekende eigenschappen.

Oefeningen van exploreren naar redeneren

Toelichting

Polya geeft bij deze en de volgende opgaven aan dat het steeds gaat om een stapsgewijze aanpak. Eerst voldoe je aan één voorwaarde, daarna aan een andere en tenslotte combineer je beide. Dat is, schrijft hij, een kernheuristiek, die toepasbaar is op een grote klasse van problemen. Dat moet ook de inhoud zijn van de gefaseerde hulp. En aan de hand van deze constructieproblemen kunnen leerlingen leren hoe dat werkt. Het begin is een kort overzicht van afstanden en puntverzamelingen. (Voor een deel van de leerlingen is dat herhaling.) Ook zonder voorkennis kunnen deze opgaven daarom in elk leerjaar worden gemaakt.

Gefaseerde hulp

De gefaseerde hulp van Polya bestaat uit het expliciteren van de probleemaanpak. Hier gaat het steeds om de voorwaarden te splitsen en daarna te combineren.

Meetkundige constructies

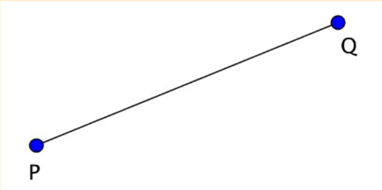
Dit is het wiskundig gereedschap waarmee je de volgende opgaven kunt maken.

Afstand:

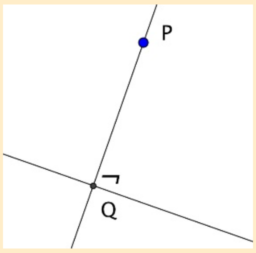
lengte kortste weg tussen figuur A (punt, lijn, driehoek, cirkel,..) en figuur B.

punt ↔ punt

lengte lijnstuk

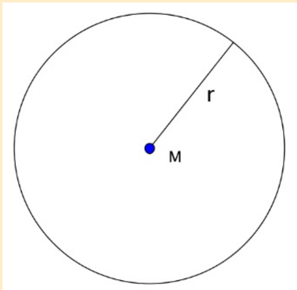


punt ↔ lijn
lengte loodlijn PQ

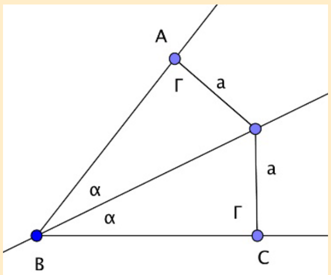


Puntverzameling: alle punten met een afstand tot .... en/of liggend op ....

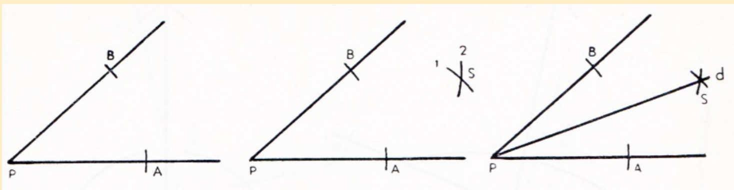
afstand tot een punt
cirkel (M, r):
alle punten op afstand r van punt M



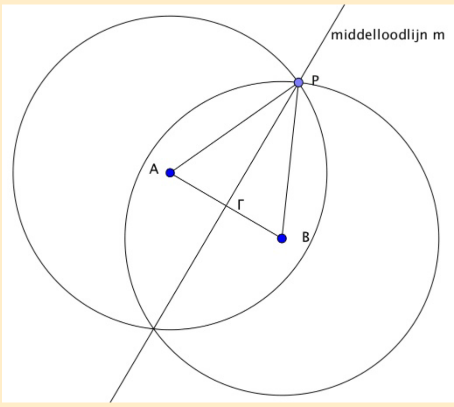
gelijke afstand tot de benen van een hoek
deellijn van $\angle$ ABC: alle punten op gelijke afstand tot de benen AB en BC van $\angle$ ABC



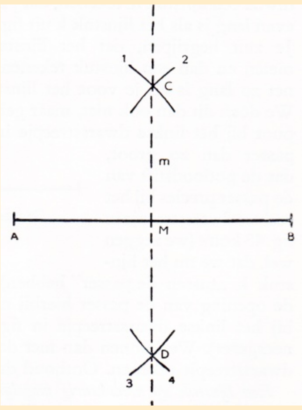
Constructie deellijn



gelijke afstand tot twee punten
middelloodlijn van lijnstuk AB:
alle punten op gelijke afstand van de punten A en B



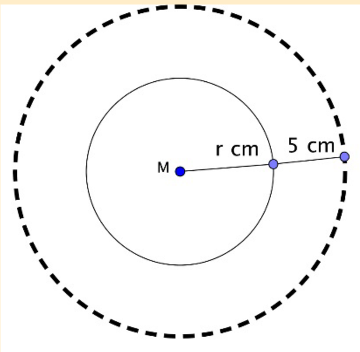
Constructie middelloodlijn



afstanden tot een cirkel

punten met gelijke afstand tot een cirkel

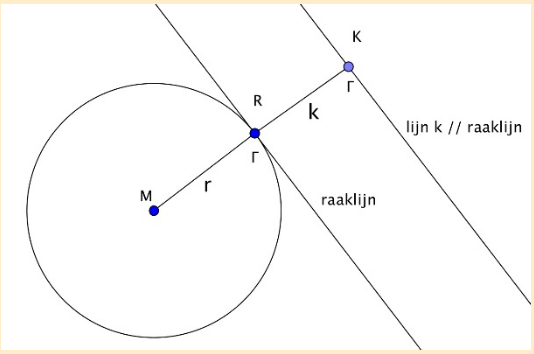
alle punten met afstand 5 cm tot cirkel (m, r) vormen de cirkel (M, r +5).



afstand tussen een lijn en een cirkel

een raaklijn heeft afstand 0 tot de cirkel en afstand r tot M.
de straal naar het raakpunt R staat loodrecht op de raaklijn

de lijn k // raaklijn heeft afstand k tot de cirkel en afstand r + k tot M



Stap voor stap

Oefening 4.3.1.a *Omgeschreven cirkel*

Teken een willekeurige Δ ABC.
Construeer de cirkel die door de driehoekpunten A, B en C gaat.
(Zo'n cirkel heet de *omgeschreven cirkel* van Δ ABC.

Uitwerking van Polya
Onbekend punt: het middelpunt M. De punten A, B en C zijn gegeven.
Voorwaarde: MA = MB = MC.
Heuristiek: opsplitsen MA = MB en MA = MC.
Uitwerking: de eerste voorwaarde geeft de middelloodlijn van AB.
de tweede voorwaarde geeft de middelloodlijn van AC.
M is het snijpunt van beide puntverzamelingen.

Oefening 4.3.1.b *Ingeschreven cirkel*

Teken een willekeurige Δ ABC.

a. Construeer de cirkel die aan de drie zijden AB, AC en BC raakt. Deze cirkel heet de *ingeschreven cirkel* van Δ ABC.
b. Verleng de zijden alle kanten uit en teken de drie cirkels die aan de verlengden van die zijden raakt. Deze cirkels heten de *aangeschreven cirkels* van Δ ABC.

Uitwerking van Polya
Onbekend punt: het middelpunt N. De zijden *a*, *b* en *c* zijn gegeven.
Voorwaarde: afstanden van N tot de drie zijden zijn gelijk.
Heuristiek: opsplitsen afstand tot *a* en *b* is gelijk.
afstand tot *b* en *c* is gelijk
Uitwerking: de eerste voorwaarde geeft de deellijn van ∠ C.
de tweede voorwaarde geeft de deellijn van ∠ A.
N is het snijpunt van beide puntverzamelingen.

Oefening 4.3.1.c *Een cirkel gaat door een punt en raakt aan twee evenwijdige lijnen*

Teken twee evenwijdig lijnen *m* en *n* en een punt P ergens tussen die lijnen.
Construeer een cirkel die raakt aan beide lijnen en door punt P gaat.

Uitwerking van Polya
Onbekend punt: het middelpunt M van de cirkel (M, *r*).
Voorwaarde: M ligt op afstand *r* van beide lijnen.
M ligt op afstand *r* van punt P.
Heuristiek: de eerste voorwaarde geeft de lijn midden tussen *m* en *n*, met als gevolg dat de straal *r* bekend is, nl. de halve afstand tussen die evenwijdige lijnen.
de tweede voorwaarde, nu *r* bekend is, geeft cirkel (P, *r*).

Oefening 4.3.1.d *Een cirkel gaat door een punt en raakt aan twee snijdende lijnen*

Teken twee lijnen *m* en *n,* die elkaar snijden. Teken een punt P ergens tussen die lijnen.
Construeer een cirkel die raakt aan beide lijnen en door punt P gaat.

Oefening 4.3.1.e *Een cirkel en drie snijdende lijnen*

Teken drie lijnen, die elkaar twee aan twee snijden.
Construeer de cirkel die raakt aan twee lijnen terwijl het middelpunt op de derde lijn ligt.

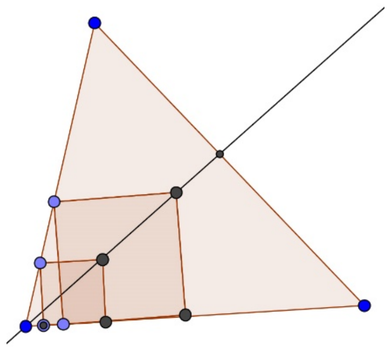
Oefening 4.3.1.f *Een cirkel met straal 3 cm en twee snijdende lijnen*

Teken twee lijnen, die elkaar snijden.
Construeer een cirkel met straal 3 cm die beide lijnen raakt.

Oefening 4.3.1.g *Een vierkant in een driehoek*

Teken een driehoek ABC.
Construeer een vierkant PQRS met P en Q op AB, R op BC en S op AC.

Uitwerking van Polya
Dit is ook weer een probleem met meerdere voorwaarden.
Eigenlijk een test of de leerlingen het idee van 'het stap voor stap aanpakken' ook op zo'n afwijkende situatie kunnen toepassen.



Heuristiek:
- *laat eerst maar eens een voorwaarde vallen, b.v. R nog niet op BC.*
- *dat is eenvoudig, nog eens één tekenen, en nog één, en ...*
- *wat valt op aan de ligging van het "vrije" hoekpunt?*
- *Och ja, eigenlijk gewoon vermenigvuldigen vanuit A!*

Opdrachten van exploreren naar redeneren

Toelichting

Sinds de invoering van de tweede fase havo-vwo kreeg de bovenbouw vwo in het vak wiskunde B12 weer een stevig stuk Euclidische meetkunde, dat na de herziening van de tweede fase voor een deel overeind bleef in het vak wiskunde B. Intussen werd in de onderbouw weer wat aandacht besteed aan het redeneren en bewijzen, met name in 3 vwo. Het bevorderen van wiskundig denken houdt ook in dat leerlingen *leren* (op een beperkt leerstofgebied) logisch te *redeneren* en te *bewijzen*. De twee grote schoolmethoden werken daar met name in 3 vwo bij de meetkunde aan. De vraag is of onze leerlingen in zo'n kort bestek inderdaad enigszins leren om te redeneren op de Euclidische, deductieve, manier. Voor we de schoolboeken gaan bekijken, luisteren we weer naar mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa (1960) uit de tijd dat de Euclidische meetkunde nog prominent in het programma aanwezig was. Enkele citaten:

“Een stelling wordt alleen dan bewezen, wanneer ze minstens voor één leerling niet evident is; de evidente stellingen worden uitdrukkelijk als (voorlopige) axioma's aangenomen.”

“Het vaststellen, formuleren en bewijzen der stellingen geschiedt - wel niet zonder leiding van de leraar- maar toch met verregaande medewerking der leerlingen zelf.”

Na veel discussie bij de herinvoering van de Euclidische meetkunde in de Tweede Fase is uiteindelijk gekozen voor het geven van "lokale redeneringen" en "lokale bewijzen" waarbij in de redeneringen een beroep kan worden gedaan op een beperkte verzameling (niet bewezen) stellingen. De cirkelmeetkunde is een mooi beperkt gebied met veel verrassende stellingen, die met behulp van de al empirisch "ontdekte" stellingen kunnen worden bewezen. Het gaat daarbij niet om de leerstof van de cirkelmeetkunde, maar om het leren redeneren, waarbij de cirkelmeetkunde alleen maar een medium is en geen doel op zich. Voorafgaand aan het geven van een "bewijs" gaat het verkennen, het exploreren, van de niet triviale situatie. Tijdens dat exploreren komen vermoedens, hypothesen, op en voor meer zekerheid proberen we dan die vermoedens te bewijzen.
Wat komt daarvan terecht in 3 vwo? We bekijken of leerlingen *leren redeneren* aan de hand van de stelling van Thales en de stelling over de middelpuntshoek en de omtrekshoek.

Getal & Ruimte 3 vwo deel 1 hoofdstuk 2 Berekenen en bewijzen

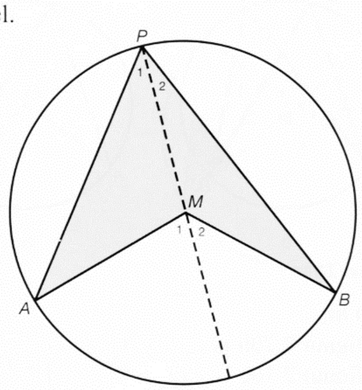
63 In figuur 2.69 is M het middelpunt van de cirkel.

a Vul in.
In $\triangle AMP$ is $AM = MP$,
dus $\angle A = \ldots$ (basishoeken).
$\angle M_1 = \angle A + \ldots$ (zie opgave 62)

b Waarom is $\angle M_1 = 2 \cdot \angle P_1$?

c Toon aan dat $\angle M_2 = 2 \cdot \angle P_2$.

d Toon aan dat $\angle M_{12} = 2 \cdot \angle P_{12}$.



figuur 2.69

"In opgave 63 heb je de volgende stelling bewezen.
Stelling (omtrekshoek)
Een omtrekshoek is gelijk aan een middelpuntshoek die op dezelfde boog staat."

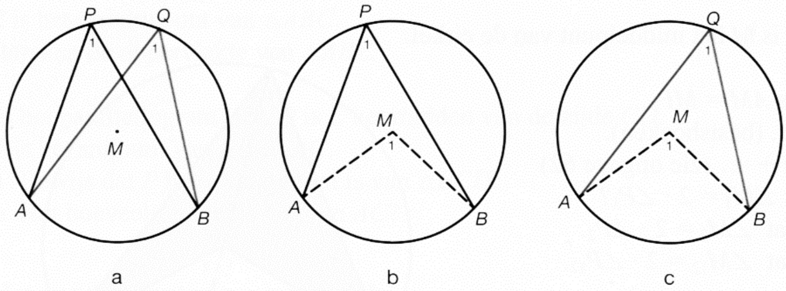
Daarna volgt:

64 In deze opgave bewijs je de volgende stelling.

Stelling (gelijke omtrekshoeken)

Omtrekshoeken die op dezelfde boog staan zijn even groot.

Zie figuur 2.70.



figuur 2.70

Vul in.

In figuur 2.70b is $\angle P_1 = \frac{1}{2} \cdot \ldots$
In figuur 2.70c is $\angle Q_1 = \frac{1}{2} \cdot \ldots$ $\Big\}$ $\angle P_1 = \ldots$

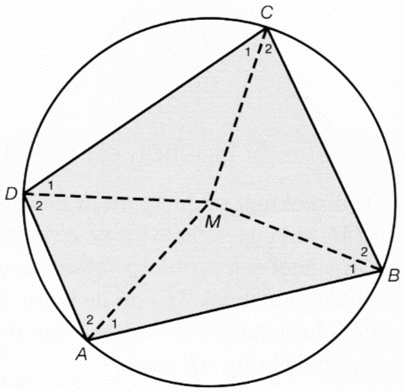
65 **Definitie** Een **koordenvierhoek** is een vierhoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.

In deze opgave bewijs je de volgende stelling.

Stelling (koordenvierhoek)

Van een koordenvierhoek zijn de overstaande hoeken samen 180°.

Zie figuur 2.71.



figuur 2.71

en

a Vul in.
Van $\triangle AMB$ is $AM = BM$, dus $\angle A_1 = \angle B_1$.
Evenzo is $\angle B_2 = \angle\ldots$, $\angle C_1 = \angle\ldots$ en $\angle D_2 = \angle\ldots$

b Van een vierhoek zijn de vier hoeken samen 360°, dus
$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle B_1 + \angle B_2 + \ldots = 360°$.

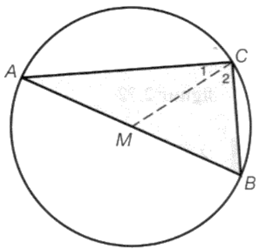
c Licht toe dat uit de vragen a en b volgt
$2 \cdot \angle B_1 + 2 \cdot \angle B_2 + 2 \cdot \angle D_1 + 2 \cdot \angle D_2 = 360°$.

d Maak het bewijs af.

Na opgaven over het berekenen van hoeken en lengten met gebruik van deze stellingen volgt de stelling van Thales.

72 Zie de cirkel met middelpunt M en middellijn AB in figuur 2.78.
Vul in.

$$\left.\begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = \ldots^\circ \\ AM = CM,\ \text{dus}\ \angle A = \ldots \\ BM = CM,\ \text{dus}\ \angle B = \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = \ldots^\circ \\ \text{dus}\ 2 \cdot \angle C_{12} = \ldots^\circ \\ \text{dus}\ \angle C_{12} = \ldots^\circ \end{array}$$



figuur 2.78

Theorie B De stelling van Thales

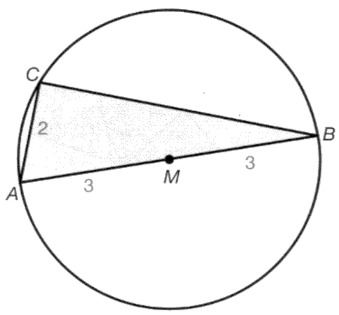
In opgave 72 heb je de **stelling van Thales** bewezen.

Stelling (Thales) Is AB een middellijn van een cirkel en ligt het punt C op de cirkel, dan is $\angle C$ in $\triangle ABC$ een rechte hoek.

Zonder bewijs delen we mee dat ook het omgekeerde geldt.

Stelling (Thales) Is $\angle C$ in $\triangle ABC$ een rechte hoek, dan ligt het punt C op de cirkel met middellijn AB.

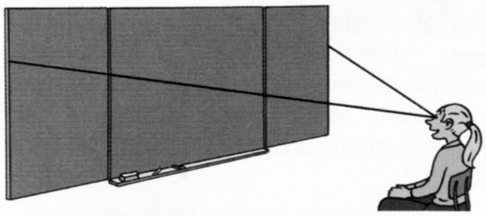
In figuur 2.79 is $\angle C = 90°$.
Volgens de stelling van Pythagoras is
$AC^2 + BC^2 = AB^2$
$4 + BC^2 = 36$
$BC^2 = 32$
$BC = \sqrt{32} \approx 5{,}7$

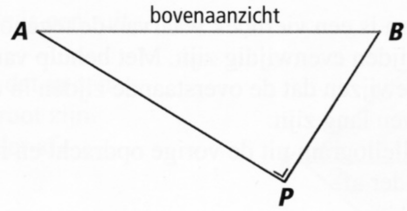


figuur 2.79

De leerlingen worden niet op de stellingen voorbereid door situaties te exploreren, zodat ze ook geen vermoeden kunnen hebben van wat er nu weer komt. Het *leren redeneren* bestaat uit het maken van een invuloefening, waarin de structuur en het idee van het bewijs al voorgekookt is. Kijken we in dit hoofdstuk naar de paragraaf *Vermoedens met GeoGebra* dan worden daar mooie stellingen voorbereid, waarna wordt weggegeven hoe die kunnen worden bewezen. Kennelijk hebben de auteurs niet tot doel leerlingen te *leren redeneren* en/of hebben zij er geen vertrouwen in dat leerlingen daar iets van kunnen leren. Wat overblijft is de (niet relevante) leerstof, zijnde enkele stellingen uit de cirkelmeetkunde waarmee sommen kunnen worden gemaakt.

Hebben auteurs wellicht gelijk in hun inschatting dat leerlingen niet kunnen leren zelf een redenering te bedenken? Hoe gaat dat in *Moderne Wiskunde*?





12 In een lokaal hangt een schoolbord dat 4 meter breed is. Petra ziet het bord onder een hoek van 90°. Dit betekent dat de twee kijklijnen een hoek van 90° met elkaar maken. Rechtsboven is het bovenaanzicht van de situatie getekend. AB is het bord en punt P is de plaats waar Petra zit.

a Teken een lijnstuk AB van 4 cm en geef vijf plaatsen aan waar Petra (P) kan zitten.

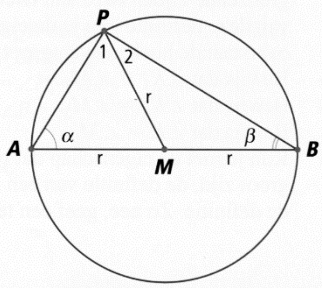
b Vul het volgende vermoeden aan.
Alle punten P waarvoor $\angle APB = 90°$ liggen …

In opgave 13 wordt de hoek gemeten in een cirkel, wat het vermoeden oplevert dat voor elk punt P op de cirkel de hoek APB recht is, met AB de middellijn. Daarna volgen de bewijzen.

14 Je gaat het vermoeden bewijzen dat voor elk punt P op een cirkel met middellijn AB geldt dat $\angle APB = 90°$.
De cirkel hiernaast heeft straal r en middelpunt M.
Op de cirkel ligt punt P, $\angle MAP = \alpha$ en $\angle MBP = \beta$.
Neem het onderstaande bewijs over en vul het verder in.

In$\triangle AMP$ geldt $AM = MP = r$ dus $\angle P_1 = \ldots$
In$\triangle BMP$ geldt $BM = MP = r$ dus $\angle P_2 = \ldots$
In$\triangle ABP$ geldt $\angle A + \angle B + \angle P + \ldots°$
dus … + … +… + … = …°
2 × (… +…) = …°
… +… = …°
dus $\angle ABP = 90°$

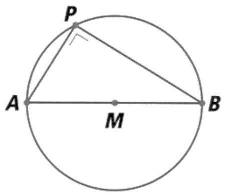
De grootte van een hoek geef je vaak aan met een letter uit het Griekse alphabet.
α = *alpha* β = *beta* γ = *gamma*



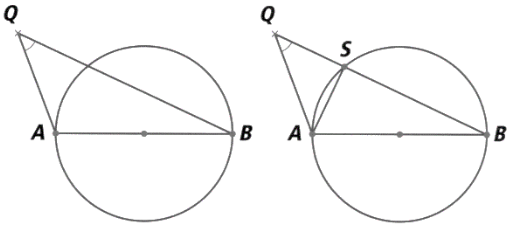
Voor de stelling van Thales wordt eenzelfde strategie gevolgd.

Theorie

De **stelling van Thales** luidt als volgt.
Als punt P op een cirkel ligt waarvan AB een middellijn is, dan is $\angle APB = 90°$.
En omgekeerd: Als $\angle APB = 90°$, dan ligt punt P op de cirkel met AB als middellijn.



15 In opdracht 14 is het eerste gedeelte van de stelling van Thales bewezen. Je gaat nu de omgekeerde stelling bewijzen.
Bekijk de tekeningen hiernaast.

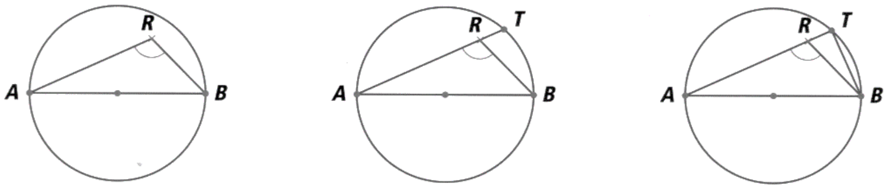


a Als punt Q buiten de cirkel ligt, dan snijdt lijnstuk BQ (of anders lijnstuk AQ) de cirkel in punt S.
Hoe groot is $\angle ASB$? Waarom weet je dat zeker?

b Hoe groot is dan $\angle QSA$?

c Waarom weet je nu dat $\angle AQB$ kleiner dan 90° is?

d Bekijk nu de tekeningen hieronder.

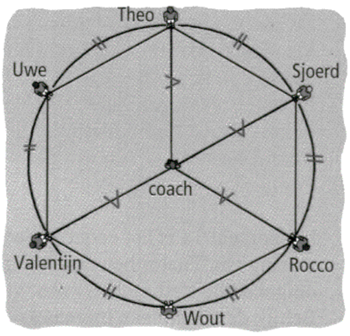


Als een punt R binnen de cirkel ligt, dan snijdt het verlengde van lijnstuk AR de cirkel in punt T.
Bewijs dat $\angle ARB$ groter moet zijn dan 90°.

e Leg uit waarom uit het resultaat van opdracht c en opdracht d volgt dat de omgekeerde stelling bewezen is.

Als punt R binnen de cirkel ligt, dan is $\angle ARB > 90°$.
Als punt R buiten de cirkel ligt, dan is $\angle ARB < 90°$.
Dus als $\angle ARB = 90°$, dan …

17 Zes sporters staan even ver van hun coach af. De sporters staan ook onderling op gelijke afstanden.



a Onder welke kijkhoek ziet de coach de twee sporters Rocco en Sjoerd? En onder welke kijkhoek ziet hij Sjoerd en Theo?

b Onder welke kijkhoek ziet de coach Rocco en Valentijn? En onder welke kijkhoek ziet hij Valentijn en Theo?

c Vul het volgende vermoeden aan.
Punten die op een cirkel liggen met gelijke onderlinge afstand, zie je vanuit het middelpunt onder …

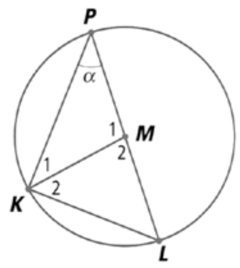
d Bewijs met gelijkvormigheid dat dit vermoeden juist is.

18a Onder welke kijkhoek ziet Uwe de sporters Rocco en Sjoerd? En onder welke kijkhoek ziet de coach deze twee sporters?

b Vergelijk de kijkhoek waaronder de coach Rocco en Valentijn ziet met de kijkhoek waaronder Theo die twee sporters ziet.
Welk vermoeden kun je nu formuleren?

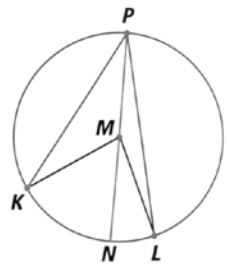
19 Bij de vorige opdracht is het volgende vermoeden ontstaan. Een middelpuntshoek is twee keer zo groot als een omtrekshoek die op dezelfde boog staat.
Dat vermoeden ga je nu bewijzen.
Bekijk eerst de situatie waarbij het middelpunt M op een been van de omtrekshoek KPL ligt.
Neem $\angle KPL = \alpha$.

a Welke hoek is ook gelijk aan α? Waarom?
b Druk $\angle M_2$ uit in α.
c Geef nu het bewijs dat $\angle M_2 = 2\alpha$.



20 Bekijk nu de situatie dat punt M binnen omtrekshoek KPL ligt.

a Gebruik het bewijs van de vorige opdracht om aan te tonen dat $\angle KML = 2 \times \angle KPL$.
b Bewijs het vermoeden van opdracht 18 ook voor het geval dat punt M buiten hoek KPL ligt.



Het verschil met *Getal & Ruimte* is natuurlijk dat bij *Moderne Wiskunde* de leerlingen de kans krijgen zelf de situatie te exploreren en vermoedens te formuleren. Maar ook hier worden de te leveren bewijzen sterk gestructureerd en hoeven de leerlingen helemaal niet na te denken over een aanpak. Zo wordt bijvoorbeeld in opgave 20 de kans gemist om leerlingen, eventueel via een gefaseerde hulp, op het idee te laten komen dat wellicht de vorige opgave zou kunnen worden gebruikt. *Herleiden tot een al opgelost probleem,* dat is een belangrijke heuristiek!

Elk schoolboek bevordert het niet-denken!
Het *bevorderen van het niet-denken* (Ehrenfest-Afanassjewa, 1960) is natuurlijk in onze huidige schoolboeken het gevolg van het starre dogma dat leerlingen op eigen houtje, schijnbaar zelfstandig, reeksen sommetjes moeten maken, zonder dat ze er iets blijvends van leren. Bij elke volgende editie worden weer opgaven tot sommetjes geminimaliseerd, zodat ze geen vragen bij leerlingen kunnen oproepen. (Dat is bijvoorbeeld onmiddellijk in te zien als de zevende editie van de hiervoor weergegeven tekst uit *Moderne Wiskunde* wordt vergeleken met de nu gangbare editie.)
Willen we leerlingen leren iets van redeneren bij te brengen, dan moeten zij gaan redeneren. En dat doe je niet op je eentje maar in discussie met anderen, de medeleerlingen en de docent. Hoe kan dat werken? In de eerste plaats gaan we zonder een schoolboek met voorgekookte sommen aan de slag.

Baas boven boek!
Rond de herinvoering van de Euclidische meetkunde in de bovenbouw van het vwo verscheen de afstudeerscriptie van Jacolien van Dijk en Iris Gulikers (1997), die in de literatuur en in de scholen onderzoek deden naar juist dat leren redeneren in de meetkunde. Ze hebben in tientallen lessen leerlingen uit die bovenbouw geobserveerd, die aan het worstelen waren met het redeneren, onder andere bij begin van de cirkelmeetkunde. Enkele citaten van uitspraken van leerlingen:

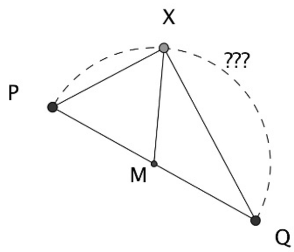
- *'s Avonds denk ik: Nog snel even wiskunde maken. Even snel wiskunde maken? Het lukt helemaal niet.*
- *Dit zijn een paar leuke problemen als je eruit komt. Ze zijn nooit leuk als je er niet uitkomt.*
- *It's hints-time.*
- *Moeilijk om zelf bewijzen te vinden.*
- *Het was soms wel interessant om een bewijs te leveren, omdat je dan nieuwe en verrassende verbanden zag.*
- *Stom om dingen te bewijzen die eigenlijk al zichtbaar zijn.*

- *De docent moet ervoor zorgen dat de leerlingen goed weten hoe ze een bewijs moeten aanpakken en hen stimuleren zelf een oplossing te vinden.*
- *Uiteindelijk heb ik (met behulp van de docent) de volgende aanpak ontwikkeld:*
    1. *Gegevens noteren en omschrijven.*
    2. *Te bewijzen stelling opschrijven en omschrijven.*
    3. *Bruikbare stellingen zoeken.*

Een lesobservatie gaat over het interactief klassikaal vinden van een direct bewijs van de omgekeerde stelling van Thales. Die is als volgt in het lesmateriaal gedefinieerd:

Gegeven: $\angle PXQ = 90^0$
Te bewijzen: *X ligt op de cirkel met middellijn PQ.*

In een half uur durend leergesprek komt er een bewijs op bord gebaseerd op het tekenen van een rechthoek. Op basis van de gesignaleerde knelpunten adviseren de onderzoekers de volgende strategie en bordgebruik voor de leraar:

ANALYSE-bord Gegevens *vooruitdenken*	ANALYSE-bord Te bewijzen *terugdenken*	UITWERKING
$\angle PQX = 90^0$	*X ligt op de cirkel met middellijn PQ*	
levert niet veel op	*Waar naar toe?* *M zal het middelpunt moeten zijn.* *Als X op die cirkel ligt dan geldt natuurlijk MP=MX=MQ* *En omgekeerd:* *Als MP=MX=MQ dan ligt X op die cirkel* 	
	Wat kunnen we met die rechthoekige driehoek? *Niet veel meer dan Pythagoras* *Wie heeft er een idee? Dat schrijven we op.* *Welk idee werken we uit?* *OK, we maken er een rechthoek van. Hoe dan?* *Enzovoort.*	

De onderzoekers constateren dat leerlingen veel tijd nodig hebben en 'gefaseerde hulp'. Leerlingen moeten ervaren dat bij een probleem een zoekproces hoort en dat het juist gaat om het leren redeneren. Aan de probleemaanpak moet expliciet aandacht worden besteed, zodat leerlingen zichzelf vragen gaan stellen om verder te komen als ze vast zitten.
Na de beschrijving van mislukte oplossingspogingen door een gefrustreerde leerling halen zij de volgende uitspraak van Polya aan:

"Als de leerling op school niet de gelegenheid had om vertrouwd te raken met de wisseling van gevoelens bij de worsteling naar de oplossing, dan hebben zijn wiskundelessen op het meest vitale punt gefaald."

Opdracht 4.3.2.a **Doe het zelf, zonder boek!**

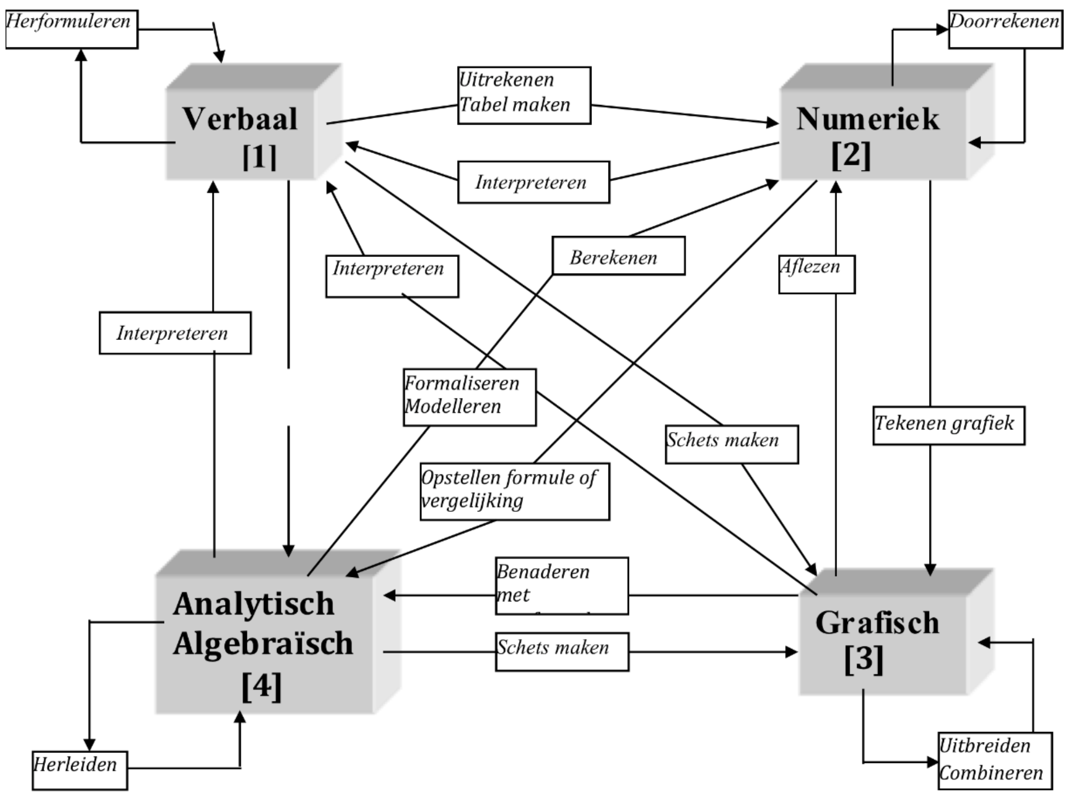
Schoolboeken kunnen maar weinig bijdragen aan het leren redeneren. Sla de genoemde hoofdstukken over en ga zelf met uw klassen zonder boek aan de slag. Start waar mogelijk met exploreren van een stelling (in de klas,

op het schoolplein of met *GeoGebra*) en laat uw leerlingen in groepjes worstelen met een bewijs, afgewisseld met klassikale interactie over hoe je zo'n redenering vindt en sluitend opschrijft. Maak duidelijk onderscheid tussen de analyse (vooruitdenken, terugdenken, plan) op het analysebord weergegeven en de correct opgeschreven redenering.
Neem de tijd, kies een heel beperkt aantal eenvoudige meetkundige probleempjes uit de cirkelmeetkunde en laat de rest weg. De rest van die "leerstof" uit de overgeslagen hoofdstukken met al die invulsommen komt geen enkele leerling later meer tegen. Het gaat erom even te proeven aan wat een logische redenering is en daar zelf iets van en over te leren.
Vooraf kunt u eventueel de *Oefeningen* laten maken om leerlingen wat meer ervaring met meetkundige figuren te laten krijgen.

5. Verbanden

Oriëntatie

We bekijken eerst eens het gehele gebied van verbanden in de onderbouw en de bovenbouw havo-vwo. Sinds de invoering van de 'nieuwe' vakken wiskunde A en B en de 'nieuwe' onderbouwprogramma's vanaf de basisvorming zijn de onderwijsdoelen verschoven van louter algebra naar een veel bredere invulling van het gebied van de verbanden. In het volgende schema van vertaalvaardigheden wordt dat in kaart gebracht.



Een probleem kan in woorden zijn beschreven (verbale representatie), door middel van een tabel (numerieke representatie) worden aangepakt, door een grafiek worden weergegeven (grafische representatie) of door een formule of vergelijking (analytische of algebraïsche representatie) zijn vastgelegd. Tijdens het oplossen kunnen meerdere overgangen gemaakt worden van de ene representatie naar de andere (bijvoorbeeld van een formule naar de bijbehorende grafiek) of er vinden binnen eenzelfde representatie probleemtransformaties plaats (bijvoorbeeld door een vergelijking te herleiden).

Wiskundige denkactiviteiten bij Verbanden

"Hoe meer de leerling het opbouwen van de leerstof meebeleeft, des te meer gelegenheid krijgt hij om het denken te oefenen en des te meer wordt de leerstof zijn eigen bezit"

Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

Aansluitend op hoofdstuk 3 spitsen we de bespreking van wiskundige denkactiviteiten (*WDA)* nu toe op het gebied van de *Verbanden* in de onderbouw havo-vwo. Welke aspecten van *WDA*, zoals opgenomen in de

examenprogramma's en besproken in hoofdstuk 3, spelen een rol bij *Verbanden*? En waar en wanneer kunnen we daar in de lessen aan werken?
In de onderbouw van havo-vwo wordt het overgrote deel van de lestijd besteed aan de opbouw van een rijk vertakt gebied aan begrippen, technieken en eigenschappen. Het gaat over variabelen, over rekenen met variabelen, over verbanden tussen variabelen, over het beschrijven van verbanden door woorden, tabellen, grafieken en formules, over vergelijkingen, over eigenschappen van verschillende typen verbanden en bovenal over de samenhang tussen al die aspecten van dit complexe gebied. Nog veel meer dan bij de meetkunde is onze eerste zorg dat leerlingen het *overzicht* verwerven over al die relaties, de *structuur* leren kennen in al die representaties en overgangen uit het voorgaande schema. Hoe kunnen we daaraan werken in de eerste fase van de opbouw van een onderwerp?

Net als voor de *leerstoflijn* moet er over de schooljaren heen een *doorlopende leerlijn* worden ontworpen voor het ontwikkelen en onderwijzen van *WDA.* De *leerstoflijn* voor verbanden (functies, vergelijkingen) is in het verre verleden in de schoolboeken uitgewerkt en vervolgens bij iedere volgende editie gewoon overgenomen. Het is zeer de vraag of die eenmaal vastgestelde leerstoflijn wel optimaal is voor het leren van leerlingen, maar daar gaat dit bronnenboek niet over.
In het vervolg geven we een aanzet voor een *doorlopende leerlijn* voor het ontwikkelen van *WDA* in het gebied van de *Verbanden.* In die uitwerking wordt herhaaldelijk geïntervenieerd in de gebruikelijke leerstoflijn, omdat in de gebruikelijke *leerstoflijn* denkactiviteiten als *algebraïseren*, *modelleren*, *probleemoplossen* en *abstraheren* niet tot hun recht komen. Het bevorderen van het wiskundig denken is geen toegift aan het einde van een hoofdstuk, maar start bij de eerste opgaven. De voorbeelden voor het ontwerpen voor *WDA* volgen weer de driedeling in "*Van exploreren naar structuur", "Van kennis naar probleemoplossen"* en *"Van exploreren naar redeneren en abstraheren".*
Ter oriëntatie volgt nu eerst een overzicht per subdomein.

Lineaire Verbanden
Bij *lineaire verbanden* wordt in de schoolboeken vaak gestart met een betekenisvolle context, waar leerlingen door middel van tabellen en grafieken aan werken. De formule van een lineair verband moet uiteindelijk vanuit elk van die andere representaties kunnen worden opgesteld. Met name de context (de verbale representatie) en de grafiek kunnen bijdragen aan het geven van een voor leerlingen herkenbare *betekenis* van formules. De WDA-lijn *algebraïseren* start al op het moment dat de eerste context moet worden vertaald naar een formule. Op het moment dat leerlingen die onderlinge samenhang van de representaties beheersen kan het inzoomen op de techniek van het herleiden en oplossen van lineaire vergelijkingen starten.

Lineaire Verbanden: Van exploreren naar structuur
Irene van Stiphout (2011) heeft in haar proefschrift een analyse gemaakt van de manier waarop de twee grote schoolboekenseries dit gebied van de lineaire verbanden en vergelijkingen opbouwen. Zij concludeert dat van de overgang van de opgaven met echte situaties (in woorden beschreven) naar de meer formele benadering ('kale' formules en vergelijkingen) amper werk wordt gemaakt in de opgaven.
Voor leerlingen dreigen zo twee afzonderlijke 'werelden' te ontstaan, terwijl het juist de bedoeling is dat de voorstelbare contexten *betekenis* geven aan de meer formele kant van lineaire verbanden. Voordat technieken als het algebraïsch oplossen van eerstegraads vergelijkingen aan de orde komen, moet eerst het fundament van *overzicht* en *inzicht* worden gelegd.

In de *Oefeningen* (§ 5.1.1.1) staat een reeks opgaven waarin al de voorkomende overgangen langs komen. Van een context naar een ketting van rekenpijlen, van een context naar een tabel, van een grafiek naar een ketting van rekenpijlen en tenslotte van contexten en grafieken naar formules, waarmee vragen kunnen worden beantwoord. Het opstellen en gebruiken van lineaire formules is voor deze leerlingen de eerste stap in het *algebraïseren* en *modelleren*. Verder moeten ze een *betekenis* toekennen aan getallen in formules, een eerste stap in het ontwikkelen van *symbol sense*, het begrip van variabelen en formules.

In de *Opdrachten* (§ 5.1.1.2) wordt dezelfde opbouw gevolgd, met wat minder structuur en aan de hand van twee contexten. De *Sponsorloop* kan gaan functioneren als een *denkmodel*, aan de hand waarvan andere contexten en met name ook 'kale' formules en vergelijkingen *betekenis* kunnen krijgen. De formule $y = ax + b$ kan dan worden geïnterpreteerd als zo iets als een sponsorloop met een startbedrag b en een uitbetaling per ronde a. Kijken we naar het model voor een oplossingsproces in hoofdstuk 3, dan moet deze fase van het onderwijs uitmonden in het door leerlingen snel *herkennen* van de verschillende betekenissen van *'a' en 'b'* in contexten, grafieken, tabellen en formules.

Lineaire Verbanden: Van kennis naar probleemoplossen
Nadat de leerlingen een basis aan inzicht en overzicht hebben verworven en vervolgens zich de verschillende technieken hebben eigen gemaakt, kunnen ze de bekende standaardopgaven maken. Herkenning speelt daarbij een essentiële rol.
Vervolgens gaat het over de vraag hoe leerlingen kunnen leren die kennis te mobiliseren in de aanpak van niet-standaard opgaven. Dat zijn opgaven waarvan zij niet direct 'zien' wat er kan/moet gebeuren. Het zijn denkopgaven die een beroep doen op diverse wiskundige denkactiviteiten. De ontwikkeling van *WDA* staat centraal en niet het inoefenen van veel voorkomende typen problemen.

De *Oefeningen* (§ 5.1.2.1) bevatten een vijftal opgaven, waarin alle overgangen van de verschillende representaties langs komen. Het kunnen maken van formules is de kern van het algebraïseren en modelleren. Voor deze leerlingen is het de eerste stap in die leerlijn, terwijl ze daarnaast ontdekken dat het bij wiskunde niet om letterrekenen gaat, maar om het interpreteren van een *betekenis* waar de formules en vergelijkingen voor staan.
De *Opdrachten* (§ 5.1.2.2) gaan allemaal over echte situaties, die vragen oproepen, waar met behulp van lineaire formules, grafieken of tabellen een antwoord op kan worden gevonden.

Kwadratische verbanden
Bij *kwadratische verbanden* ligt een zwaar accent op de algebraïsche en grafische representaties, terwijl de contexten eigenlijk alleen maar als toepassingen voorkomen. De numerieke representatie (tabel, getallenvoorbeeld) is het intermediair tussen de formule en de grafiek. Ook hier zal eerst weer aan de samenhang tussen de verschillende verschijningsvormen van een kwadratische formule moeten worden gewerkt, voordat de technieken aan de orde komen.

Kwadratische verbanden: Van exploreren naar structuur
De kwadratische formules zijn in de onderbouw bij uitstek het voertuig om *symbol sense* te ontwikkelen. Helaas wordt die mogelijkheid amper benut als gevolg van de klassieke leerstoflijn, die decennia geleden bij de start van havo-vwo voorgoed vastgelegd lijkt. De technieken lijken leidend en niet de kans om leerlingen te leren een formule te lezen en interpreteren. Aan het ontwikkelen van *symbol sense* wordt niet gewerkt en de leeropbrengst voor wat betreft de leerstofdoelen is mager en voor het grootste deel van de leerlingen niet relevant voor de bovenbouw, waar in alle vakken het begrip van wat een formule de basis is voor productieve vaardigheden. Wij kiezen voor een andere start voor de opbouw van het geheel aan kwadratische verbanden. Die kunt u integreren in de gangbare volgorde en inhoud van de leerstof in de schoolboeken.

De *Oefeningen* (§ 5.2.1.1) bestaan uit een reeks opgaven, waarin de leerlingen leren om aan een kwadratische formule een *grafische betekenis* toe te kennen. Formules kunnen worden onderzocht met tabellen, die inzicht geven in de eigenschappen van de bijbehorende parabool. Voordat leerlingen de algebraïsche technieken van het herleiden van formules leren, moeten ze het *overzicht* verwerven op de typen kwadratische formules en die kunnen *interpreteren* in termen van eigenschappen van de parabolen. Het gevoel voor formules (*symbol sense*) wordt zo ontwikkeld en de formules krijgen een betekenis, waardoor het waarom van de latere technieken duidelijk wordt.

Een alternatief voor de *Oefeningen* is te vinden in de *Opdrachten* (§ 5.2.1.2). Met *GeoGebra* kunnen leerlingen direct zelf soorten kwadratische formules onderzoeken en zelf op een rijtje zetten hoe zij die kunnen interpreteren. Een tweede opdracht is een *Instap* op kwadratische formules met het bekende verhaal van de vallende stenen van Galilei.

Kwadratische verbanden: Van kennis naar probleemoplossen
De *Oefeningen* (§ 5.2.1.1) bestaan uit een willekeurige verzameling van kwadratische formules, met de bekende vragen over kenmerken van de parabolen. Zo'n gemengde verzameling (hier ontleend aan de Algemene Herhaling van *Getal & Ruimte*) kan alleen door leerlingen goed worden aangepakt als zij de *houding* hebben ontwikkeld om eerst eens rustig vragen te stellen aan de formule en daarnaast het *overzicht* hebben om keuzes uit hun gereedschapskist te kunnen maken.
In de *Opdrachten* gaat het voornamelijk over probleemsituaties die leerlingen met (een deel van) hun kennis van kwadratische formules kunnen oplossen. Aspecten van *algebraïseren* (kwadratische formules maken) en *modelleren* (interpreteren van formules) komen in verschillende opdrachten voor.

Kwadratische verbanden: Van exploreren naar abstraheren
Analoog aan het verwante deel bij lineaire verbanden gaat het in de *Oefeningen* (§ 5.2.3.1) om transformaties van grafieken met weer de vraag wat de nieuwe formule wordt. In de *Opdrachten* (§ 5.2.3.2) hebben de vragen betrekking op parameters en families van parabolen, deels ontleend aan complexe opgaven uit *Moderne Wiskunde*.

Allerlei verbanden
In de schoolboeken van leerjaar 3 wordt nog wat gewerkt aan andere verbanden dan de lineaire en kwadratische. Het exponentieel verband is in veel opzichten nog het belangrijkste onderwerp voor de onderbouw. In alle wiskundevakken van de bovenbouw krijgen onderwerpen als exponentiële groei en exponentiële formules veel aandacht. Daarnaast kan dit onderwerp voor alle leerlingen een nieuwe start zijn in de lijn van de verbanden, omdat de contexten een hoofdrol spelen. Door het heen en weer vertalen van een in woorden of een tabel beschreven situatie naar het wiskundig model (hier een formule) kunnen belangrijke aspecten van het *Modelleren* goed uit de verf komen. Het nagenoeg ontbreken van algebraïsche technieken maakt het ook voor leerlingen die daar minder goed in zijn mogelijk met succes op dit onderwerp goede resultaten te behalen.
Kijken we met onze invalshoek, het bevorderen van wiskundig denken naar exponentiële groei/formule in de schoolboeken voor b.v. 3 havo, dan valt het volgende op.

Moderne Wiskunde 3A havo, Hoofdstuk 1 Exponentiële groei.
1-1 Exponentiële groei
1-2 Veranderingen in de tijd
1-3 Procentuele toe- en afname
1-4 Formules bij procentuele groei
1-5 Standaardvorm
1-6 Gemengde opdrachten

Aansluitend bij de studie van procentuele toename of afname in leerjaar 2 (met de factor en daarna met de formule verwoord met termen als 'beginhoeveelheid' en 'groeifactor') volgt een geleidelijke opbouw, die recht doet aan het leren van onze leerlingen. Een leraar die wat minder voorgestructeerd dan in het boek het wiskundig denken wil bevorderen (boek dicht), in dialoog met de leerlingen, vindt hiervoor genoeg situaties als startpunt. In dit bronnenboek is geen noodzaak om meer voorbeelden te geven. (Een mooie klassikale instap op de factor is een wedstrijdje met de bekende verhalen met 10% erbij en daarna 10% eraf, of eerst de korting eraf en dan de btw erbij, of omgekeerd?!)

Getal & Ruimte 3 havo deel 2, Hoofdstuk 8 Allerlei verbanden

8.1 Exponentiële groei
8.2 Procenten en groeifactoren
8.3 Tabellen
8.4 Periodieke verbanden
8.5 Machtsfuncties
8.6 Grafieken veranderen
8.7 Omgekeerd evenredige verbanden
8.8 Exponentiële groei met GeoGebra

In 8.1 wordt meteen de formule meegedeeld en daar wordt mee gerekend. Daarna wordt in de theorie iets verteld over exponentiële afname. In 8.2 wordt verteld hoe het zit met de factor bij procentuele toename en daarna over de procentuele afname. In 8.3 wordt verteld hoe je uit een tabel de formule kunt maken, terwijl daarna leerlingen de lineaire en exponentiële groei mogen vergelijken. In 8.8 lossen de leerlingen exponentiële vergelijkingen op met *GeoGebra*.
Een wiskundeleraar die het wiskundig denken bij dit onderwerp wil bevorderen (en het niet-denken wil vermijden) doet er goed aan de eigen lessen te ontwerpen in de geest van het hoofdstuk uit Moderne Wiskunde. Een net zo sterk motief voor die keuze is het recht doen aan de a.s. A-leerling, voor wie deze benadering helemaal past in hun vervolgstudie in wiskunde A havo.

De nu volgende §5.3 *Allerlei Verbanden* is als volgt ingevuld:

5.3.1 Van exploreren naar structuur		De relatie tussen tabellen en formules.
	Oefeningen	"Bekende" tabellen en formules
	Opdrachten	"Nieuwe" tabellen en formules
5.3.2 Van kennis naar probleemoplossen		Formules maken en daarmee vragen beantwoorden
	Oefeningen	Relatief kleine probleemsituaties
	Opdrachten	Relatief grote probleemsituaties
5.3.3. Van exploreren naar abstraheren		Zoeken naar kenmerken van formules
	Oefeningen	Relatief eenvoudige formules
	Opdrachten	Relatief complexe formules

Plaats in de leerjaren
Verschillende *Oefeningen* en *Opdrachten* kunnen in meerder leerjaren worden ingezet. Dat geldt zeker voor de *Oefeningen*, die deels ook als terugblik op voorgaande hoofdstukken kunnen worden gebruikt. De keuze voor het maken van en werken met formules is mede ingegeven door evaluaties uit de bovenbouw, waar bij veel leraren de indruk bestaat dat leerlingen daar in de onderbouw (te) weinig aan doen.

5.1 Lineaire verbanden

Oriëntatie

Zoals in de *Oriëntatie* op dit hoofdstuk is toegelicht gaat het bij lineaire verbanden om de overgangen tussen een viertal representaties, namelijk een beschrijving in woorden (meestal context genoemd), een numerieke representatie (een tabel), een grafische representatie (een rechte lijn) en een formule of vergelijking.

5.1.1 Van exploreren naar structuur

Toelichting
In de *Oefeningen* vindt u een reeks op elkaar aansluitende opgaven die de onderlinge samenhang in dit gebied voor leerlingen kunnen versterken. U kunt ze achter elkaar laten maken, of er nu en dan een of meer uitlichten, om na te gaan of uw leerlingen al hebben begrepen dat de verschillende representaties dezelfde situatie beschrijven. In de *Opdrachten* wordt aan de hand van twee situaties hetzelfde doel nagestreefd. Met name de context van de *Sponsorloop* is heel geschikt om als denkmodel voor alle lineaire problemen te dienen. Dat betekent dat u daar in andere contexten en formele opgaven op terug kunt komen, zodat leerlingen inderdaad steun ondervinden van een voor hen herkenbare context.

Oefeningen van exploreren naar structuur

Toelichting
De gehele opbouw van al de representaties komt hier in een notendop langs. Het gaat om het versterken van de *onderlinge relatie* tussen de representaties. Het doel is dat leerlingen in alle voorkomend representaties zich onmiddellijk de vraag stellen wat de veranderlijke term is met de stap per eenheid en wat de vaste term is! Dat moeten ze ook leren te verwoorden, om het geheugen en de aanpak te ondersteunen. Dus woorden leren gebruiken als *vast* en *veranderlijk.*
Verder is het uitschrijven van de berekening met rekenpijlen in dit beginstadium een belangrijke ondersteuning van het begrip. In een later stadium, bijvoorbeeld voor de berekening van het snijpunt van twee lineaire grafieken, komt pas de 'balansmethode' in beeld. Vergelijkingen behoren tot het geheel van de verbanden en zijn niet, zoals in de 'oude' programma's vóór 12-16 en de basisvorming (invoering 1993!), een doel op zich. Hier wreekt zich in de schoolboeken het decennialang herhalen van de 'oude' opbouw, zonder het opnieuw doordenken van de kernconcepten in de 'huidige' programma's.

Parate vaardigheid
Een tabel maken en op basis daarvan een grafiek tekenen. Grafieken kunnen interpreteren in termen van de situatie.

Werkwijze
In tweetallen.

Reflectie
Deze reeks is te gebruiken als een *Instap* op lineaire verbanden. U kunt het ook inzetten op andere momenten in de bestudering van de lineaire verbanden, bijvoorbeeld ter introductie van weer een nieuw hoofdstuk over dat onderwerp. Afhankelijk van uw schoolboek kunt u doorverwijzen naar andere opgaven.

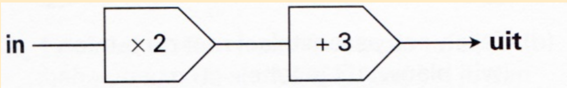
Plaats in de leerjaren
Leerjaar 1.

Relatie met schoolboeken
In leerjaar 1 en in leerjaar 2 worden lineaire verbanden besproken (overigens in leerjaar 4 opnieuw...). In *Moderne Wiskunde* 1A gaat het al heel snel naar de (woord)formule en de bijbehorende grafieken. Deze reeks opgaven kan daaraan voorafgaan. Ook in *Getal & Ruimte* deel 1 voor 1 havo-vwo worden al snel woordformules gegeven.

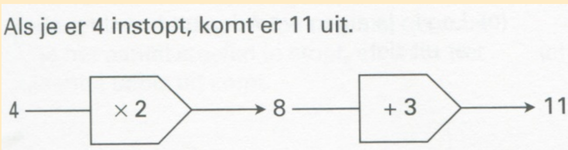
Oefening 5.1.1.1.a Rekenpijlen

Een webshop verkoopt drinkglazen voor € 2 en rekent € 3 bezorgkosten.
a. Hoeveel moet je betalen als je 10 drinkglazen bestelt?

Je kunt zo'n berekening overzichtelijk opschrijven met rekenpijlen.



Voor 4 drinkglazen wordt dat:

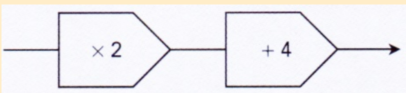


b. Schrijf de berekening voor een bestelling van 25 drinkglazen op met rekenpijlen.

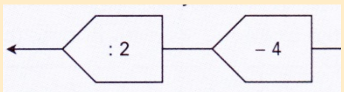
c. De bezorgkosten worden verhoogd naar € 4.
Hoe ziet de berekening met de **in-uit** rekenpijlen er dan uit?

d. Hoeveel drinkglazen heb je bij deze bezorgkosten besteld als je € 18 moet betalen?

e. Het terugrekenen vanaf de prijs kun je handig doen door de rekenpijlen om te keren:

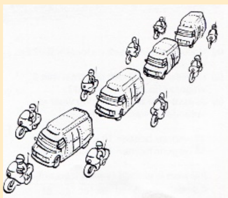


wordt



Schrijf zo de berekening op voor het geval je € 36 moet betalen.

Oefening 5.1.1.1.b Vast en veranderlijk



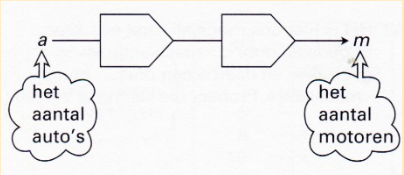
Een goudtransport met gepantserde auto's wordt begeleid door motorrijders. Aan beide kanten van een auto rijdt een motorrijder en er gaat één motor voorop.

a. Maak een tabel waarin je voor verschillende aantallen auto's het aantal motoren berekent.

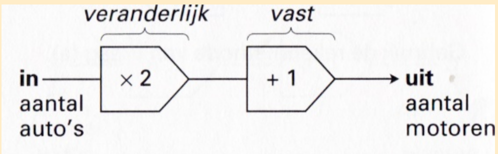
aantal auto's	aantal motoren
4 →	
7 →	

b. Schrijf je berekening als een ketting van rekenpijlen.

c. Keer de rekenpijlen om en bereken hoeveel auto's erbij 15 motoren zijn.

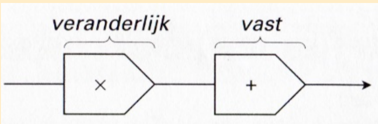


Bij de opgave over de drinkglazen moet je een veranderlijk bedrag betalen (het aantal keer de prijs per glas) en een vast bedrag (de bezorgkosten).
Bij de opgave over het aantal motoren gaat het om het aantal motoren per auto (dat verandert met het aantal auto's) en een vaste motor (voorop).
De rekenpijlen voor deze situaties zien er altijd op de volgende manier uit:



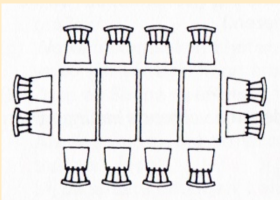
Oefening 5.1.1.1.c Een ketting van rekenpijlen maken

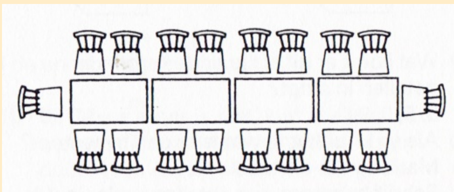
Maak bij de volgende situaties steeds de ketting van rekenpijlen. Bedenk wat het veranderlijke deel is (hoeveelheid per ..) en wat het vaste deel is.



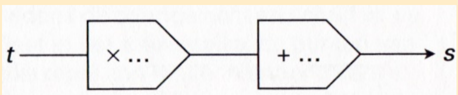
Hint: Je kunt eerst een getallenvoorbeeld doorrekenen, als je niet weet hoe je moet beginnen.

Het dorpscentrum heeft in een zaaltje rechthoekige tafels. De beheerder kan de tafels op twee manieren neerzetten.





a. Wat is de ketting van rekenpijlen voor berekening van het aantal stoelen s bij het aantal tafels t in de eerste tekening?



b. En voor de opstelling van de tweede tekening?

c. Omgekeerd kun je ook het aantal tafels berekenen als je het aantal stoelen kent. Maak voor beide opstellingen ook deze ketting van rekenpijlen.

d. De atletiekvereniging "Snel en lenig" houdt een sponsorloop om geld in te zamelen voor een nieuwe baan. Evelien haar moeder geeft haar € 5 als ze mee gaat doen en nog eens 50 eurocent voor elke ronde die ze loopt.
Wat is de ketting van rekenpijlen voor de berekening van haar opbrengst?

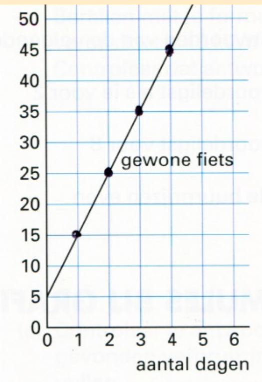
e. Het heeft haar moeder € 25 gekost. Hoeveel rondjes heeft Evelien gelopen?

Je kunt bij vraag c ook gewoon terugrekenen door de ketting van rekenpijlen uit a en b om te klappen.
Doe dat ook maar eens bij vraag e.

Oefening 5.1.1.1.d *Grafieken bij vast en veranderlijk*

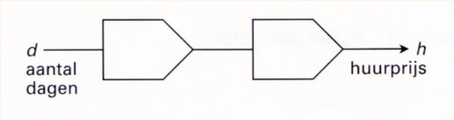
Het fietsverhuurbedrijf De Peddelaar gebruikt grafieken, waarmee de klanten direct de kosten van het huren van een fiets kunnen aflezen. Verticaal zijn de kosten in euro's afgezet. De Peddelaar verhuurt alleen per hele dagen, zoals in de grafiek door de dikke punten is aangegeven.

a. Neem de grafiek over en ga door tot tien dagen.



b. Hoeveel euro rekent De Peddelaar voor 9 dagen?
En voor 14 dagen?

c. Vul de pijlenketting in met het veranderlijke deel en het vaste deel.



d. Jannes wil een fiets voor drie weken huren. Hoeveel moet hij betalen?

e. Pia heeft haar pinpas niet bij zich en € 40 in haar beurs. Voor hoeveel dagen kan zij een fiets huren?

Oefening 5.1.1.1.e Wat is voordeliger?

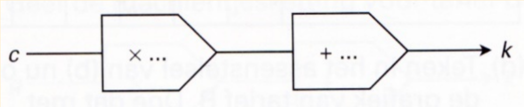
De Peddelaar voert een kortingsregel in als je meerdere dagen een fiets huurt. Voor het huren van een fiets voor meerdere dagen blijft het vaste bedrag € 5 maar de prijs per dag wordt € 4,50.

a. Maak de rekenpijlenketting bij deze kortingsregeling per dag en teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek.
b. Voor het huren van een hele week wordt voortaan € 25 per week gerekend, zonder vast bedrag. Wanneer ga je een fiets per week huren?
c. Voor elektrische fietsen rekent De Peddelaar een vast bedrag van € 30 en € 3,50 per dag extra. Vanaf welk aantal dagen is het huren van een elektrische fiets goedkoper dan het huren van een gewone fiets?

Oefening 5.1.1.1.f Formules bij vast en veranderlijk

Op de website *studentaanhuis.nl* wordt computerhulp aangeboden met het volgende tarief:
voorfietskosten + arbeidsloon per kwartier= € 9 + € 7 per kwartier

a. Een student heeft in 3 kwartier mijn computer opgeschoond. Hoeveel moet ik betalen?
b. Vul de volgende pijlenketting in, met c het aantal kwartieren computerhulp en k de kosten, die betaald moeten worden.



In woorden ziet je berekening er als volgt uit:
aantal kwartieren computerhulp c keer het bedrag per kwartier plus de voorrijkosten
In de wiskunde schrijven we zo'n rekenregel verkort vaak als een formule: $c \times 7 + 9 = k$

c. Als de computerhulp € 8 per kwartier en € 10 voorfietskosten gaat kosten, hoe ziet de formule voor de kosten k er dan uit?
d. Bereken bij dit tarief met de omkeerketting hoeveel kwartieren een student heeft gewerkt als je € 58 moet betalen.
e. Kun je op het antwoord van vraag d. ook berekenen met behulp van de formule?
Hint: De formule wordt dan de vergelijking $c \times 7 + 9 = 58$

Oefening 5.1.1.1.g Formules maken bij verhaaltjes

a. Een klusjesbedrijf komt langs voor een reparatie aan de dakgoot. Het bedrijf rekent € 35 per uur werkloon en € 10 voorrijkosten.
Maak een ketting van rekenpijlen waarmee je bij het aantal gewerkte uren u het te betalen bedrag b kunt berekenen. Stel daarna de formule voor u en b op.

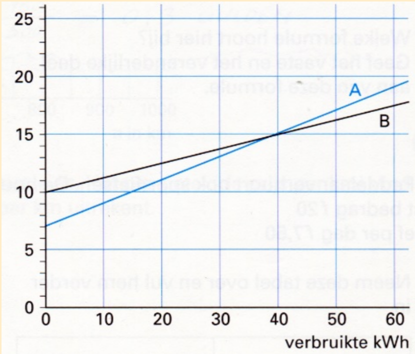
b. Voor de telefoondienst thuis rekent de telefoonmaatschappij € 40 per maand voor het abonnement en per gesprek € 0,15.
Maak een ketting van rekenpijlen waarmee je bij het aantal gesprekken g de kosten k per maand kunt berekenen. Stel daarna de formule voor g en k op.

c. Voor het waterverbruik wordt ieder jaar € 45 vastrecht in rekening gebracht en daarnaast € 1,05 per verbruikt aantal m^3 drinkwater.
Maak een ketting van rekenpijlen waarmee je bij het aantal verbruikte m^3 drinkwater w de kosten k per jaar kunt berekenen. Stel daarna de formule voor w en k op.

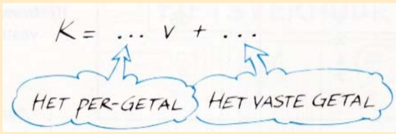
d. Zoek zelf een situatie op waarin je moet rekenen met een veranderlijk deel (hoeveelheid per...) en een vast deel (abonnement, vastrecht, startbedrag, ...). Maak weer de ketting van rekenpijlen en de formule.

Oefening 5.1.1.1.h Formules maken bij grafieken

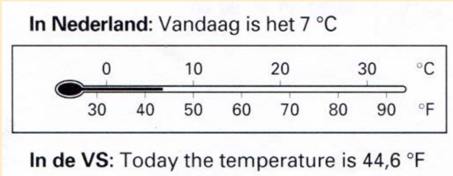
De hoeveelheid verbruikte elektriciteit v wordt gemeten in kWh (kilowattuur).
In het assenstelsel zijn twee grafieken getekend van de kosten K van het verbruik van elektriciteit in euro's bij twee verschillende tarieven A en B.
De kosten zijn opgebouwd uit een vast bedrag en een prijs per kWh.



a. Vul voor tarief A de rekenpijlenketting verder in.
b. Welke formule in v en K hoort daarbij?
c. Controleer de formule met een voorbeeld.
d. Doe hetzelfde voor tarief B.
e. Bij welk verbruik zijn de kosten voor beide tarieven gelijk?
Controleer je antwoord door een berekening.



Oefening 5.1.1.1.k *Formules gebruiken*



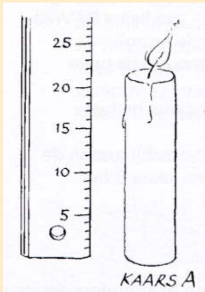
De temperatuur wordt in Nederland gemeten in graden Celsius (^{0}C).
In de Verenigde Staten wordt de temperatuur gemeten in graden Fahrenheit (^{0}F).

Het aantal graden Celsius kun je omrekenen naar graden Fahrenheit.
Dit kan met de formule: $f = 1{,}8 \text{ x } c + 32$.
In deze formule is c het aantal graden Celsius en f het aantal graden Fahrenheit.

a. Welke rekenpijlenketting hoort hierbij?
b. Controleer met de formule dat een temperatuur van 10 ^{0}C hetzelfde is als 50 ^{0}F.
c. Op een dag is het 25 ^{0}C. Wat is de temperatuur in ^{0}F?
d. Het vriespunt van water is 0 ^{0}C. Bij hoeveel graden Fahrenheit ligt dit vriespunt?
e. Maak een grafiek bij de formule met ^{0}C langs de horizontale as van – 20 ^{0}C tot 40 ^{0}C.

Oefening 5.1.1.1.j *Dalende grafieken*

De hoogte van kaars A kun je berekenen met de formule $h = 25 - 2 \text{ x } t$ met h de hoogte in cm en t het aantal uren dat de kaars brandt.

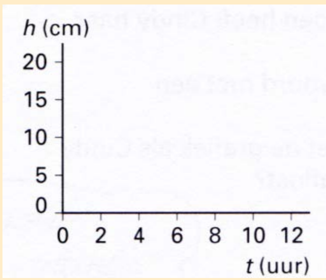


a. Maak bij deze formule de rekenpijlenketting.
b. Na 5 uur is de hoogte van de kaars 15 cm. Controleer dit door een berekening.

c. Neem de tabel over en vul die verder in.

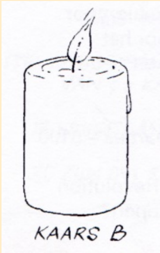
tijd t (uur)	hoogte h (cm)
0	
3	
5	15
8	
12	

d. Teken de grafiek voor de hoogte van deze kaars.
e. Na hoeveel uur is de kaars helemaal opgebrand?



Oefening 5.1.1.1.i *Nog een kaars*

De hoogte van kaars B kun je berekenen met de formule $h = 20 - 1{,}5 \text{ x } t$ met h de hoogte in cm en t het aantal uren dat de kaars brandt.



a. Wat is de beginhoogte van deze kaars?
b. Maak een tabel en teken de grafiek in het assenstelsel van de vorige opgave.
c. Na hoeveel uur branden zijn de twee kaarsen even hoog?
   Controleer je antwoord met de twee formules.
d. Na hoeveel uur is het verschil tussen de hoogten van kaars A en kaars B het grootst?

Op een rijtje zetten

Om goed te kunnen onthouden wat je in deze oefeningen hebt geleerd, moet je nu eerst alles op een rijtje zetten. Doe dat altijd met één of meer zelfbedachte voorbeelden.

Wiskundig gereedschap

Schrijf je voorbeelden met de vragen en uitwerking in een ***opzoekboekje****, zodat je het later, bijvoorbeeld voor een toets, nog eens kunt nakijken.*
Als je dat voor elk onderwerp goed bijhoudt, kun je op de duur al jouw wiskundig gereedschap in dat opzoekboekje terugvinden.
En bij wiskunde heb je vroeg of laat altijd weer iets nodig dat je "vroeger" hebt geleerd.

Opdrachten van exploreren naar structuur

Toelichting
Aan de hand van een tweetal grote denkcontexten wordt de samenhang tussen de verschillende representaties versterkt met toenemend verdiepen en wiskundige denkactiviteiten als algebraïseren en modelleren. Een goede denkcontext gaat functioneren als een denkmodel waarop steeds kan worden teruggegrepen. Voorwaarde voor dat functioneren is wel dat in de lessen en tijdens de reflectiemomenten steeds dat denkmodel weer wordt geactualiseerd en toegepast in de nieuwe situatie.

Parate vaardigheid
Een tabel maken en op basis daarvan een grafiek tekenen. Grafieken kunnen interpreteren in termen van de situatie.

Werkwijze
In groepjes.

Reflectie
Deze *Opdrachten* zijn te gebruiken als een *Instap* op lineaire verbanden. U kunt het ook inzetten op andere momenten van de bestudering van de lineaire verbanden, bijvoorbeeld ter introductie van weer een nieuw hoofdstuk over dat onderwerp. Afhankelijk van uw schoolboek kunt u doorverwijzen naar andere opgaven.

Plaats in de leerjaren
Leerjaar 1.

Relatie met schoolboeken
In leerjaar 1 en in leerjaar 2 worden lineaire verbanden besproken. (Overigens in leerjaar 4 opnieuw...) In Moderne Wiskunde 1A gaat het al heel snel naar de (woord)formule en de bijbehorende grafieken. Deze reeks opgaven kan daaraan voorafgaan. Ook in Getal & Ruimte deel 1 voor 1 havo-vwo worden al snel woordformules gegeven.

De sponsorloop
Je doet mee aan een sponsorloop. Het bedrag dat je ophaalt hangt af van het aantal rondjes dat je loopt. Je hebt verschillende sponsoren (je moeder, je opa, de buurvrouw, je grote zus, ...) die allemaal een verschillende beloning uitbetalen.
In de volgende opdrachten bekijken we die verschillen en ontdekken we de achterliggende wiskunde.

Opdracht 5.1.1.2.a Betaling per rondje

Opa betaalt je € 7 per rondje.

a = *het aantal rondjes*	0	*1*	*2*	*3*	...
b = *het bedrag*					

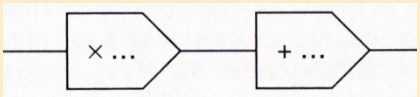
Maak een tabel voor maximaal 10 rondjes.
Teken in een geschikt assenstelsel de bijbehorende grafiek.
Horizontaal het aantal rondjes a en verticaal het bedrag b.

Opdracht 5.1.1.2.b   Een startbedrag

Je moeder haalt je over de streep om toch mee te doen door je in ieder geval als startbedrag € 20 te beloven en daarbovenop nog € 5 per rondje.

a. Maak weer een tabel en teken in hetzelfde assenstelsel van de vorige opdracht de grafiek van je moeders uitbetaling.
b. Bij welk aantal rondjes krijg je meer van je moeder dan van je opa?
c. Je krijgt van je moeder na de sponsorloop € 45. Hoeveel rondjes heb je gelopen?

Opdracht 5.1.1.2.c   Rekenpijlen



De berekening van de beloning van je moeder kun je eenvoudig weergeven met een ketting van rekenpijlen. Je begint links met het aantal rondjes *a*. Daarna vul je in de keer-pijl de opbrengst per rondje in en daarna tel je het startbedrag erbij op. Rechts komt er dan het bedrag *b* uit.

a. Bereken met de ketting van rekenpijlen de opbrengst bij 17 gelopen rondjes.
b. Je zus geeft je € 5 als startbedrag en € 6 per rondje. Bereken met de ketting van rekenpijlen haar opbrengst bij 7 gelopen rondjes.
c. Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek van haar bedrag *b*. Wat valt je op? Kun je uitleggen waarom dat zo is?

Het antwoord op vraag c van de vorige opdracht kun je met de rekenpijlen snel berekenen als je de rekenstappen omkeert. Rechts zet je die € 45 en daarna klap je de rekenpijlen om en reken je terug.

d. Bereken zo het aantal rondjes als je moeder je € 85 uitbetaalt.

Opdracht 5.1.1.2.d   Formules

In de vorige opdrachten gaat het steeds over de manier waarop je het bedrag kunt berekenen uit het aantal rondjes. Dat verband tussen het eindbedrag en het aantal rondjes wordt in de wiskunde vaak geschreven als een formule.

Je moeder rekent eigenlijk met de volgende formule:
bedrag b *= aantal rondjes* a *keer 5 + 20.*   *Afgekort geeft dat de formule:* $b = a \text{ x } 5 + 20$.

a. Bedenk zelf de formule die je zus heeft gebruikt.
b. Je buurvrouw betaalt uit volgens de formule: $b = a \text{ x } 3 + 10$. Wat betaalt zij per rondje? Wat is haar startbedrag?

Opdracht 5.1.1.2.e Vast en veranderlijk

In de praktijk kom je veel berekeningen tegen zoals in de sponsorloop/ Steeds betaal je een vast bedrag en een veranderlijk bedrag dat afhangt van het aantal keren dat je iets doet of gebruikt.

a. Met een abonnement van € 25 per jaar kost een kaartje per keer maar € 5. Welke formule geeft dit verband weer tussen het bedrag b dat je per jaar moet betalen, als je n keer gaat zwemmen?

b. Per maand brengt het gasbedrijf bij een verbruik van g m^3 een bedrag b in rekening volgens de formule: $b = 0,54 \text{ x } g + 4,50$.
Wat is het *vastrecht* in deze formule?
Hoe hoog is de rekening deze maand bij een verbruik van 200 m^3 ?

Een vast deel en een veranderlijk deel
*In de voorgaande opdrachten gaat het steeds om een berekening waarin een **vast deel** (startbedrag, abonnement, vastrecht) voorkomt en een **veranderlijk deel** (**per** rondje, **per** keer zwemmen, **per** m^3).*
In de rekenpijlenketting en de formule kun je dat vaste deel en het veranderlijke deel direct terugvinden.

Opdracht 5.1.1.2.f Vast en veranderlijk in grafieken

Het vaste deel en het veranderlijke deel kun je ook terugvinden in de bijbehorende grafieken.

a. Bedenk zelf drie verschillende sponsorregelingen met eenzelfde startbedrag en een wisselende uitbetaling per rondje. Teken in een assenstelsel de drie bijbehorende grafieken. Schrijf op wat je opvalt. Had je dat kunnen voorspellen?
b. Bedenk zelf drie verschillende sponsorregelingen met een wisselend startbedrag en eenzelfde uitbetaling per rondje. Teken in een assenstelsel de drie bijbehorende grafieken. Schrijf op wat je opvalt. Had je dat kunnen voorspellen?
c. Wat kun je voorspellen over de onderlinge ligging van de grafieken, die bij de volgende vier sponsorformules horen?
Tante: $b = 2 \text{ x } a + 5$ Oma: $b = 5 \text{ x } a$ Broer: $b = 5 \text{ x } a + 5$ Oom: $b = 2 \text{ x } a$

Opdracht 5.1.1.2.g   Hoe hoger boven de aarde hoe lager de temperatuur

Het wordt kouder als je hoger boven de grond komt. Dat komt vooral door de afname van de luchtdruk (luchtdichtheid). Als vuistregel gaat men ervan uit dat het 0,6 ^{0}C kouder wordt per 100 m dat je boven de aarde opstijgt.

a. Als het op de plaats waar je nu bent 20 ^{0}C is, wat is dan de temperatuur op 1 km hoogte?
b. Maak een pijlenketting en een formule waarmee je de temperatuur T op de hoogte van H hectometer (1 hm = 100 m) berekent voor deze begintemperatuur van 20 ^{0}C en de daling van 0,6 ^{0}C per 100 m.
c. De daling per hm varieert niet maar de begintemperatuur wel.
Teken in één assenstelsel de grafieken van T (verticale as) tegen H (horizontale as) voor drie verschillende begintemperaturen. Wat valt je op?
d. Op de display in een vliegtuig dat op 10 km hoogte vliegt, staat dat het buiten –50 ^{0}C is. Wat is volgens de vuistregel de temperatuur op de grond?

Opdracht 5.1.1.2.h   Temperatuur onder de grond

Het wordt warmer als je onder de grond gaat, bijvoorbeeld in een mijn, omdat de kern van de aarde heet is. Die aardwarmte wordt wel gebruikt voor verwarming van huizen en het opwekken van elektriciteit.
In ons niet-vulkanische land is de temperatuur op 25 m diepte constant 9 ^{0}C, ongeacht de temperatuur boven de grond. Met boringen heeft men de temperatuur op verschillende diepten gemeten. De conclusie is dat elke 33 meter dat men dieper dan 25 m de aardkorst binnen dringt de temperatuur 1 ^{0}C stijgt.

a. Maak de tabel af.

diepte d in meters	25	58	...	...
temperatuur T in ^{0}C	9	10	...	...

b. Welke ketting van rekenpijlen hoort hierbij?
c. Hoe kun je de formule schrijven?

Op een rijtje zetten

Bedenk zelf een sponsorloop en stel er vragen bij.
Schrijf in je opzoekboekje wat je zoal hebt geleerd.

5.1.2 Van kennis naar probleemoplossen

Toelichting
Natuurlijk is het aantal mogelijke opgaven op het gebied van lineaire verbanden onuitputtelijk, maar de *Oefeningen* en *Opdrachten* in deze paragraaf gaan voornamelijk over contexten van lineaire verbanden en de bijbehorende formule. Daarmee willen werken we aan de omissie die van Van Stiphout (2011) constateerde, namelijk dat de overgang van informele naar meer formele beschrijvingen van lineaire verbanden zwak in de schoolboeken wordt uitgewerkt. Ook in de bovenbouw van havo-vwo blijkt tot op het eindexamen die overgang voor veel leerlingen een obstakel te zijn, in plaats van een ondersteuning van het begrip. (Zie bijvoorbeeld *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*, 2014.).

Parate vaardigheid
Voor het kunnen maken van de volgende *Oefeningen* is een basis aan kennis van de lineaire verbanden (tabellen, grafieken, formules, vergelijkingen) gewenst, hoewel veel opgaven ook prima op basis van een gezond verstand redenering kunnen worden gemaakt.

Werkwijze
In groepjes.

Reflectie
Deze reeks is te gebruiken als een *Verwerking* van lineaire verbanden. U kunt verschillende opgaven ook inzetten op andere momenten tijdens de bestudering van de lineaire verbanden, bijvoorbeeld ter introductie van weer een nieuw hoofdstuk over dat onderwerp. Afhankelijk van uw schoolboek kunt u doorverwijzen naar andere opgaven.

Plaats in de leerjaren
Leerjaar 1 en/of 2.

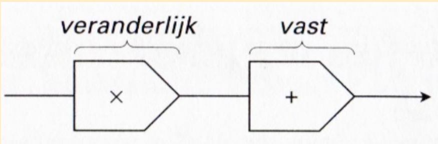
Relatie met schoolboeken
In de leerjaren 1 en 2 worden lineaire verbanden besproken. (Overigens in leerjaar 4 opnieuw...). Deze reeks opgaven (of afzonderlijke opgaven) kunnen tijdens de opbouw of bij de afronding worden ingezet. Of als diagnostische start in 4 havo-vwo.

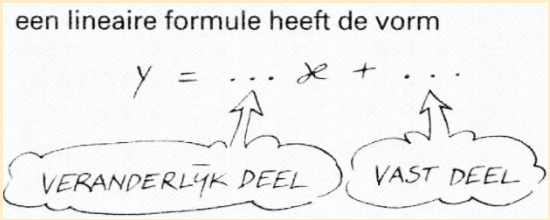
Oefeningen van kennis naar probleemoplossen

Toelichting

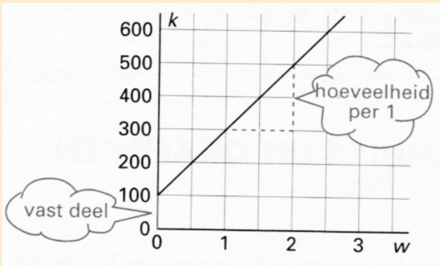
In deze opgaven gaat het steeds om een enkelvoudige transformatie van de ene representatie in de andere. Ergens in de onderbouw zou dat parate kennis moeten worden, maar in de bovenbouw blijkt dat niveau van beheersing bij veel leerlingen nog niet bereikt. De volgende reeks opgaven is ook in te zetten als een diagnostisch toetsje, om na te gaan in welke mate leerlingen dit beheersingsniveau na het voorafgaand onderwijs hebben bereikt.

Lineaire formule

x  y



Formule: $K = 200 \cdot w + 100$

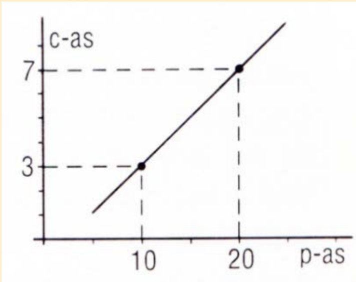


Oefening 5.1.2.1.a Het klusjesbedrijf

Een klusjesbedrijf brengt bij reparatie voorrijkosten en uurloon in rekening. De voorrijkosten zijn € 48. Het uurloon bedraagt € 52. Geef de duur van de reparatie aan door u (aantal uren) en de totale kosten van de reparatie door k (kosten).
Welke formule geeft het verband aan tussen u en k ?

Oefening 5.1.2.1.b Het cijfer voor de toets

Voor een toets zijn 30 punten te behalen. De docent bepaalt de cijfers met behulp van de grafiek hiernaast. Uit de grafiek is het verband op te maken tussen het aantal punten p en het bijbehorende cijfer c .
Welke formule geeft dat verband tussen p en c weer?



Oefening 5.1.2.1.c Berekening kosten elektriciteit

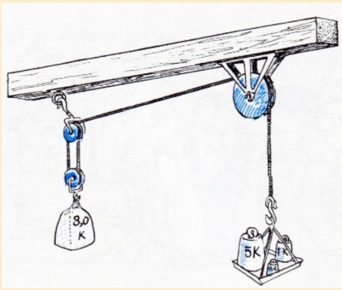
Bij een elektriciteitsbedrijf kan men kiezen uit twee jaartarieven waar de volgende formules voor gelden:
$E = 6000 + 18v$ en $N = 7000 + 20v$ met v het verbruik in kWh en de kosten in eurocenten.
Bij welk verbruik is het tarief E voordeliger dan het tarief N ?

Oefening 5.1.2.1.d Autokosten

Van een auto met benzinemotor zijn de vaste kosten (belasting, verzekering e.d.) per jaar € 4000. De veranderlijke kosten (zoals benzine) zijn € 0,35 per kilometer.
Van een auto met dieselmotor zijn de vaste kosten € 6000 en de veranderlijke kosten € 0,19 per kilometer.
Bij welk aantal gereden kilometers is de auto met dieselmotor voordeliger?

Oefening 5.1.2.1.e De katrol

Twee studenten vragen zich af hoe de katrol in hun studentenhuis, een oud pakhuis, werkt.
Ze experimenteren door het gewicht L van de lading aan de haak in evenwicht te brengen met het gewicht B aan het losse eind (de trekkracht).
In de tabel staan de resultaten van hun experiment. L en B zijn uitgedrukt in kilogram.



L	5,0	8,0	9,0	12,0
B	4,9	6,4	6,9	8,4

Welke formule geeft het verband weer tussen L en B ?

Opdrachten van kennis naar probleemoplossen

Toelichting
De volgende *Opdrachten* zijn lineaire contextproblemen, die meerdere stappen vereisen om tot een bevredigend antwoord te komen. Leerlingen kunnen zelf kiezen of zij tabellen, formules, grafieken of een directe redenering gebruiken.

Opdracht 5.1.2.2.a   Zwemparadijs "De Bonte Wever" in Slagharen

Het tropisch zwemparadijs *"De Bonte Wever"* in Slagharen had een tijd geleden een creatieve variatie aan toegangsprijzen.
Er werden toen voor volwassenen drie tarieven aangeboden:

Per keer betalen:	*ƒ* 10,- (tien gulden) per anderhalf uur.
Met jaarabonnement:	*ƒ* 62,50 en *ƒ* 3,50 per anderhalf uur.
"Naober"-abonnement:	*ƒ* 25,- en *ƒ* 5,- per anderhalf uur.

Zoek uit wanneer het ene tarief voordeliger is dan het andere.
Schrijf een advies voor eventuele bezoekers.

Opdracht 5.1.2.2.b   Zwemparadijs "De Bonte Wever" in Assen

In 2001 brandde het complex helemaal af. Daarna werd een nieuw complex gebouwd in Assen. Ook dit nieuwe *De Bonte Wever* in Assen kent een grote variatie aan tarieven. Die tarieven vind je verderop in deze opgave.

Het gezin Pietersen met vader, moeder, Karel (11 jaar), Frits (8 jaar), Mia (5 jaar) en Agnes (2 jaar) wil iedere week een keer samen zwemmen.
Wegens de verhoogde prijzen in de weekends en schoolvakanties kiezen ze eerst maar voor het Babyzwemmen op vrijdagmiddag.
Na een paar weken bedenkt Karel dat hij veel liever op zaterdagmorgen gaat met de *"Gezinsplons"*
Vader denkt dat ze beter een "*Voordeelkaart"* kunnen nemen.

Bereken voor dit gezin alle tarieven en adviseer hen over de kosten.

All-in tarief per bezoek

	Volwassenen	Kinderen 4 t/m 12 jaar	Kinderen t/m 3 jaar
Maandag t/m vrijdag*	€ 8,00 p.p.	€ 6,00 p.p.	Gratis
Zaterdag, zondag, feestdagen	€ 10,50 p.p.	€ 7,00 p.p.	Gratis

*Tijdens de schoolvakanties (m.u.v. de zomervakantie) wordt ook op doordeweekse dagen (maandag t/m vrijdag) het weekendtarief gehanteerd.

Speciale tarieven

Maandag t/m vrijdag: aankomst na 19.30 uur (m.u.v. feestdagen)	€ 5,75 p.p.
Iedere vrijdagmiddag: kindermiddag 14.00 – 19.00 uur	€ 3,50 p.p.
Gezinsplons twee volwassenen en twee kinderen t/m 12 jaar (zaterdag en zondag 09.30 – 12.30 uur)	€ 25,00
(ieder extra kind t/m 12 jaar € 3,50 p.p.)	
Babyzwemmen maximaal twee volwassenen per kind t/m 3 jaar (dagelijks mogelijk van 10.00 – 12.00 uur en 16.00 – 18.00 uur, tijdens schoolvakanties alleen mogelijk op maandag en vrijdag)	€ 5,00 per volwassene

(ieder extra kind van 4 t/m 12 jaar of volwassene betaalt de standaard entreeprijs)

Voordeelkaarten

	Volwassenen	Kinderen 4 t/m 12 jaar
10x Badenkaart geldig van maandag t/m vrijdag na 19.30 uur	€ 52,50	
15x Badenkaart geldig van maandag t/m vrijdag	€ 102,50	€ 72,50
15x Badenkaart geldig op zaterdag, zondag en feestdagen	€ 140,00	€ 87,50
15x Voordeelkaart	€ 72,50	€ 57,50

geldig van maandag t/m vrijdag tussen 10.00 en 12.00 uur en vanaf 19.30 uur (m.u.v. herfst-, kerst-, voorjaars- en meivakantie en feestdagen)

Opdracht 5.1.2.2.c Hardlopers

Een hardloper vertrekt voor een duurloop van 10 km 's morgens om 9.00 uur. Hij houdt een constante snelheid van 120 meter per minuut aan. Een andere hardloper vertrekt van hetzelfde startpunt voor dezelfde duurloop om 9.15 uur. Hij houdt een constante snelheid van 200 meter per minuut aan.

a. Op welke afstand van het startpunt haalt de tweede hardloper de eerste in?
b. De Nederlandse recordhouder Kamiel Maase start om 9.30 uur en houdt een tempo aan van 20 km/u. Haalt hij de andere twee in? Zo ja, waar?

Opdracht 5.1.2.2.d De ontmoeting

Piet Pietersen komt elke dag met de trein van zijn werk en wordt dan met de auto van het station opgehaald door zijn vrouw. Vandaag komt hij een uur eerder met de trein aan. Hij wandelt zijn vrouw tegemoet. Zij komt hem onderweg tegen en samen rijden zij naar huis. Daar komen ze tien minuten eerder aan.

Hoe lang heeft Pietersen gewandeld?

Opdracht 5.1.2.2.e Het jachtluipaard

Een jachtluipaard kan over een korte afstand van circa 500 meter een heel hoge snelheid halen. Topsnelheden van 80 - 100 km/u zijn mogelijk.
Een jachtluipaard wordt in de savanne verrast door een groep ruiters met jachthonden. In een snelle sprint probeert het jachtluipaard weg te komen naar een voor honden en paarden bergachtig terrein, 1000 meter verderop. De jachtgroep kan de beginsnelheid van 50 km/u enkele kilometers volhouden.
Onderzoek of en wanneer de jachtgroep het jachtluipaard voor het bergachtig gebied inhaalt. Varieer zelf de beginafstanden en snelheden van de jachtluipaard en onderzoek verschillende mogelijkheden.

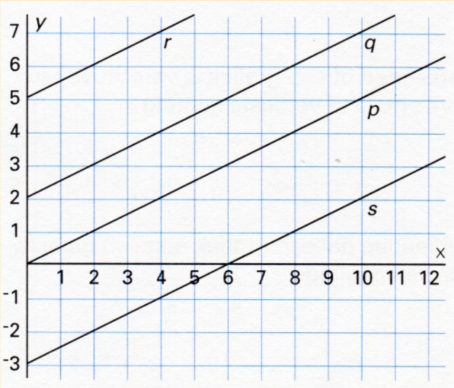
5.1.3 Van exploreren naar redeneren

Toelichting
In deze paragraaf gaat het in de *Oefeningen* om de relatie tussen de formules en transformaties, terwijl de *Opdrachten* een eerste kennismaking zijn met parameters en families van grafieken.

Oefeningen van exploreren naar redeneren

Oefening 5.1.3.1.a Evenwijdige lijnen

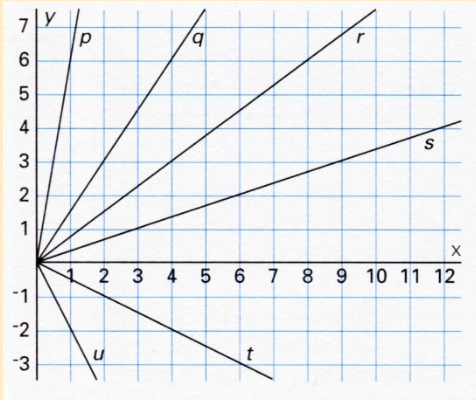
In het assenstelsel zijn vier grafieken getekend bij lineaire formules met een vast deel en een veranderlijk deel.



a. Wat is de formule in y en x van lijn p ?
b. De grafiek q kun je uit grafiek p krijgen door evenwijdige verschuiving met 2 eenheden verticaal omhoog. Wat is de formule van q ?
c. Welke formule hoort bij lijn r en welke bij lijn s ?
d. Een lijn t loopt ook evenwijdig met p en start in het punt (0, 10).
Welke formule hoort bij lijn t ?

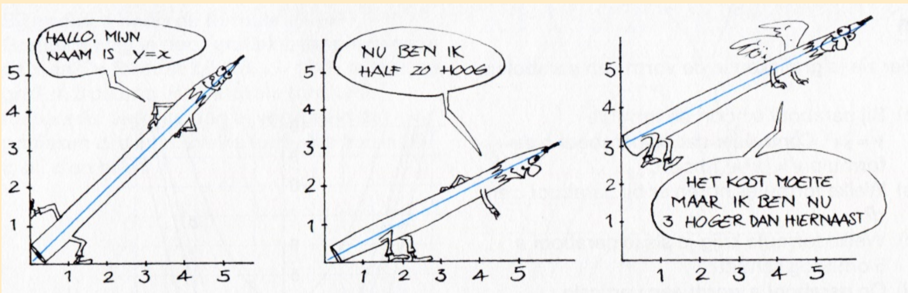
Oefening 5.1.3.1.b   Een waaier van lijnen

Je ziet in dit assenstelsel een waaier van grafieken getekend, die allemaal door de oorsprong (0, 0) gaan.



a. Geef bij elke grafiek de formule.
b. De hele waaier schuift verticaal 3 eenheden omhoog.
   Wat verandert er nu aan de formules?

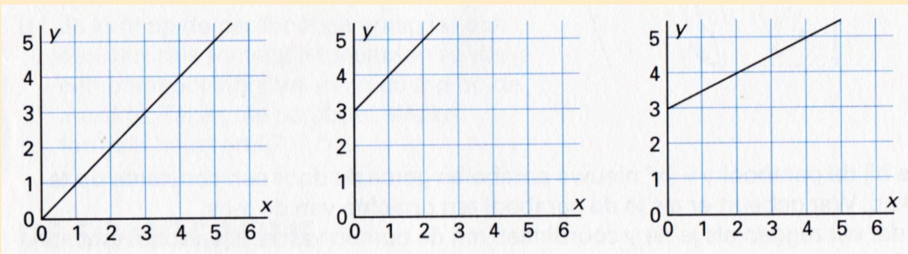
Oefening 5.1.3.1.c   Een stripverhaal



In deze strip kun je driemaal een grafiek herkennen.

a. Welke formules horen hierbij?

b. Je kunt de eerste grafiek ook eerst verschuiven en daarna minder steil maken.



Welke formules horen bij de drie grafieken?

Oefening 5.1.3.1.d   Spiegelen

a. Teken een (x, y)-assenstelsel, dat horizontaal loopt van – 4 naar + 4 en verticaal van – 5 tot + 5. Teken daarin de grafiek die hoort bij de formule $y = x$.
b. Spiegel die grafiek in de x-as. Welke formule hoort bij de nieuwe grafiek?
c. Spiegel de grafiek van $y = x$ nu in de y-as. Wat is de formule van die grafiek?

Oefening 5.1.3.1.e   Nog meer spiegelingen

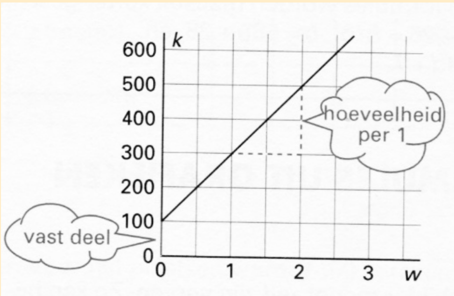
a. Teken weer een (x, y)-assenstelsel, dat horizontaal loopt van -4 naar +4 en verticaal van -5 tot +5. Teken daarin de grafiek bij $y = x + 2$.
b. Spiegel die grafiek in de y-as. Welke formule hoort bij de nieuwe grafiek?
c. Spiegel de grafiek van $y = x + 2$ nu in de x-as. Wat is de formule van die grafiek?
d. Kun je uitleggen wat er met de formule van $y = x + 2$ gebeurt bij de eerste en de tweede spiegeling?
e. Kun je zonder te tekenen de formules bedenken die horen bij de spiegelbeelden van de grafiek die bij de formule $y = 2x - 4$ hoort?

Opdrachten van exploreren naar redeneren

Toelichting
Enkele opdrachten over families van lineaire verbanden, formules en grafieken.
Vanzelfsprekend is er meer mogelijk als leerlingen al over *GeoGebra* beschikken.
Bij de *Oefeningen* zijn de grafieken het startpunt, in deze *Opdrachten* de formule.

Families van formules en grafieken
Formules, waarvan de grafieken een gemeenschappelijke eigenschap hebben, noemen we wel een familie. In de volgende *Opdrachten* bekijken we een paar families. Behalve de y en de x komt er in de formule nog een letter voor, waar je verschillende getallen voor mag kiezen.

Formule: $k = 200 \cdot w + 100$



De meest algemene lineaire formule, waarvan de grafiek een lijn is, heeft de vorm $y = ax + b$.
Het getal a geeft de hoeveelheid **per** eenheid aan en in de grafiek is het de helling. Het getal b is het vaste getal en in de grafiek is het te vinden als de y-waarde van het snijpunt met de y-as.

Gebruik in de volgende opdrachten steeds een assenstelsel met x- en y-waarden die variëren van -5 tot +5.

Opdracht 5.1.3.2.a De lijnenwaaiers

a. De formule $y = ax$ hoort bij een familie van grafieken die we een *lijnenwaaier* noemen. Teken in het assenstelsel een viertal leden van die familie.

b. Een andere familie van grafieken die een lijnenwaaier vormen heeft de formule $y = ax + 2$. Teken in hetzelfde assenstelsel een viertal leden van deze familie, waarvan de grafieken evenwijdig lopen aan die van de vorige vier.

c. Welke formules horen bij deze 4 paren grafieken?

d. Spiegel beide families in de y-as.
Krijg je nu twee andere families? Welke formules horen daarbij?

e. Spiegel beide families in de x-as.
Krijg je nu twee andere families?
Welke formules horen daarbij?

Opdracht 5.1.3.2.b Evenwijdige lijnen

a. De formule $y = -\frac{1}{2}x + b$ hoort bij een familie van grafieken die bestaat uit allemaal evenwijdige lijnen. Teken in het assenstelsel een viertal leden van deze familie.

b. De formule $y = 2x + b$ hoort bij een andere familie.
Teken in het assenstelsel een viertal leden van deze familie, die hetzelfde snijpunt met de y-as hebben als de vorige vier.

c. Onderzoek nu wat er gebeurt met deze beide families als de grafieken worden gespiegeld in de x-as. Welke formules horen daarbij?

d. Onderzoek nu wat er gebeurt met deze beide families als de grafieken worden gespiegeld in de y-as. Welke formules horen daarbij?

5.2 Kwadratische verbanden

Oriëntatie

Traditioneel lag er een zwaar accent op tweedegraadsfuncties en vergelijkingen, mede omdat daarvoor sluitende algebraïsche algoritmen en formules waren te onderwijzen. De verleiding is groot om dan maar achtereenvolgens al de voorkomende technieken voor te doen en daarop te oefenen, volgens het didactische model VNO, Voordoen-Nadoen-Oefenen. De nadruk valt dan op het memoriseren van losse feiten en technieken, zonder dat leerlingen zich daar iets bij kunnen voorstellen. Het is ook niet zo eenvoudig om zich iets voor te stellen bij een kwadratische formule, omdat zinvolle contexten die in de opbouw als denkmodel zijn te gebruiken, anders dan bij lineaire en exponentiële verbanden, nagenoeg afwezig zijn. De parabool is eigenlijk de enige 'context' die houvast geeft aan het interpreteren van een formule of een vergelijking. Die grafische betekenis kan veel meer worden benut dan nu in de schoolboeken het geval is. Daar gaat deze paragraaf over.

Veel leerlingen proberen zich bij het begin van de bovenbouw vaak tevergeefs te herinneren hoe het ook al weer moest. Ze kunnen geen *betekenis* geven aan de verschillende formules en missen het overzicht, de *samenhang*, op dit deelgebied. Met het oog op het ontwikkelen van het wiskundig denken van de leerlingen is het essentieel dat zij vanaf het begin mee kunnen denken in de opbouw van dit deelgebied. De parate kennis en vaardigheden waar zij aan het einde van de onderbouw over moeten beschikken kunnen in de opbouw heel goed worden gekoppeld aan wiskundige denkactiviteiten. Tabellen en grafieken spelen in die opbouw een grote rol en helpen leerlingen ook tot aan het einde van de onderbouw terug te grijpen op de *betekenis* van het algebraïsche rekenwerk.

5.2.1 Van exploreren naar structuur

Toelichting

De wiskundige denkactiviteiten in dit gebied zijn gecentreerd rond de grafiek van een kwadratische formule, waarbij de tabel in eerste instantie een belangrijk hulpmiddel is om die grafiek te onderzoeken. Het ligt daarbij voor de hand om in de opbouw geleidelijk de complexiteit van de formule uit te breiden. Eigenlijk gaat het in de ogen van de leerlingen om drie of vier typen formules, die in de gangbare opbouw separaat worden aangeboden. Telkens weer blijkt dan ook dat voor de leerlingen de samenhang tussen die formules ontbreekt, ook al wordt geprobeerd die achteraf nog eens aan te brengen. Die samenhang moet vanaf het eerste begin gekoppeld worden aan de verbindende kern, de grafiek van het kwadratische verband. Elk type formule geeft weer andere informatie over de parabool.

Kijken we in de schoolboeken, dan is de opbouw decennialang ongewijzigd gebleven. Afzonderlijke hoofdstukken over *vergelijkingen en grafieken* starten met de meest algemene formule en theorie met opgaven die geen ruimte geven aan het zelf exploreren door leerlingen. Achteraf nog eens relaties leggen tussen de grafiek en de verschillende vormen van een kwadratische formule met algebraïsche herleidingen is mosterd na de maaltijd. In het langetermijngeheugen zijn de losse brokjes kennis al opgeslagen en, zolang het duurt, gememoriseerd.

In deze paragraaf 5.2.1 is ervoor gekozen om een gestructureerde reeks *Oefeningen* aan te bieden, waarin voortdurend de samenhang tussen elk type formule en de grafische betekenis wordt benadrukt. Wegens de complexiteit van dit deelgebied voor onze leerlingen lijkt het voor de meeste leerlingen niet haalbaar om met een enkele grote opdracht zelf alle mogelijke relaties te ontdekken en tot parate vaardigheid te ontwikkelen. De enige reële mogelijkheid is het maximaal inzetten van een grafisch programma als *GeoGebra*. Zie *Opdracht 5.2.1.2.a.*

Oefeningen van exploreren naar structuur

Toelichting

De volgende reeks opgaven kan worden gebruikt als *start* van het deelgebied van de kwadratische verbanden. Met deze opgaven kunnen leerlingen de relatie tussen een formule en de grafiek exploreren en op die manier conclusies leren trekken over de ligging van de parabool bij verschillende typen kwadratische formules. Het gaat daarbij in de eerste plaats om het ontwikkelen van *symbol sense,* met name het interpreteren van een formule in termen van de grafische voorstelling. Daar hoort een *houding* bij van eerst rustig de formule inspecteren en daar vragen aan stellen! Niet meteen rekenen maar eerst nadenken over wat je zoal weet over zo'n formule.

Het leerdoel is dat leerlingen leren de kwadratische formules met een x^2 of een $-x^2$ te classificeren en de eigenschappen van de bijbehorende parabolen af te leiden. Uit elke type formule kan de relevante informatie worden gehaald over de parabool, dus symmetrieas, top, nulpunten en snijden met een horizontale lijn. Symmetrie met symmetriepunten levert altijd de symmetrieas. Het algebraïsch rekenwerk, zoals het ontbinden in factoren, kan beter later komen, als het waarom van die herleidingen duidelijk is geworden. Uitdrukkelijk worden andere typen formules of parabolen doorgeschoven naar een latere bespreking in uw schoolboek.

De basis voor het begrip en het tekenen van een grafiek is het zelf maken van een tabel en dat kan niet vervangen worden door een plaatje uit het boek of een grafisch programma. Leerlingen kunnen altijd op de tabel teruggrijpen, als ze geen andere weg zien.
Vergelijkingen krijgen hun *betekenis* door de bijbehorende grafische voorstellingen. Leerlingen leren vanaf het begin een kwadratische vergelijking te *interpreteren* in termen van het snijden van grafieken.
Het *algebraïsch* oplossen van een kwadratische vergelijking is hier nog beperkt tot de gegeven ontbonden vorm en de gegeven kwadratische vorm. Beide oplossingsmethoden kunnen aan de hand van deze eenvoudige vergelijkingen worden aangeleerd of opgefrist. De *technieken* van het leren ontbinden in factoren of het kwadraat afsplitsen komen later! Op het moment dat ze nodig zijn voor het beantwoorden van vragen over de parabool.

Parate vaardigheid

Een tabel maken en op basis daarvan een grafiek tekenen.
Begrijpen wat een vergelijking is (algebraïsch en grafisch).
Een oplossingsstrategie van vergelijkingen beheersen door de vergelijking eerst te inspecteren, te herleiden door op beide leden dezelfde rekenoperatie toe te passen, eventueel na inspectie de "bordjesmethode" gebruiken.

Werkwijze

In tweetallen samenwerken, om elkaar aan te vullen en te controleren.

Reflectie

In de nabespreking van elk groepje opgaven (typen formules) kunt u ter afsluiting (!) laten bedenken wat de parate kennis moet worden. In de laatste opgave wordt de leerlingen gevraagd om alle kennis op een rijtje te zetten. Dat blaadje kunt u eventueel een keer innemen en bekijken. Een afsluitende diagnostische toets is gewenst om na te gaan of alle(!) leerlingen de bedoelde parate vaardigheden hebben verworven.

Plaats in de leerjaren

Ergens in 2 havo-vwo, voordat in het boek dit onderwerp wordt opgepakt.
Eventueel in begin leerjaar 3.

Relatie met schoolboeken

Kiest u voor een start met de genoemde leerdoelen bij deze reeks oefeningen, dan kunt desgewenst veel afleidende paragrafen en opgaven uit de boeken schrappen. Een mogelijk vervolg is een selectie van opgaven uit de schoolboeken waarin hetzelfde doel voor het algemene geval (*a* niet alleen 1 of -1) wordt nagestreefd. Daarna komen de herleidingen van de algemene formule naar een ontbonden vorm of een kwadraat-afgesplitste vorm, als u dat ook wilt onderwijzen. Uiteraard kunt u er ook voor kiezen om dan alleen de abc-formule aan te leren, voor noodgevallen.

Moderne Wiskunde

In deel 2A hoofdstuk 5 volgen na een korte introductie drie paragrafen over haakjes wegwerken en daarna nog een paragraaf over kwadratische *vergelijkingen* in de kwadratische vorm. In deel 2B gaat het in hoofdstuk 11 over het leren ontbinden in factoren met een slotparagraaf over kwadratische vergelijkingen.
Als u, zoals hier beargumenteerd, wel de grafiek centraal wilt stellen, dan kunt u deze serie opgaven ergens tussen beide hoofdstukken plaatsen, zodat u in hoofdstuk 11 duidelijk kunt maken, waarom dat ontbinden een nuttige vaardigheid is. Zelf kunt u al die opgaven over vergelijkingen oplossen aanvullen met een vraag over de bijbehorende grafiek.
In deel 3B wordt, wat dit onderwerp betreft, afgesloten met een poging om achteraf nog een verband te leggen tussen het type kwadratische formule (functievoorschrift) en de grafiek, onder andere met opgaven die al in de voorgaande oefeningen voorkomen. Onderzoek wijst uit dat het starten met het geheel (hier die relatie tussen de formules, de grafiek en de vergelijkingen) tot een meer samenhangend relatienetwerk in het geheugen leidt dan het achteraf proberen de separaat aangeboden brokjes kennis nog weer samen te voegen.

Getal & Ruimte

In leerjaar 2 gaat het over ontbinden in factoren en het daarmee oplossen van een kwadratische vergelijking.
In de delen 1 voor 3 havo en 3 vwo wordt in hoofdstuk 3 een serieuze start gemaakt met de kwadratische functies, waarin alle kennis over parabolen achter elkaar wordt behandeld. In de eerste paragraaf worden in de opgaven bij een functievoorschrift in de algemene vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ twee symmetriepunten weggegeven om de symmetrieas en de top te kunnen berekenen. In de gekleurde samenvatting wordt uiteengezet dat je met een tabel punten van symmetrie t.o.v. de as kunt vinden en dan meteen ook de top.
In §3.5 wordt de methode om de x-coördinaat van de top te berekenen uit de nulpunten ‘omslachtig’ genoemd, gevolgd door de tekst: “*Gelukkig bestaat er een eenvoudige manier om de top van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$ te vinden. Er geldt namelijk $x_{top} = \frac{-b}{2a}$*”.
Daarna volgen kwadratische vergelijkingen, de ontbonden vorm met daaruit de conclusies over de parabool, de kwadratische vorm met daaruit de conclusies over de parabool, de techniek van het kwadraat afsplitsen en het oplossen van vergelijkingen met het kwadraat afsplitsen. Terloops moeten ook de formules bij gegeven parabolen worden opgesteld. Indrukwekkend, maar leidt dat echt tot een blijvend leerresultaat op iets langere termijn?
De volgende reeks oefeningen in dit bronnenboek kan bijvoorbeeld aan het begin van het derde leerjaar worden doorgewerkt en vormt dan een goede voorbereiding op het hoofdstuk 3, waarvan de opgaven in een analoge structuur kunnen worden geplaatst. En wellicht kan of moet er veel worden geschrapt.

Terzijde

Gelet op de aansluiting op 4 havo en 4 vwo is het raadselachtig waarom leerlingen in leerjaar 3 in beide methoden worden lastiggevallen met functienotaties. Uiteraard leidt dat ook bij veel leerlingen tot onbegrip en komische titels van achtereenvolgende paragrafen als:
"3.3 De functie $f(x) = a(x-d)(x-e)$" en "3.4 De parabool $y = a(x-p)^2 + q$".

De parabolen $y = x^2 + a$ **en** $y = -x^2 + a$

Na de lineaire grafieken (de lijnen) ga je de eigenschappen opsporen van een nieuw type grafiek. De bijbehorende formule heeft een term met een kwadraat en heet dan ook een *kwadratische formule*. De grafiek heet een *parabool*.

Oefening 5.2.1.1.a Daar is de parabool

Maak bij elk van de volgende kwadratische formules een (x, y)-tabel en teken de grafiek.
Een *dalparabool* heeft een laagste punt, een *bergparabool* heeft een hoogste punt.
(Een beetje raar noemen we beide punten de *top T* van de parabool.)
Zoek de (x, y), de coördinaten, van die toppen *T*.

a. $y = x^2$ $\quad y = x^2 + 1$ $\quad y = x^2 + 4$ $\quad y = x^2 - 1$ $\quad y = x^2 - 4$

b. $y = x^2$ $\quad y = -x^2 - 1$ $\quad y = -x^2 + 1$ $\quad y = -x^2 - 4$ $\quad y = -x^2 + 4$

c. Hoe kun je uit de formule aflezen wat de coördinaten (x, y) van zo'n punt zijn?

Sommige parabolen snijden de x-as ($y = 0$) en andere doen dat niet.

d. Voor welke waarden van a snijdt de parabool met formule $y = x^2 + a$ de x-as niet?

e. Voor welke waarden van a snijdt de parabool met formule $y = -x^2 + a$ de x-as wel?

Oefening 5.2.1.1.b Symmetrie

De parabolen die je in de vorige opgave hebt getekend zijn *symmetrisch*.
Langs een lijn kun je ze dubbelvouwen en beide helften op elkaar passen. Of je kunt ze langs die lijn spiegelen. Die lijn noem we de *as van symmetrie*, *symmetrieas* of spiegelas.

a. Wat is de formule (vergelijking) van de as van symmetrie van de parabolen in de vorige opgave?

Aanpak:
*Formules bij een grafiek (lijn) kun je vaak vinden door getallenvoorbeelden (*x, y*) te bekijken. Wat valt je dan op?*

b. Zoek drie paren punten (x, y) op de parabool van $y = -x^2 - 4$ die elkaars *symmetriepunt* zijn.

c. Het punt (3, 7) ligt op de parabool met formule $y = x^2 - 2$. Wat is het *symmetriepunt* van (3,7) op die parabool?

d. De punten (2, 6) en (-2, 6) zijn elkaars symmetriepunt in de y-as.
Wat is de formule van de parabool van het type $y = -x^2 + a$ waar die beide punten op liggen.
En wat is de formule van het type $y = x^2 + a$ waar dit voor geldt?

Oefening 5.2.1.1.c   Snijden van een parabool

Je kunt de grafieken van de parabolen met formules $y = x^2 + a$ en $y = -x^2 + a$ snel tekenen en je kent de eigenschappen van die parabolen.
Nu ga je die parabolen snijden met horizontale lijnen en de snijpunten berekenen.

a. Teken de parabool met formule $y = x^2 + 7$ en de lijn met vergelijking $y = 16$. De snijpunten noem je P en Q.
Bereken de coördinaten (x, y) van P en Q.
Bedenk:

$\boxed{} + 7 = 16$, dus $\boxed{} = 9$

$\boxed{}^2 = 9$, dus $\boxed{} =$ of $\boxed{} =$

Controleer met de beide grafieken of je antwoord klopt.

b. Teken in dezelfde figuur de lijnen met vergelijkingen $y = 3$, $y = 0$, $y = -4$, $y = -5$ en $y = -3$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten van die lijnen met de parabool.

c. Welke van de volgende vergelijkingen hebben geen oplossing?
Hoe kun je dat snel zien?
$x^2 - 4 = 12$, $x^2 - 4 = -12$, $x^2 - 4 = 1$, $x^2 - 4 = -10$

Oefening 5.2.1.1.d   Kwadratische vergelijkingen

Formules en grafieken horen bij elkaar. De snijpunten (x, y) van twee grafieken kun je berekenen door de bijbehorende vergelijking op te lossen.
Bereken de coördinaten (x, y) van de snijpunten van de volgende paren grafieken.

a. $y = x^2 + 3$ en $y = 4$.
b. $y = x^2 - 10$ en $y = 6$.
c. $y = -x^2 + 5$ en $y = 4$.
d. $y = -x^2 + 2$ en $y = -4$.
e. $y = x^2 + 1$ en $y = -x^2 + 7$.
f. $y = x^2 - 10$ en $y = -x^2 + 8$.

Hint:
Dit kun je al: $3x + 6 = -5x + 22$
Herleid deze vergelijkingen ook zo.

Schrijf nu eerst in je opzoekboekje op wat je in de vorige vier opgaven hebt geleerd. Doe dat met eigen voorbeelden.
Schrijf ook op wat goed ging en wat je moeilijk vond.
Dat heb je altijd weer nodig!

De parabolen met formules $y=(x+a)(x-b)$ en $y=(-x+a)(x-b)$

We onderzoeken nu de parabolen, die behoren bij een kwadratische formule van het type $y=(x+a)(x-b)$ of $y=(-x+a)(x-b)$.
Dit type noemen we wel de ontbonden vorm, (...)(....).

Oefening 5.2.1.1.e Nulpunten van een dalparabool

a. Bij de formule $y=(x-2)(x-4)$ hoort een parabool. Maak een tabel en teken die grafiek.
b. Teken de symmetrieas. Welke formule hoort bij die lijn? Wat zijn nu de coördinaten van de top?
c. Wat zijn de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x-as, dus met de lijn $y=0$?
   We noemen dat de *nulpunten* van de parabool.
d. *Bedenk* wat de coördinaten zijn van de nulpunten van de parabool met formule $y=(x+3)(x-5)$.

Oefening 5.2.1.1.f Nulpunten van een bergparabool

Ook bij een kwadratische formule van het type $y=(-x+a)(x-b)$ hoort een parabool.

a. Bij de formule $y=(-x-2)(x-4)$ hoort een parabool. Maak een tabel en teken die grafiek.
b. Teken de symmetrieas. Welke formule hoort bij die lijn? Wat zijn nu de coördinaten van de top?
c. Wat zijn de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x-as, dus met de lijn $y=0$?
d. Bedenk wat de coördinaten zijn van de nulpunten van de parabool met formule $y=(-x+3)(x-5)$.
e. Leg uit waarom bij de formule $y=-(x-3)(x-5)$ dezelfde parabool hoort als bij de formules $y=(-x+3)(x-5)$ en $y=(x-3)(-x+5)$.

Oefening 5.2.1.1.g De nulpunten en de top

Een parabool is symmetrisch zodat de symmetrieas midden tussen twee symmetriepunten ligt. En de nulpunten zijn elkaars symmetriepunten.
Zoek bij elk van de volgende kwadratische formules eerst de coördinaten (x, y) van de nulpunten en daarna die van de top T.
Voorbeeld: $y = (x+1)(x-3)$

Een vergelijking van het type: product = 0 of (...) (...) (...) = 0 kun je snel oplossen.

Schets daarna de grafiek.

a. $y = (-x+5)(x-7)$.
b. $y = (x+3)(x-1)$.
c. $y = (-x-4)(x-6)$.
d. $y = (x-2)(x-4)$.
e. $y = (-x+8)(x-2)$.
f. $y = x(x-4)$.

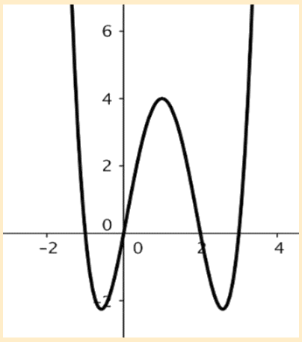
Oefening 5.2.1.1.h Even wat anders

Je hebt gevonden dat je bij een kwadratische formule in de ontbonden vorm snel de nulpunten van de bijbehorende grafiek kunt berekenen.
Dat geldt niet alleen voor kwadratische formules en parabolen.

a. Schets de grafiek bij de formule $y = (-x+5)(x-7)(x-4)$. Bereken eerst de nulpunten en maak een tabel totdat je weet hoe die grafiek loopt.
b. Doe hetzelfde voor de formule $y = (-x+4)(x-3)(x-1)(-x-1)$.

Oefening 5.2.1.1.i Een formule zoeken

Bedenk bij deze grafiek een formule.



Schrijf nu eerst in je opzoekboekje op wat je in de vorige vier opgaven hebt geleerd. Doe dat met voorbeelden.
Schrijf ook op wat goed ging en wat je moeilijk vond.
Dat heb je altijd weer nodig!

De parabolen met formules $y=(x-p)^2+q$ en $y=-(x-p)^2+q$

Je kent nu de formules van het type $y=x^2+a$ en $y=-x^2+a$ en ook de typen $y=(x+a)(x-b)$ en $y=(-x+a)(x-b)$. De bijbehorende grafieken zijn allemaal parabolen die zelfs precies dezelfde vorm hebben en op elkaar passen!
Een ander type kwadratische formule heeft de vorm $y=(x-p)^2+q$ of de vorm $y=-(x-p)^2+q$. We noemen dit wel de kwadratische vorm.

Oefening 5.2.1.1.j *De kwadratische vorm en de top*

a. Bij de formule $y=(x-3)^2+1$ hoort een parabool. Maak een tabel en teken die grafiek.
b. Wat is de as van symmetrie? Wat zijn de coördinaten van de top T?
c. De parabool snijdt de x-as (de lijn $y=0$) niet. Hoe kun je dat zien aan de formule?
d. Beantwoord dezelfde vragen bij de formule $y=-(x-3)^2-1$.
e. Bedenk zelf 5 formules van dit type en geef de coördinaten van de top T.

Oefening 5.2.1.1.k *De kwadratische vorm en de nulpunten*

Uit de kwadratische vorm $y=(x-p)^2+q$ of $y=-(x-p)^2+q$ kun je niet alleen snel de coördinaten van de top T vinden, maar ook de coördinaten van de snijpunten met de x-as (de nulpunten), als die er zijn.

a. Maak bij de formule $y=(x-3)^2-4$ een tabel en zoek daarmee de coördinaten van de nulpunten.
b. Je hebt nu de vergelijking $(x-3)^2-4=0$ opgelost. Dat kan ook direct door goed naar de vergelijking te kijken. Bereken zo de oplossing.
c. Bereken op dezelfde manier de nulpunten van $y=(x-4)^2-7$. Stap voor stap opschrijven!

$(\boxed{})^2 = 7$

$\boxed{} = \sqrt{7}$ of $\boxed{} = -\sqrt{7}$

$\boxed{} - 4 = \sqrt{7}$ of $\boxed{} - 4 = -\sqrt{7}$

d. Controleer je antwoord door de gevonden x-waarden in te vullen in de formule.

Oefening 5.2.1.1.l *Nulpunten berekenen bij de kwadratische vorm*

Bereken de coördinaten (x, y) van de nulpunten (als die er zijn ...) van de volgende parabolen, door steeds de vergelijking $y=0$ op te lossen. Controleer je antwoorden!
Schets de ligging van de grafieken ten opzichte van de x-as (onder, boven, snijden).

a. $y=-(x+2)^2+16$
b. $y=(x-5)^2+1$
c. $y=-(x-7)^2+1$
d. $y=(x-3)^2-6$
e. $y=-(x-3)^2+10$
f. $y=-(x+2)^2+16$

Oefening 5.2.1.1.m *Snijden van een parabool*

De coördinaten (x, y) van de snijpunten van twee grafieken kun je vinden door de bijbehorende vergelijking op te lossen.
De horizontale lijn met vergelijking $y = 5$ snijdt enkele parabolen uit de vorige opgave.
Teken in elke schets die je hebt gemaakt deze lijn en bereken de coördinaten (x, y) van de snijpunten.

Schrijf je berekening stap voor stap op, bijvoorbeeld:

1. *Snijpunt van* $y = -(x-6)^2 + 10$ *met* $y = 5$.
2. *Vergelijking* $-(x-6)^2 + 10 = 5$.
3. *Dan moet* $-(x-6)^2 = -5$ *en dus* $(x-6)^2 = 5$ *zijn.*
4. *Dit betekent dat* $(x-6) = \sqrt{5}$ *of* $(x-6) = -\sqrt{5}$.
5. *De oplossing voor* x *is:* $x = 6 + \sqrt{5}$ *of* $x = 6 - \sqrt{5}$.
6. *De coördinaten van de snijpunten zijn:* $(6+\sqrt{5}, 5)$ *en* $(6-\sqrt{5}, 5)$.
7. *Controleren door invullen in de formule:*
   $5 = -(6+\sqrt{5}-6)^2 + 10$ *en* $5 = -(6-\sqrt{5}-6)^2 + 10$.

Schrijf nu eerst in je opzoekboekje op wat je in de vorige vier opgaven hebt geleerd. Doe dat met voorbeelden.
Schrijf ook op wat goed ging en wat je moeilijk vond.
Dat heb je altijd weer nodig!

De algemene formules $y = x^2 + bx + c$ **en** $y = -x^2 + bx + c$

Als je in de twee voorgaande typen kwadratische formules de haakjes uitwerkt, dan krijg je een algemene kwadratische formule $y = x^2 + bx + c$ of $y = -x^2 + bx + c$. Ook hier horen weer parabolen bij die precies gelijk zijn aan alle andere parabolen, die je hebt gevonden. Alleen de ligging in het (x, y) -assenstelsel is verschillend.

Als je iets over de parabool wilt berekenen, dan is dit de meest onhandige vorm!
Daarom is het niet slim om haakjes uit te werken, voordat je weet wat je moet berekenen.

Oefening 5.2.1.1.n De formules $y = x^2 + bx + c$ en $y = -x^2 + bx + c$

a. Maak een tabel bij de formule $y = x^2 - 4x$ en teken de grafiek.
b. In vraag a. heb je met de tabel de nulpunten kunnen vinden.
Hoe kun je die direct uit de vergelijking $x^2 - 4x = 0$ vinden?
Wat is de top van de parabool?
c. Bereken zo de coördinaten van de nulpunten en de top van de parabolen bij de volgende formules en schets de grafiek: $y = x^2 + 2x$ en $y = -x^2 - 6x$.
d. Schets in hetzelfde assenstelsel de parabolen met de volgende formules $y = x^2 + 2x + 3$ en $y = -x^2 - 6x + 3$.
Hoe veranderen de coördinaten van de top?

Oefening 5.2.1.1.o De symmetrieas zoeken bij de formules

a. Maak een tabel bij de formule $y = x^2 - 2x - 3$ en teken de grafiek.
b. Het snijpunt met de y-as (de lijn $x = 0$), is $(0,-3)$. Wat is het symmetriepunt?
c. Je kunt het symmetriepunt vinden door de parabool te snijden met de lijn $y = -3$ en de bijbehorende vergelijking op te lossen. Doe dat.
d. Wat is de vergelijking van de symmetrieas?
e. Wat zijn de coördinaten van de top T?

Oefening 5.2.1.1.p De top vinden bij $y = x^2 + bx + c$ en $y = -x^2 + bx + c$

a. Maak een stappenplan om de coördinaten te berekenen van de top T van een parabool met formule $y = x^2 + bx + c$ *en* $y = -x^2 + bx + c$.
stap 1:
stap 2:
stap 3:
....
b. Volg je stappenplan om de coördinaten te berekenen van de toppen van de parabolen die behoren bij de volgende formules:
$y = x^2 + 8x - 20$, $y = -x^2 + 6x + 5$, $y = x^2 - x + 4$ en $y = -x^2 - x - 4$

Op een rijtje zetten

Om goed te kunnen onthouden wat je in deze oefeningen hebt geleerd, moet je nu eerst alles op een rijtje zetten.

Daarna komt pas de actie.

Je weet nu wel dat de grafiek van een kwadratische formule een dalparabool of een bergparabool is. En die parabool is symmetrisch (heeft een symmetrieas), heeft een top en soms nulpunten (snijpunten met de x*-as)*.

Uit de formule kun je vaak die eigenschappen van een parabool aflezen of snel berekenen. Schrijf nu met voorbeelden op hoe jij dat kunt!

Bedenk: elke goede actie begint met je af te vragen wat voor formule dit is!

Opdrachten van exploreren naar structuur

Toelichting

Eigenlijk is er maar één manier om leerlingen in enkele grote open opdrachten het deelgebied van de kwadratische verbanden door zelfstandig exploreren te laten onderzoeken. En dat is natuurlijk met inzet van een goed grafisch programma, zoals *GeoGebra*. Als de leerlingen met een enkele open opdracht hebben ontdekt hoe zij direct uit de verschillende typen formules enkele relevante eigenschappen van de parabool, dan is het overzicht tussen formules en grafieken verzekerd. *Opdracht 5.2.1.2.a* is daarvoor bedoeld. Deze opgave kan ook heel goed na de aanpak met tabellen in § 5.2.1.1 worden opgegeven, omdat leerlingen dan weten waar ze naar kunnen zoeken.

Daarna volgt het handwerk uit het schoolboek, zoals het ontbinden in factoren en het kwadraat afsplitsen om de formules te kunnen herleiden tot de gewenste vorm.

GeoGebra kan als toegift op dit deelgebied in de onderbouw ook worden gebruikt om lastige parameterachtige problemen op te lossen, zoals in § 3.7 van Getal & Ruimte 3 vwo deel 1 gebeurt.

Opdracht 5.2.1.2.a Exploreren met GeoGebra

Formules die een x^2 bevatten noemen we kwadratische formules en de bijbehorende grafiek is een parabool. Een parabool heeft een top (het hoogste of laagste punt), heeft een symmetrieas, snijdt de y-as en kan de x-as snijden in de nulpunten.

Er zijn verschillende vormen van een kwadratische formule, namelijk

$y = a(x-d)(x-e)$ $\qquad$ $y = a(x-p)^2 + q$ $\qquad$ $y = ax^2 + bx + c$

a. Zoek met GeoGebra voor elk type formule systematisch die punten en onderzoek hoe je die coördinaten uit de formule kunt afleiden.

b. Zet op een rijtje wat je hebt ontdekt en geef daar voorbeelden bij.

c. Hoe kun je uit de formule $y = a(x-p)^2 + q$ de nulpunten berekenen?

Toelichting

Aanvullend kunt u vragen om een verslagje te maken met het overzicht uit vraag b.

Parate vaardigheid

Leerlingen moeten *GeoGebra* kunnen gebruiken en begrijpen wat de coördinaten (x, y) te maken hebben met de formule.

Werkwijze

In tweetallen of groepjes.

Reflectie

In de nabespreking komt eerst alles aan de orde en daarna kunt u de stap maken naar de soms gewenste herleidingen van de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

Plaats in de leerjaren

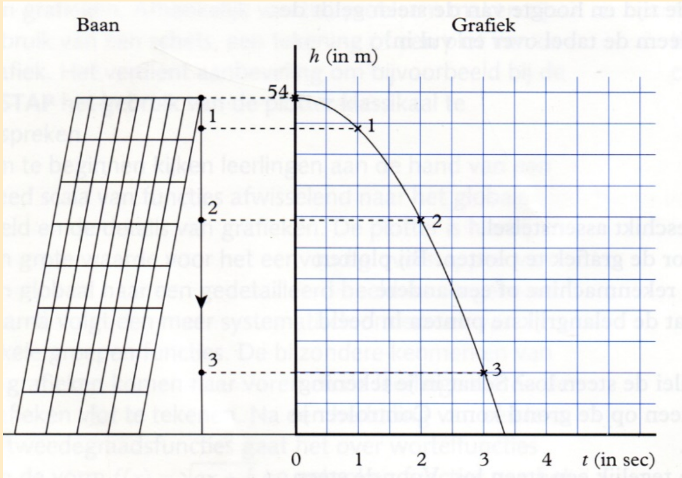
Leerjaar 2 of 3 havo-vwo.

Relatie met schoolboeken

Als introductie van de systematische bespreking van de grafieken bij kwadratische formules.

Opdracht 5.2.1.2.b   De toren van Pisa

Het verband tussen tijd en hoogte van een vallend voorwerp is kwadratisch, aldus Galileo Galilei in zijn boek *Discorsi* (Galileo,1638). Een bekend verhaal is dat hij dit ontdekte door stenen van de toren van Pisa af te laten vallen. (In werkelijkheid maakte hij meer gebruik van redeneren dan van het bekijken van vallende stenen.)
In de tekening zie je de relatie tussen de hoogte van de vallende steen en de bijbehorende grafiek van de hoogte in het verloop van de tijd.



Voor het verband tussen de tijd t in seconden nadat de steen is losgelaten en de hoogte h van de steen in meters geldt de formule $h = 54 - 4,9t^2$.

a. Na hoeveel tienden van seconden bereikt de steen de grond? Controleer je benadering met de formule.
b. Welke afstand heeft de steen afgelegd in de derde seconde (dat is tussen $t = 2$ en $t = 3$)?

Een leerling van Galileo staat halverwege de toren.
c. Welk formule behoort bij zijn vallende steen?
d. De leerling laat de steen los op hetzelfde moment waarop Galileo zijn steen los laat. Schets in één figuur de grafieken van de stenen van Galileo en de leerling. Beredeneer op welk tijdstip de steen van de leerling de grond raakt.

Toelichting
Deze context is bedoeld als *Instap* op het deelgebied van de kwadratische verbanden. Leerlingen moet de formule direct al interpreteren in de situatie en in de grafiek, zonder veel rekenwerk.

Parate vaardigheid
Leerlingen moeten getallen in formules kunnen substitueren.

Werkwijze
In tweetallen of groepjes.

Reflectie
U kunt de opdracht uitbreiden door leerlingen aan het werk te zetten met de formule voor de hoogte als de steen vanaf de grond omhoog wordt gegooid: $h = vt - 4,9t^2$.
Ze kunnen ook zelf vragen stellen over de mogelijk hoogte die je in de praktijk zou kunnen bereiken.

Plaats in de leerjaren
Leerjaar 2 havo-vwo.

Relatie met schoolboeken
Als introductie van de kwadratische formules.

5.2.2 Van kennis naar probleemoplossen

Toelichting
Dit deelgebied van kwadratische verbanden omvat een groot aantal algebraïsche technieken, die door veel leerlingen hooguit op korte termijn (de komende toets) worden gememoriseerd. Veel hangt af van de manier waarop die technieken ingebed zijn in het gehele netwerk van typen formules en grafieken. Zie 5.2.1. De standaardopgaven in de volgende *Oefeningen* zullen toch voor veel leerlingen aan het einde van leerjaar 3 problemen blijken te zijn. In de paragraaf *Opdrachten* gaat het over probleempjes of problemen, die niet standaard zijn, maar wel bijdragen aan het vermogen om problemen op te lossen.

Oefeningen van kennis naar probleemoplossen

Toelichting
Voor het illustreren van het gewenste eindniveau van parate kennis en vaardigheden op het deelgebied van kwadratische verbanden wordt nu grotendeels geput uit de algemene herhaling achterin de delen 3 havo/vwo 2 van *Getal & Ruimte*. Het laten maken van algemene herhalingen is de aangewezen werkwijze om de *samenhang* in de kennis van de leerlingen te versterken. Voor veel leerlingen, die in het voorafgaand onderwijs alleen fragmentarisch die kennis verspreid over tal van hoofdstukken hebben gememoriseerd, zijn deze opgaven echt problemen. Deze *Oefeningen* zouden parate kennis/vaardigheden moeten zijn.

Oefening 5.2.2.1.a   Schets de parabool

Schets van de volgende parabolen de ligging ten opzichte van de x-as.
Leg uit waarom die schets goed is.

a. $y = x^2 - 4$	d. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 36$
b. $y = (x-4)^2$	e. $y = 5 + (x+3)^2$
c. $y = -3x^2 - 2x + 1$	f. $y = (x-3)(5-x) + 6$

Toelichting
Essentieel is ook hier dat onze leerlingen de *houding* hebben ontwikkeld om eerst eens rustig naar de formule te kijken, voordat ze gaan rekenen. Daar moet in het voorafgaand onderwijs met enige dramatiek aan worden gewerkt. Dit type rijtjes is daarvoor nuttig en op toetsen kunt u allicht bonuspunten geven voor “snelle” oplossingen.
Uit de parate kennis over de kenmerken van de parabool en de typen formules, zoals in 5.2.1.1 met de reeks *Oefeningen* is opgestart, volgt direct de ligging van de grafieken uit a, b, e en f.
Voor c en d kan de parate kennis over de discriminant (uit het boek) worden ingezet.
Dit rijtje kan nog worden aangevuld met enkele formules in de ontbonden vorm.

Aanwijzing bij de vraag waarom de schets goed is:

a.	dalparabool, $T(0,-4)$,	nulpunten $(-2,0)$ en $(2,0)$
b.	dalparabool, $T(0,4)$,	dubbel nulpunt $(4,0)$
c.	bergparabool, $(0,1)$,	$D=16>0$ twee nulpunten
d.	bergparabool, $(0,-36)$, $D=0$,	dubbel nulpunt $(12,0)$
e.	dalparabool, $T(-3,5)$	
f.	bergparabool, $(3,6)$ en $(5,6)$ dus $(4,7)$	

Parate vaardigheid
De kennis van de grafische interpretatie van de formules (zie 5.2.1.1) en de kennis over de betekenis van de discriminant. Meer is hier niet nodig.

Werkwijze
Individueel, eventueel als (diagnostisch) toetsje om te laten inleveren. Dat maakt individuele feedback mogelijk.

Reflectie
Het *Weten dat* moet in orde zijn, maar daarnaast moeten leerlingen de houding hebben ontwikkeld om eerst eens rustig de formule te inspecteren op kenmerken.
(Opgaven a, b, e en f kunnen al na de inleidende reeks oefeningen in 5.2.1.1 worden gemaakt!)

Plaats in de leerjaren
Tweede helft 3 havo-vwo.

Relatie met schoolboeken
Algemene herhaling opgave 3, G&R 3 havo 2.

Oefening 5.2.2.1.b Kwadratische vergelijkingen

Los de volgende vergelijkingen op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Hint:
Kijk eerst goed of je de oplossing snel, zonder veel rekenwerk, kunt vinden. Dat kan bij 5 van de 8 vergelijkingen.

a. $(2x+5)(2x-6)=26$

b. $(11x+3)^2=16$

c. $5x^2+1=20$

d. $42-(2x-1)^2=26$

e. $2x-(x-6)^2=16$

f. $6x^2+20=32$

g. $(7x+1)(6x-1)=7x+1$

h. $0{,}1x^2-0{,}2x=8$

Toelichting
Net als in het vorige voorbeeld moet de *houding* zijn ontwikkeld om eerst eens rustig na te gaan waar de gegeven vergelijking op lijkt. De benodigde parate kennis, namelijk dat er verschillende typen vergelijkingen zijn met elk hun eigen oplossingsmethode, moet dan wel eerst op een rijtje in het geheugen staan opgeslagen. Een samenhangend netwerk dat vanaf het begin van dit deelgebied geleidelijk wordt opgebouwd, als de gevolgde leerlijn tenminste adequaat is. Niet associatief iets uit de trukendoos tevoorschijn toveren, maar gewoon nadenken over de gegeven vergelijking in relatie tot de kennis die je hebt. Een vraag stellen aan de opgave, noemde Wim Bos dat lang geleden in Euclides (1955). En als je het even niet meer weet dan helpen getallenvoorbeelden of een tabel, bijvoorbeeld in de niet standaardopgave f.

De aanpak kan er dan als volgt uit zien:

a.	*stap 1 inspectie, kan het snel?* *stap 2 haakjes wegwerken* *stap 3 herleiden tot ... = 0* *stap 4 abc-formule*	*Nee.*	*(Probleemverkenning)* *(Weten dat)* *(Doel kennen)* *(Weten dat)*
b.	*stap1 inspectie, kan het snel?* *stap 2* $11x+3=4$ *of* $11x+3=-4$ *stap 3* $x=\frac{1}{11}$ *of* $x=-\frac{7}{11}$	*Ja!*	*(Probleemverkenning)* *(Weten dat)*
c.	*stap 1 inspectie, kan het snel?* *stap 2* $5x^2=19$ *(Weten dat)* *stap 3* $x=\sqrt{\frac{19}{5}}\approx 1{,}95$ *of* $x=-\sqrt{\frac{19}{5}}\approx -1{,}95$	*Ja!*	*(Probleemverkenning)*
d.	*stap 1 inspectie, kan het snel?* *stap 2* $(2x-1)^2=16$ *stap 3* $2x-1=4$ *of* $2x-1=-4$ *stap 4* $x=2{,}5$ *of* $x=-1{,}5$	*Ja!*	*(Probleemverkenning)* *(Weten dat)*
e.	*stap 1 inspectie, kan het snel?* *stap 2 haakjes wegwerken* *stap 3 herleiden tot ... = 0* *stap 4 abc-formule*	*Nee.*	*(Probleemverkenning)* *(Weten dat)* *(Doel kennen)* *(Weten dat)*
f.	*stap 1 inspectie, kan het snel?* *stap 2* $7x+1=0$ *of* $6x-1=1$ *stap 3* $x=-\frac{1}{7}$ *of* $x=\frac{1}{3}$ *stap 4 even controleren door substitutie.*	*Ja?!*	*(Probleemverkenning)* *(Monitoren)*
g.	*stap 1 inspectie, kan het snel?* *stap 2* $6x^2=12$ *stap 3* $x=\sqrt{2}\approx 1{,}41$ *of* $x=-\sqrt{2}\approx -1{,}41$	*Ja!*	*(Probleemverkenning)*
h.	*stap 1 inspectie, kan het snel?* *stap 2 herleiden tot* $0{,}1x^2-0{,}2x-8=0$ *stap 3 met 10 vermenigvuldigen?* *stap 4* $x^2-2x-80=(x-10)(x+8)=0$	*Nee.*	*(Probleemverkenning)* *(Monitoren)* *(Weten dat)*

Parate vaardigheid
Alle afzonderlijk onderwezen technieken om kwadratische vergelijkingen op te lossen.

Werkwijze
Individueel of in tweetallen.

Reflectie
In de feedback staat het inspecteren voorop, waarna uit de gereedschapskist (het opzoekboekje) relevante kennis kan worden geselecteerd. (Opgaven b, c, d en g kunnen al na de inleidende reeks oefeningen in 5.2.1.1 worden gemaakt!)

Plaats in de leerjaren
Tweede helft 3 havo-vwo.

Relatie met schoolboeken
Algemene herhaling opgave 10. G&R 3 havo 2.

Oefening 5.2.2.1.c   Kwadratische ongelijkheden

Van alle vergelijkingen uit de vorige opdracht maken we nu ongelijkheden!
Los die ongelijkheden op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a. $(2x+5)(2x-6) \le 26$

b. $(11x+3)^2 \le 16$

c. $5x^2+1 \le 20$

d. $42-(2x-1)^2 \le 26$

e. $2x-(x-6)^2 = 16$

f. $(7x+1)(6x-1) \le 7x+1$

g. $6x^2+20 \le 32$

h. $0{,}1x^2-0{,}2x \le 8$

Toelichting
Uit de geschetste leerlijn in 5.2.2.1 en de twee al gegeven opdrachten volgt nu naadloos de optimale aanpak. Een probleemaanpak die leerlingen ook paraat moeten hebben. Dus *eerst* van beide leden de grafiek schetsen (intussen parate kennis) en daarna de coördinaten van het snijpunt berekenen. (Dus niet eerst de vergelijking oplossen en daarmee verder rekenen want dan raakt de grafische *betekenis* in de gegeven ongelijkheid zoek.)
Gefaseerde hulp heeft dus tot doel de volgende strategie te doen volgen:

Stap 1 Maak een schets van de ligging van de grafieken van het LL en het RL.
Stap 2 Los de vergelijkingen op. (Hebben we hiervoor al gedaan.)
Stap 3 Lees de oplossing af.
Deze strategie functioneert ook goed in de bovenbouw.
Na het oplossen van de vergelijkingen in de vorige opgave kunnen de leerlingen volstaan met de schets van het LL en het RL (hoort dan al tot hun parate kennis).

De stappen kunnen er dan als volgt uit zien:

a.	*stap 1 LL dalparabool met nulpunten* $(-2\frac{1}{2},0)$ *en* $(3,0)$ *stap 3 aflezen*	*RL horizontale lijn* $y=26$
b.	*stap 1 LL dalparabool met* $T(-\frac{3}{11},0)$ *stap 3 aflezen*	*RL horizontale lijn* $y=16$
c.	*stap 1 LL dalparabool met* $T(0,1)$ *stap 3 aflezen*	*RL horizontale lijn* $y=20$
d.	*stap 1 LL bergparabool met* $T(\frac{1}{2},42)$ *stap 3 aflezen*	*RL horizontale lijn* $y=26$
e.	*stap 1 LL* $y=-x^2+14x-36$ $D=52>0$, *dus twee nulpunten, dalparabool* *stap 3 aflezen*	*RL horizontale lijn* $y=16$
f.	*stap 1 LL dalparabool met nulpunten* $(-\frac{1}{7},0)$ *en* $(\frac{1}{3},0)$ *stap 3 aflezen*	*RL lijn door* $(-\frac{1}{7},0)$ *en* $(0,1)$
g.	*Stap 1 LL dalparabool met* $T(0,20)$ *stap 3 aflezen*	*RL horizontale lijn* $y=32$
h.	*stap 1 LL dalparabool met nulpunten* $(2,0)$ *en* $(0,0)$ *stap 3 aflezen*	*RL horizontale lijn* $y=8$

Parate vaardigheid
Alle kennis uit het deelgebied kwadratische verbanden.

Werkwijze
Individueel of in tweetallen.

Reflectie
Individueel feedback geven op een toetsje van dit type opdrachten.

Plaats in de leerjaren
Eindfase 3 havo-vwo.

Relatie met schoolboeken.
Deze opgaven is een variatie op de vorige opgave uit Getal & Ruimte.

Oefening 5.2.2.1.d Van alles wat

Je ziet hier de formules van een verzameling kwadratische verbanden. Zoals je weet zijn de grafieken dal- of bergparabolen, met:

- een top waar de maximum- of minimumwaarde wordt bereikt
- een as van symmetrie door die top
- een snijpunt met de y-as
- soms snijpunten met de x-as (de nulpunten).

Beantwoord de volgende vragen.

A. Uit 3 formules kun je direct de coördinaten van de top aflezen. Doe dat.
B. Uit 2 formules kun je direct de coördinaten van de nulpunten berekenen. Doe dat.
C. Zoek bij elke formule twee punten die symmetrisch liggen t.o.v. de as en bereken daarmee de coördinaten van de top.
D. Zoek bij elke formule uit welke methode je het handigst vindt om de nulpunten te berekenen.

a. $y = 5x^2 - 7x$
b. $y = (x-2)(x-4)$
c. $y = 3x^2 - 30$
d. $y = 2x^2 - 5x - 7$
e. $y = 2(x-3)^2 - 18$
f. $y = (2x-1)(6-3x)$
g. $y = 2x^2 - 12x + 10$
h. $y = -x(x-2) + 1$
i. $y = 16 - (x-5)^2$
j. $y = 12 - 5x(x-5)$
k. $y = -3x^2 + 2x - 1$

Uitwerking	
A.	
$y = 3x^2 - 30$	*Hieruit volgt de top* $(0,-30)$ *van de dalparabool.*
$y = 2(x-3)^2 - 18$	*Hieruit volgt de top* $(3,-18)$ *van de dalparabool.*
$y = 16 - (x-5)^2$	*Hieruit volgt direct de top* $(5,16)$ *van de bergparabool.*
B.	
$y = (x-2)(x-4)$	*Hieruit volgen de nulpunten* $(2,0)$ *en* $(4,0)$.
$y = (2x-1)(6-3x)$	*Hieruit volgen de nulpunten* $(\frac{1}{2},0)$ *en* $(2,0)$.

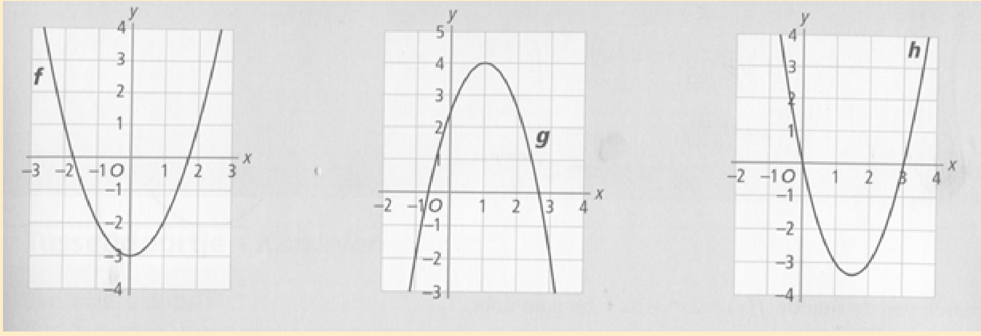
C. *Bijvoorbeeld*	
a. $y=5x^2-7x$	*Uit* $y=x(5x-7)$ *volgen de nulpunten* $(0,0)$ *en* $(\frac{7}{5},0)$ *met de as* $x=\frac{7}{10}$ *en de top* $(\frac{7}{10},-2\frac{9}{20})$ *van de dalparabool.*
b. $y=(x-2)(x-4)$	*Hieruit volgen de nulpunten* $(2,0)$ *en* $(4,0)$ *met de as* $x=3$ *en de top* $(3,-1)$ *van de dalparabool.*
c. $y=3x^2-30$	*De top* $(0,-30)$ *van de dalparabool is te vinden uit de nulpunten. De vergelijking* $x^2=10$ *geeft de nulpunten* $(-\sqrt{10},0)$ *en* $(\sqrt{10},0)$.
d. $y=2x^2-5x-7$	*Hieruit volgt direct het snijpunt met de* y *-as* $(0,-7)$. *Met* $D=81$ *en de abc-formule volgen de nulpunten* $(-1,0)$ *en* $(3\frac{1}{2},0)$. *De as van symmetrie is* $x=1\frac{1}{4}$ *en de top* $T(1\frac{1}{4},-10\frac{1}{8})$. *Het kan ook anders: uit* $2x^2-5x=x(2x-5)=0$ *volgen de symmetriepunten* $(0,-7)$ *(0, -7) en* $(2\frac{1}{2},-7)$ *enzovoort.*
e. $y=2(x-3)^2-18$	*De top* $(3,-18)$ *van de dalparabool volgt ook uit* $(x-3)^2=9$ *en de nulpunten* $(0,0)$ *en* $(6,0)$.
f. $y=(2x-1)(6-3x)$	*Hieruit volgen de nulpunten* $(\frac{1}{2},0)$ *en* $(2,0)$ *met de as* $x=1\frac{1}{4}$ *en de top* $(1\frac{1}{4},3\frac{3}{8})$ *van de bergparabool.*
g. $y=2x^2-12x+10$	*Uit* $y=2(x^2-6x+5)=2(x-5)(x-1)$ *volgen de nulpunten* $(5,0)$ *en* $(1,0)$ *met de as* $x=3$ *en de top* $(3,-8)$ *van de dalparabool.*
h. $y=-x(x-2)+1$	*Hieruit volgt de symmetrie van de punten* $(0,1)$ *en* $(2,1)$ *de as* $x=1$ *en de top van de bergparabool* $(1,2)$. *Met de abc-formule krijgen we de nulpunten* $(1-\sqrt{2},0)$ *en* $(1+\sqrt{2},0)$.
i. $y=16-(x-5)^2$	*De top* $(5,16)$ *volgt uit de nulpunten* $(1,0)$ *en* $(9,0)$
j. $y=12-5x(x-5)$	*Hieruit volgt de symmetrie van de punten* $(0,12)$ *en* $(5,12)$ *en de as* $x=2\frac{1}{2}$ *en de top van de parabool* $(2\frac{1}{2},43\frac{1}{4})$
k. $y=-3x^2+2x-1$	*Hieruit volgt direct het snijpunt met de* y *-as* $(0,-1)$. *Het symmetriepunt hiervan volgt uit* $-3x^2+2x=x(-3x+2)=0$ *en is dus* $(\frac{2}{3},-1)$, *dat geeft de as en de top* $T(\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ *van de bergparabool. Dus geen nulpunten!*

Opdrachten van kennis naar probleemoplossen

Toelichting
Eerst komt nog een aantal opgaven, die op de grens liggen tussen *paraat hebben* en *probleemoplossen*. Daarna gaat het in deze paragraaf om toegepaste problemen, zoals leerlingen die ook in de bovenbouw tegenkomen. Een tweetal is ontleend aan de schoolboeken.

Opdracht 5.2.2.2.a   Formule maken bij de grafiek

Zoek bij elke grafiek een bijpassende formule.



Toelichting
Aan deze activiteit (een *omkeervraag*) wordt tot nu toe te weinig gedaan in de onderbouw, hoewel het wel een van de tussendoelen is. In het algemeen zijn de opgaven waarin grafieken moeten worden gecombineerd met formules goede oefeningen om de samenhang in de kennis van de leerlingen over verschillende typen verbanden te versterken. (Zie bijvoorbeeld deel 1.)
In dit voorbeeld moet bestaande parate kennis worden getransformeerd. Als leerlingen dit nog nooit eerder hebben gezien, dan is het zeker een wiskundige denkactiviteit. Het denken gaat dan ongeveer als volgt:

f : *Ik zie een parabool met een roosterpunt als top* $T(0,-3)$ *, de formule ziet er dan uit als* $y = ax^2 - 3$. *De grafiek gaat door* $(2,1)$ *, dat geeft* $a = 1$ *en* $y = x^2 - 3$.

h : *Ik zie een parabool met nulpunten* $(0,0)$ *en* $(3,0)$ *, de formule ziet er dan uit als* $y = ax(x-3)$ *.*
Enzovoort.

Parate vaardigheid
Alle kennis uit het deelgebied kwadratische verbanden.

Werkwijze
In tweetallen of groepjes om samen aan te werken.

Reflectie
Als het moeizaam gaat nog een paar grafieken geven.

Plaats in de leerjaren
Eindfase 3 havo-vwo.

Relatie met schoolboeken.
Verspreid staan dergelijke opgaven ook in de schoolboeken.

Opdracht 5.2.2.2.b   Formules maken bij tabellen

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

Welke kwadratische formule hoort bij deze tabel?

Toelichting
Volgens de tussendoelen moeten de vwo-leerlingen de formule van een kwadratisch verband ook kunnen bepalen uit een tabel. De kenmerken van een lineair of een exponentieel verband kunnen bij een tabel snel de formule geven. Dat zou parate kennis moeten zijn. Bij een kwadratisch verband ligt dat anders. Als leerlingen zo'n vraag voor het eerst zien, dan moet er heel wat worden nagedacht om op een aanpak te komen. *"Waar moet ik naar toe?"* De heuristische omweg via (het denken aan) een grafiek kan uitkomst bieden.
De nulpunten en top zijn af te lezen, de formule wordt $y = x(x-4)$ of $y = (x-2)^2 - 4$.

Parate vaardigheid
Alle kennis uit het deelgebied kwadratische verbanden.

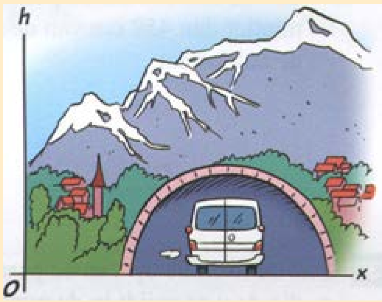
Werkwijze
In tweetallen of groepjes om samen aan te werken.

Reflectie
Als het moeizaam gaat nog een paar tabellen geven.

Plaats in de leerjaren
Eindfase 3 havo-vwo.

Relatie met schoolboeken.
Verspreid staan dergelijke opgaven ook in de schoolboeken.

Opdracht 5.2.2.2.c   Kan de bestelbus door de tunnel?



Bij de tunnel in de figuur hoort de formule $h = -0{,}381(x-2{,}8)(x-8{,}2)$.
Hierin zijn x en h in meters.

a. Bereken de breedte en de hoogte van de tunnel.

b. Een bestelauto met een breedte van 2,4 meter rijdt door de tunnel. Wat weet je van de hoogte van de auto?

Toelichting
Vraag b vereist zeker een vorm van probleemoplossen. De hint, probleemaanpak, is natuurlijk het zelf maken van een tekening.
Deze activiteit is op te vatten als een eerste stap in het *modelleren*, een wiskundig model in een situatie gebruiken.

Parate vaardigheid
De ontbonden kwadratische formule vertalen naar eigenschappen van de parabool.

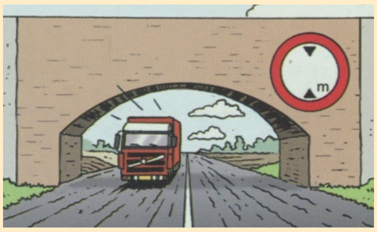
Werkwijze
Tweetallen.

Reflectie
Nog eens de probleemaanpak bespreken.
(Een neefje mailde mij in paniek over deze opgave waar hij en zijn academisch gevormde ouders maar niet op het goede antwoord van internet uit konden komen. Helaas toetste zijn wiskundedocent de volgende dag alleen de technieken.)
Weglaten van vraag a maakt deze opgave meer tot een probleem, waardoor het doel, leren probleemoplossen met een model, beter kan worden bereikt.

Plaats in de leerjaren
In de paragraaf over de ontbonden kwadratische formule of in een algemene herhaling.

Relatie met schoolboeken
Deze opgave is het begin van opgave 27 uit de Algemene herhaling van Getal & Ruimte 3 vwo deel 1.

Opdracht 5.2.2.2.d De tunnel doorrijden?



Boven een viaduct hangt een onleesbaar bordje waarop de doorrijhoogte in één decimaal moet staan.
De ronding van het viaduct heeft de vorm van een parabool. De formule die hierbij hoort is $h = -0,28a^2 + 1,4a + 1,79$.
Hierin is h de hoogte in meters vanaf het wegdek en a de horizontale afstand vanaf de linker muur.

a. Welke hoogte hoort bij de linker muur?
b. Hoe groot is de afstand tussen de linker en de rechter muur?
c. Hoeveel meter is de maximale hoogte van het viaduct?

Ga ervanuit dat een voertuig maximaal 2,2 meter breed is en niet over de doorgetrokken middenstreep van de weg mag komen.
d. Welke rijhoogte moet er op het bordje staan?

Toelichting
Ook deze vraag vereist zeker een vorm van probleemoplossen. De hint, probleemaanpak, is natuurlijk het zelf maken van een tekening en daarin de uitkomsten van de berekening bijschrijven.
Deze activiteit is op te vatten als een eerste stap in het *modelleren*, een wiskundig model in een situatie gebruiken.

Parate vaardigheid
De coördinaten van de top berekenen door het symmetriepunt van (0; 1,79) te zoeken.

Werkwijze
Tweetallen.

Reflectie
Nog eens de probleemaanpak bespreken.

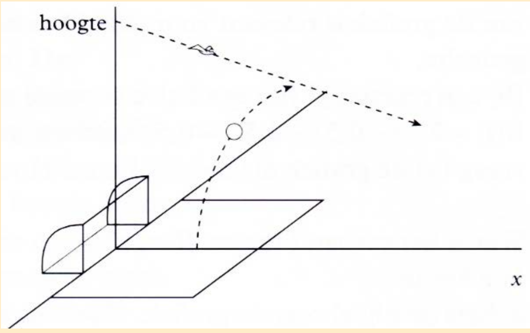
Ook deze opgave schiet naast het doel (leren probleemoplossen) door die eerste drie vraagjes. Alleen vraag d volstaat en doet een beroep op wiskundig denken van de leerlingen.

Plaats in de leerjaren
In de paragraaf waarin de algemene kwadratische formule is besproken of in een algemene herhaling.

Relatie met schoolboeken
Deze opgave is opgave G-3 uit de Extra oefening - Gemengd A Hoofdstuk 2 van Moderne Wiskunde 3A vwo.

Opdracht 5.2.2.2.e De uittrap van keeper Treytel

15 november 1970. Spangen, Sparta-Feyenoord.
En even werd het stil. De monden vielen open van verbazing. Een meeuw dwarrelde naar beneden. Eddy Treytel, de keeper van Feyenoord, had met een ferme uittrap een onoplettende meeuw uit de lucht geschoten en werd zo even wereldberoemd.
Het arme beest moest het met de dood bekopen. De meeuw werd opgezet en tentoongesteld in de catacomben van De Kuip.



In de tekening zie je een schets van de mogelijke banen van de bal en de meeuw. We nemen x voor de afstand tot de doellijn. De meeuw vliegt langs een rechte lijn naar beneden en we gaan ervan uit dat hij steeds recht boven de bal vliegt. De bal beschrijft een boog volgens een parabool. Van deze situatie maken wij een wiskundig model.

Voor de hoogte m van de meeuw op de horizontale afstand x van de doellijn gebruiken we de formule $m = 31 - 0,2x$.
Voor de hoogte b van de bal op de horizontale afstand x van de doellijn gebruiken we de formule $b = -0,04x^2 + 2,5x - 13$.

a. Teken in een assenstelsel zo precies mogelijk de banen van de bal en de meeuw.
b. Bereken de afstand x en de hoogte waarop de bal de meeuw raakt.
c. Wat was er gebeurd als de meeuw hoger had gevlogen?
   Zoek uit bij welke hoogte de meeuw niet meer zou zijn geraakt.
d. Wat was er gebeurd als Treytel vanaf de doellijn had uitgetrapt?

Toelichting
Het wiskundig model is gegeven en de leerlingen moeten dat interpreteren in de banen van de realistische situatie.

Parate vaardigheid
Alles over de kwadratische formule en de parabool, tenzij u deze opgave als Instap op kwadratische verbanden met *GeoGebra* laat onderzoeken.

Werkwijze
In groepjes.

Reflectie
In de nabespreking kunt u bespreken hoe realistisch het wiskundig model is. Op internet zijn tal van voorbeelden van "kogelbanen" te vinden. En Ronald Koeman schoot strafschoppen met een snelheid van 150 km/u! Als werkstukje kunt u leerlingen dat allemaal ook zelf laten opzoeken.

Plaats in de leerjaren
Nadat de kwadratische formule zijn besproken.
U kunt leerlingen ook aan het werk zetten met *GeoGebra* en dan is het een mooie introductie van kwadratische verbanden, zonder dat zij enige voorkennis hebben op dit deelgebied.

Relatie met schoolboeken
In het laatste hoofdstuk over kwadratische formules en parabolen of in een algemene herhaling.

Opdracht 5.2.2.2.f Een foto inlijsten

Martijn heeft een foto van 40 bij 30 cm. Hij gaat de foto inlijsten. Rondom de foto komt een lijst die aan de onderkant twee keer zo breed is als aan de andere drie kanten. Zie de tekening.

a. Toon aan dat de oppervlakte *O* van de lijst gegeven is door de formule $O = -6x^2 + 170x$.
b. De oppervlakte van de lijst is 564 cm^2. Bereken de breedte van de lijst aan de bovenkant door een vergelijking op te lossen.

Toelichting
Als start van een leerlijn “Algebraïseren” in dit subdomein is het weggeven van tekening en formule acceptabel maar het eindniveau van de onderbouw is natuurlijk dat leerlingen zelf de tekening moeten maken en zelf de formule moeten bedenken. Dan wordt het wiskundig denken van de leerlingen ontwikkeld en wordt zo’n opgave een WDA-opgave.

Parate vaardigheid
Het kunnen oplossen van een kwadratische vergelijking.

Werkwijze
Individueel of in tweetallen.

Reflectie
De leerlingen moeten zelf de formule leren vinden, dus vraag a weglaten.
Als hint kunt u aangeven dat ze eerst de berekening met een getallenvoorbeeld moeten uitschrijven, bijvoorbeeld met een breedte van 3 cm. De berekening laten staan en vervolgens het getal 3 door de x vervangen.

Plaats in de leerjaren
In 3 havo-vwo, nadat de kwadratische vergelijking is besproken.

Relatie met schoolboeken
Dit is opgave 14 van de Algemene herhaling uit Getal & Ruimte deel 3 havo 2.

Opdracht 5.2.2.2.g De caviaren

Karel wil tegen de muur van zijn huis een stuk van het grasveld omheinen voor zijn cavia's. Hij heeft 10 m gaas, waarmee hij de drie kanten van het rechthoekig stuk grasveld wil afzetten.

Hoe kan hij dat doen om zijn cavia's een zo groot mogelijk oppervlak aan gras te kunnen bieden?

Toelichting
In dit voorbeeld moeten de leerlingen zelf een tekening maken en een strategie bedenken om tot een oplossing te komen. In plaats van een formule te maken kunnen ze ook kiezen voor een tabel, maar dan moeten ze wel beredeneren dat hun oplossing echt het maximum geeft.

Parate vaardigheid
De top bepalen van de parabool bij een formule in de ontbonden vorm.

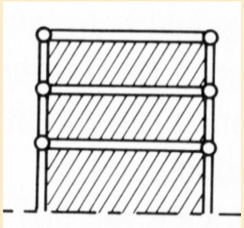
Werkwijze
Tweetallen of groepjes.

Reflectie
Zelf een formule maken is een aspect van de wiskundige activiteit *modelleren*, een onderdeel van de examenprogramma's in de bovenbouw. Weer helpt de aanpak uit de vorige opgave.
Even proberen:
3 meter voor de gelijke zijkanten geeft een oppervlakte van $3 \cdot (10-3-3) = 12$ *m²*.
x *meter voor de gelijke zijkanten geeft een oppervlakte van* $x \cdot (10-x-x) = x(10-2x)$ *m²*.

Plaats in de leerjaren
2 of 3 havo-vwo, nadat de ontbonden vorm van de kwadratische formule is bestudeerd.

Relatie met schoolboeken
Als eerst de reeks oefeningen uit 5.2.1.1, bijvoorbeeld in 2 havo-vwo is doorgewerkt, dan kan deze opdracht daarop aansluiten.

Opdracht 5.2.2.2.h Het droogrek



Een fabrikant maakt verwarmde droogrekken van verchroomde koperen buizen. Die droogrekken bestaan uit twee rechtopstaande buizen en drie dwarsbuizen (zie tekening).
De fabrikant wil bij een bepaalde totale buislengte L de "nuttige" oppervlakte (het gearceerde deel) zo groot mogelijk maken.

a. Wat is bij een totale lengte aan buizen van 240 cm de maximale "nuttige" oppervlakte?
b. Bij welke verhouding tussen de hoogte h en de breedte x is de oppervlakte bij een bepaalde lengte L maximaal? Klopt dit met je antwoord bij a?

Toelichting
Bij stagnatie in een groepje kunt u weer de volgende aanpak aanreiken.

a.
Zit je vast? Reken een getallenvoorbeeld door.
B.v. een dwarsbuis is 30 cm lang, dat is 3x30=90 cm buis, de twee verticale buizen zijn dan samen 240 – 90=150 cm. De hoogte is dan 75 cm.
Uitschrijven: de "nuttige" oppervlakte is lengte dwarsbuis keer hoogte, dat is 30·0,5·(240 – 3·30)

We kunnen blijven proberen tot we de maximale oppervlakte hebben maar dat schiet niet op. Neem de lengte van de dwarsbuis x *cm en voer nu dezelfde berekening uit!*
De horizontale buizen zijn samen $3x$ *cm en de verticale buizen zijn samen* $240-3x$ *cm.*
De hoogte is de helft daarvan en de oppervlakte $Opp(x)=x(120-1,5x)$. *Dit is een kwadratische formule van een bergparabool met top* $(40,2400)$.
Terug naar de vraagstelling: de maximale oppervlakte is 2400 cm^2.

b.
In plaats van 240 cm nemen we nu gewoon L *cm en de oppervlakteformule wordt dan* $Opp=x(0,5L-1,5x)$.
De maximale waarde ligt bij $x=\frac{1}{6}L$ *en de hoogte* h *vind je uit* $3x+2h=L$, *dus* $3x+2h=6x$, *dus* $2h=3x$ *oftewel* $h:x=3:2$, *de hoogte is anderhalf keer de breedte.*
Even controleren met het antwoord bij a), ja 60 cm is anderhalf keer 40 cm.

Parate vaardigheid
De top van een parabool kunnen berekenen bij de ontbonden vorm van de formule.

Werkwijze
In groepjes.

Reflectie
In de loop van de onderbouw moet deze aanpak voor het maken van een formule tot het repertoire van de leerlingen gaan behoren. Dat is te leren.

Plaats in de leerjaren
In 2 havo-vwo of 3 havo-vwo. Nadat de ontbonden vorm van de kwadratische formule is bestudeerd. Bijvoorbeeld nadat de reeks inleidende oefeningen uit 5.2.1.1 in 2hv of 3hv is gemaakt en verwerkt.

Relatie met schoolboeken.
Nadat de ontbonden vorm van de kwadratische formule is bestudeerd, meestal pas in 3 havo-vwo.

Opdracht 5.2.2.2.i *Een economisch model*

De NS levert aan een grote instelling in voorverkoop (ongestempelde) dagkaarten tegen korting op de normale prijs. Elk jaar wordt die korting opnieuw vastgesteld. Bij een prijs van €65 (1e klas) worden er 5000 kaarten per jaar afgenomen. De bedrijfseconoom heeft berekend dat voor elke euro dat de prijs verder zakt er ruw geschat 100 kaarten per jaar meer worden afgenomen.
Bij welke prijs is volgens dit economisch model de opbrengst voor de NS maximaal?

Toelichting
Als gefaseerde hulp kunt u weer dezelfde strategie aanreiken.
Neem bijvoorbeeld een extra korting van 5 euro.
De prijs wordt dan (65 - 5) euro, het aantal kaarten en de opbrengst berekenen we uit (65 - 5)(5000 + 5·100)=330 000 euro.

Met een korting van k euro vervangen we de 5 door k :
$Opbrengst = (65-k)(5000+100k)$.
Nulpunten bij $k=-50$ en $k=65$, top voor $k=7{,}5$.
Maximale opbrengst bij $k=7$ of $k=8$.
Bij een prijs van 58 euro of 57 euro is de maximale opbrengst 330 600 euro.

Parate vaardigheid
De top van een parabool kunnen berekenen bij de ontbonden vorm van de formule.

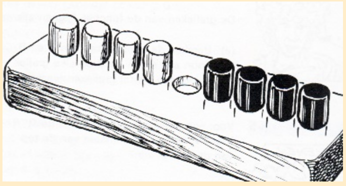
Werkwijze
In groepjes.

Reflectie
In de loop van de onderbouw moet deze aanpak voor het maken van een formule tot het repertoire van de leerlingen gaan behoren. Dat is te leren.

Plaats in de leerjaren
In 2 havo-vwo of 3 havo-vwo. Nadat de ontbonden vorm van de kwadratische formule is bestudeerd. Bijvoorbeeld nadat de reeks inleidende oefeningen uit 5.2.1.1 in 2hv of 3hv is gemaakt en verwerkt.

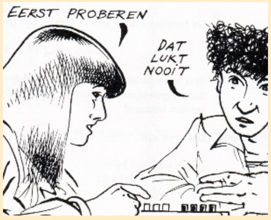
Relatie met schoolboeken.
Nadat de ontbonden vorm van de kwadratische formule is bestudeerd, meestal in 3 havo-vwo.

Opdracht 5.2.2.2.j Een spel: Hoppen



Je ziet hier een plankje met een rij van negen gaten.
Vier zwarte pionnen worden aan één kant in de gaatjes geplaatst en vier witte pionnen aan de andere kant.
Er is een leeg gat in het midden. Het doel van het spel is om de posities van de groep witte pionnen te verwisselen met de groep van zwarte pionnen.
Een pion kan verplaatst worden naar een leeg gat. Een pion mag daarbij naar het naastgelegen gat worden verplaats of over maximaal één pion heen springen.
Je kunt het bijvoorbeeld spelen met twee soorten munten of M en M of...

a. *Wat is het minimale aantal zetten?*



Hint
Zit je vast?
Is het je niet gelukt om een duidelijke strategie op te sporen?
Dat heb je vaker als je een probleem moet oplossen.

Kleiner maken

Een goede strategie is vaak om het probleem eerst maar eens te vereenvoudigen, het kleiner te maken.
In dit geval dus eerst een patroon zoeken met minder pionnen.

Groter maken

Heb je eenmaal een strategie gevonden, dan kun je een probleem ook groter maken en bijvoorbeeld de volgende vraag beantwoorden.
Wat is het minimale aantal zetten bij zeven paar pionnen?

Nu generaliseren!

Heb je eenmaal een strategie gevonden, dan kun je een probleem ook groter maken en bijvoorbeeld de volgende vraag beantwoorden.
Wat is het minimale aantal zetten bij zeven paar pionnen?
Kun je een algemene formule maken voor het minimale aantal zetten bij n paar pionnen?

Hint

In de wiskunde ligt het voor de hand om nu de algemene formule op te sporen. Je kunt eerst een tabel maken en dan de formule opzoeken.

aantal pionnenparen n	0	1	2	3	4	5	6	7	n
aantal zetten					24				

Eventueel kun je ook nog een grafiek tekenen en aflezen om welk type formule het zal gaan.
Lineair? Kwadratisch? Exponentieel?

Toelichting

Een uitdagend spel voor een bijzondere les. In duo's of groepjes proberen, resultaten vergelijken, hints zoals hiervoor genoemd waar nodig weggeven, en in de terugblik de strategieën nog eens expliciteren. In het spel zelf zit ook een strategie verborgen die erop neerkomt dat de pionnen zo snel mogelijk over de andere pionnen moeten hoppen voor het minimaal aantal zetten.

Kan het echt niet met minder zetten?

Een plausibele redenering is de volgende.
Ga uit van 3 pionnen aan elke kant. Iedere pion moet over 4 velden heen, dus in totaal 24 velden. En iedere witte pion moet over elke zwarte pion springen en omgekeerd. Dat zijn 9 sprongen van twee velden tegelijk, dus die moeten van die 24 af en dat geeft 15 zetten.
Bij n paren pionnen is het aantal velden dat moet worden gepasseerd gelijk aan $2n(n+1)$. Bij n pionnen zijn er n^2 sprongen van 2 velden tegelijk, dus het minimaal aantal zetten is gelijk aan $2n(n+1)-n^2=n+2n$ zetten.

5.2.3 Van exploreren naar abstraheren

Toelichting
Het deelgebied van de kwadratische verbanden omvat heel veel technieken die leerlingen moeten leren beheersen. De oefeningen en opdrachten in deze twee paragrafen zijn beperkt tot opgaven over transformaties (de oefeningen) en parameters, bedoeld om de *symbol sense* verder te ontwikkelen.

Oefeningen van exploreren naar abstraheren

Toelichting
Een reeks samenhangende oefeningen, die in of na de bespreking van kwadratische verbanden kan worden ingezet.

Parate vaardigheid
Grafieken tekenen op basis van een tabel. Globale kennis van kwadratische formules, bijvoorbeeld de reeks oefeningen van 5.2.1.1.

Werkwijze
In tweetallen of groepjes.

Reflectie
Het gaat in deze opgaven niet om het verwerven van kennis, die de leerlingen daarna paraat moeten hebben. Het gaat om een onderzoekende houding te bevorderen en na proberen achteraf de uitkomst te controleren.

Plaats in de leerjaren
In 2 havo-vwo of 3 havo-vwo, bijvoorbeeld na de opgaven van 5.2.1.1.

Relatie met schoolboeken
Verspreid in verschillende hoofdstukken van 3hv komen enkele transformatie als "theorie" voor, waarop die kennis wordt getoetst. In de bovenbouw wordt het opnieuw "behandeld".

Oefening 5.2.3.1.a Verticaal verschuiven

a. Teken de grafiek bij de formule $y = x$.
Verschuif die grafiek 2 verticaal omhoog. Wat is de formule van deze grafiek?
Hoe verkrijg je de grafiek van $y = x - 7$ uit die van $y = x$?
b. Teken de grafiek bij de formule $y = x^2$.
Verschuif die grafiek 3 verticaal omlaag. Wat is de formule van deze grafiek?
Hoe verkrijg je de grafiek van $y = x^2 + 1$ uit die van $y = x^2$?

Oefening 5.2.3.1.b Spiegelen in de x-as

a. Teken de grafiek bij de formule $y = x - 2$.
Spiegel die grafiek in de x-as. Wat is de formule van deze grafiek?
Hoe verkrijg je de grafiek van $y = -x + 7$ uit die van $y = x$?
b. Teken de grafiek bij de formule $y = x^2 - 4$.
Spiegel die grafiek in de x-as. Wat is de formule van deze grafiek?
Hoe verkrijg je de grafiek van $y = -x^2 + 9$ uit die van $y = x^2$?

Oefening 5.2.3.1.c Horizontaal verschuiven

a. Teken de grafiek bij de formule $y = x$.
Verschuif die grafiek 4 horizontaal naar rechts. Wat is de formule van deze grafiek?
Op welke twee manieren kun je de grafiek van $y = x - 8$ uit die van $y = x$ krijgen?

b. Teken de grafiek bij de formule $y = x^2$.
Verschuif die grafiek 3 horizontaal naar rechts.
Wat is de formule van deze grafiek?
Hoe krijg je de grafiek van $y = (x-1)^2 + 2$ uit die van $y = x^2$?

Oefening 5.2.3.1.d Spiegelen in de y-as

a. Teken de grafiek bij de formule $y = -x + 3$.
Spiegel die grafiek in de y-as. Wat is de formule van deze grafiek?
Op welke drie manieren kun je de grafiek van $y = -x + 8$ uit die van $y = x$ krijgen?

b. Teken de grafiek bij de formule $y = (x-4)^2$.
Spiegel die grafiek in de y-as.
Wat is de formule van deze grafiek?
Hoe verkrijg je de grafiek van $y = -(x-1)^2 + 2$ uit die van $y = x^2$?

Oefening 5.2.3.1.e Van alles wat

Bedenk zoveel mogelijk verschillende manieren om de grafiek van $y = -(x-10)^2 + 22$ door verschuivingen en spiegelen uit die van $y = x^2$ te laten ontstaan.

Opdrachten van exploreren naar abstraheren

Toelichting
De schoolboeken introduceren in 3 vwo ook de parameters en dat brengt de studie van kwadratische functie op een hoger abstractieniveau. In dit subdomein ligt het voor de hand om op de grens van onder- en bovenbouw de families van parabolen te gaan onderzoeken. En dan niet alleen rekenwerk met parameters en de discriminant maar de grafische betekenis.

Parate vaardigheid
De studie van de kwadratische verbanden moet zijn afgerond.

Werkwijze
In groepjes.

Reflectie
Eventueel kunt u *GeoGebra* inzetten, wat uiteraard het denken ondersteunt. Aan het redeneren moeten wel duidelijke eisen worden gesteld om een leereffect na te streven.

Plaats in de leerjaren
Eind 3 vwo en extra B-opgaven in 3 havo.

Relatie met schoolboeken
Verspreid in delen 3 vwo komen dergelijke opgaven voor. De tweede opdracht is ontleend aan de complexe opgaven uit Moderne Wiskunde deel 3B vwo hoofdstuk 11.

Opdracht 5.2.3.2.a   Families van parabolen

Schets bij elke familie van kwadratische formules 5 grafieken en leg uit welke kenmerken zij gemeenschappelijk hebben.

Voor welke waarden van *p* zijn er geen nulpunten?

a. $f(x) = (x+1)(x-3) + p$

b. $g(x) = (x+2)^2 + p$

c. $h(x) = 4x^2 + 2x + p$

d. $k(x) = -2(x-p)^2 + 16$

Opdracht 5.2.3.2.b   Redeneren met parameters

a. Gegeven is de familie van functies $f(x) = (x-a)^2 + 4 - a^2$.
   Toon aan dat alle grafieken van deze familie door één punt gaan.

b. Gegeven is de familie van functies $f(x) = (x-a)^2 + 2a - 1$.
   Geef een formule van de lijn door de toppen.

c. Gegeven is de familie van functies $f(x) = (x+a)(x-2a)$.
   Voor welke waarde van a heeft de bijbehorende grafiek de lijn $x = 2$ als as van symmetrie?

Opdracht 5.2.3.2.c   Schets de familie van parabolen

a. Voor welke waarden van a snijden de grafieken van $f(x) = x^2 + 2$ en $g(x) = ax^2 + 4$ elkaar niet?

b. Schets 3 grafieken uit de familie met formule $y = a(x+1)(x-3)(x+5)$.

c. Op welke parabool liggen de toppen van de familie $y = x^2 - ax + 6$?

d. Op welke parabool liggen de toppen van de familie $y = (x-2)(x+b)$?

5.3 Allerlei verbanden

5.3.1 Van exploreren naar structuur

Oefeningen van exploreren naar structuur

Oefening 5.3.1.1.a Een tabel bij een lineaire formule

Een school huurt voor één jaar een kopieerapparaat.
De huurprijs *P* per maand wordt berekend met de formule: $P = 95 + 85n$, waarbij n het aantal kopieën keer duizend is.

a. Maak een tabel (n, P) waarin je kunt aflezen wat de huurprijs P *is* bij n oplopend van 10 tot 100.
b. Zoek in je tabel uit hoe je omgekeerd de formule kunt vinden bij deze tabel.

c. Voor een duurder kopieerapparaat staan de kosten K in de volgende tabel.

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
K	750	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250	4750	5250

Zoek de formule die het verband aangeeft tussen n en K.

Oefening 5.3.1.1.b Een tabel bij een kwadratische formule

Een groepje leerlingen laat van de Oldehove in Leeuwarden stenen vallen, terwijl ze de valtijd op verschillende hoogten opmeten.
Het verband tussen de hoogte h in meters en de tijd t in seconden is $h = 40 - 5t^2$.

a. Maak een tabel (t, h) van het verband tussen de valtijd t en de hoogte h.
b. Zoek uit welk patroon in de tabel hoort bij deze kwadratische formule.
c. Een ander groepje leerlingen voerde hetzelfde experiment uit met de volgende resultaten in deze tabel.

t *seconden*	0	1	2	3	4
h *in meters*	112	107	92	67	32

Welke formule past bij deze tabel?

Oefening 5.3.1.1.c Een kwadratische formule bij een tabel

a. Maak een tabel bij de formule $y = 2x^2 - 20x + 42$.
b. Je kunt uit de tabel aflezen waar de top van de parabool ligt.
Schrijf de formule in de kwadratische vorm.
c. Je kunt uit de tabel aflezen wat de nulpunten van de grafiek zijn.
Schrijf de formule in de ontbonden vorm.

d. De baan van een kogel die een kogelstoter stoot, is voor een deel in de volgende tabel vastgelegd.
De horizontale afstand is x, de hoogte is h, gemeten in meters.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16
h	2	9	14	17	18	17	14	9	2

Wat is de formule, die de hoogte h uitdrukt in de afstand x?

Oefening 5.3.1.1.d Een tabel bij een exponentiële formule

In een meer is 5 m ^{2} bedekt met een woekerende waterplant. Elke week verdubbelt die oppervlakte zich volgens de formule $A = 5 \cdot 2^w$, waarin w het aantal weken is na de beginmeting en A de oppervlakte bedekt door de waterplant.

a. Maak een tabel (w, A) voor een zestal weken.
b. Beschrijf in woorden hoe je kunt zien of berekenen dat het een tabel is van een exponentiële formule.
c. Hoe kun je uit de tabel weer de formule maken?

d. In een ander meer woekert de waterplant maar met 5% per week. Zie de tabel.

w	0	1	2	3	4	5	6
A	3	3,15	3,31	3,47	3,65	3,83	4,02

Is dit een exponentieel verband? Licht je antwoord toe.
Wat is de formule bij deze tabel?

Opdrachten van exploreren naar structuur

Oefening 5.3.1.1.e Omgekeerd evenredig

De wet van Boyle beschrijft met de volgende formule het verband tussen de druk p (in bar) en het volume V (in liters) van een gas bij gelijkblijvende temperatuur. Denk bijvoorbeeld aan het oppompen van je fietsbanden.

De algemene formule is $p = \frac{constante}{V}$. Dat heet een omgekeerd evenredig verband.

a. Maak een tabel (V, p) voor de formule $p = \frac{20}{V}$.

b. Welk patroon of rekenregel geldt in je tabel?
Hoe kun je de formule uit de tabel terugvinden?

c. De gemiddelde snelheid die Pietersen met zijn auto kan halen over het traject Groningen-Maastricht hangt sterk af van de files onderweg. Zie de tabel voor de gemiddelde snelheid v in km/u en de bijbehorende tijd T in kwartieren.

v *km/u*	108	100	93	86	81
T *kwartieren*	12	13	14	15	16

Zoek de formule voor het verband tussen de tijd T in kwartieren uitgedrukt in de gemiddelde snelheid v in km/u.

Oefening 5.3.1.1.f Welke formule?

Zoek voor de volgende tabellen uit of het verband lineair, exponentieel, kwadratisch, omgekeerd evenredig of nog anders is.

a.

m	1	2	3	4	5
q	16	24	36	54	81

b.

t	1	4	7	10	13
A	20	17,5	15	12,5	10

c.

w	2	3	6	9	12
K	18	12	6	4	3

d.

r	-1	0	1	2	3	4	5
H	19	14	11	10	11	14	15

e.

x	0	5	7	9	14
O	6	16	20	24	34

f.

n	-4	-3	-2	2	6
V	15	20	30	-30	-10

g.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0	8

Opdrachten van exploreren naar structuur

5.3.1.2.a Zoek grafieken bij formules

In de loop van de jaren heb je veel geleerd over verschillende typen formules en hun grafieken. In deze opdracht is de vraag om de 10 formules te matchen aan de grafieken of omgekeerd. Bij elke grafiek hoort één formule en omgekeerd.
Let op de kenmerken van de formules en grafieken. Soms kun je verder komen door een getallenvoorbeeld uit te rekenen of een tabel te maken.

a. $K = 3 + v$

b. $p = -\frac{0,4}{q}$

c. $y = 3(x-2)^2 - 1$

d. $y = -2x + 5$

e. $A = (w-2)(w+2)$

f. $N = 0,5^t$

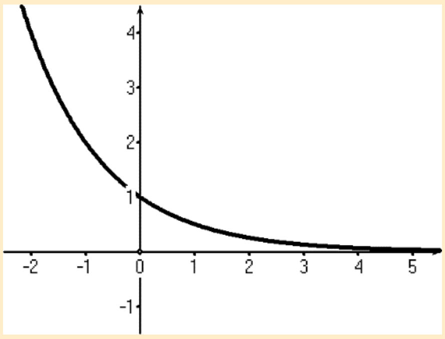
g. $L = 2 \cdot 1,5^t$

h. $y = -2(x+3)^2 + 4$

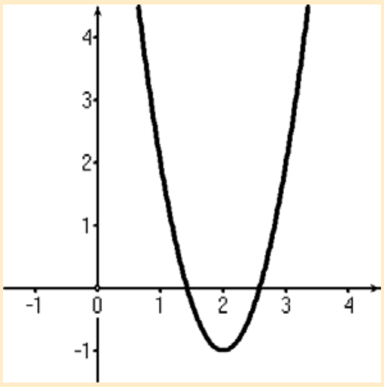
i. $G = -3(z+3)(z-1)$

j. $y = \frac{6}{x}$

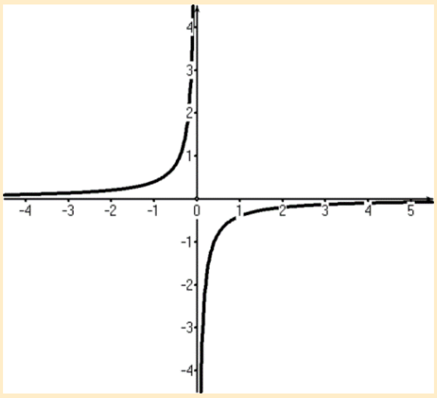
1.



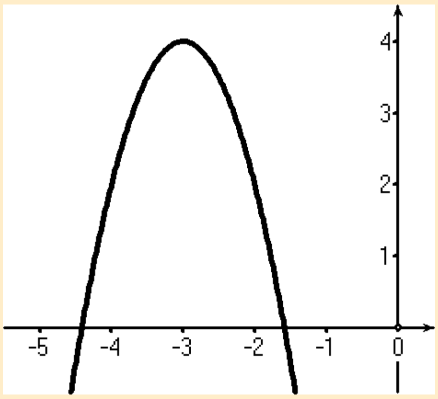
2.



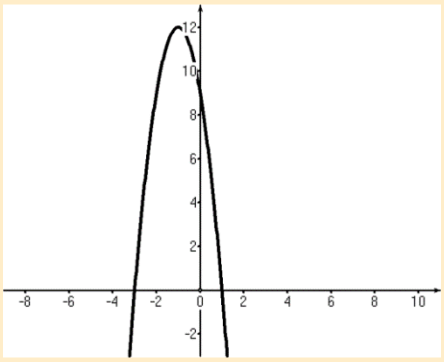
3.



4.

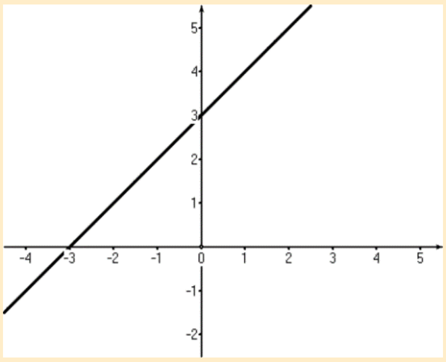


5.



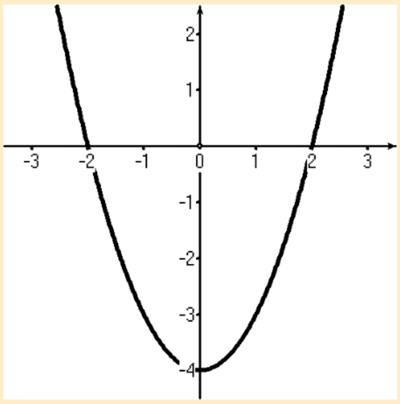
12
10
8
6
4
2
-2
-8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

6.



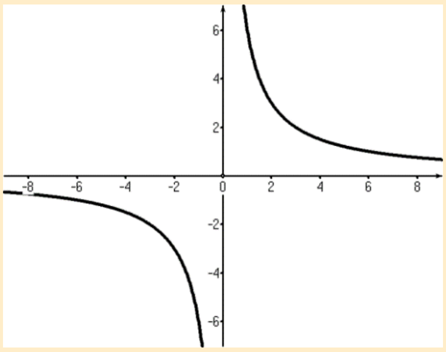
5
4
3
2
1
-1
-2
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

7.



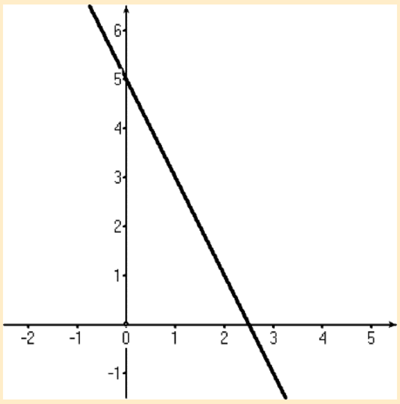
2
1
-1
-2
-3
-4
-3 -2 -1 0 1 2 3

8.



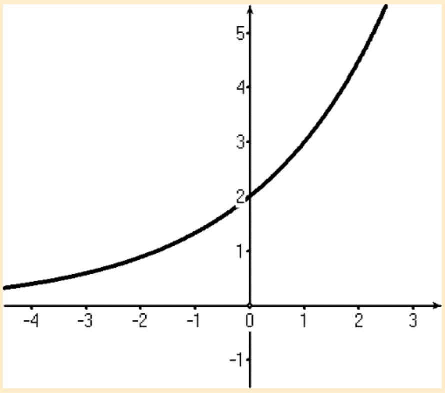
6
4
2
-2
-4
-6
-8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8

9.



6
5
4
3
2
1
-1
-2 -1 0 1 2 3 4 5

10.



5
4
3
2
1
-1
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3

5.3.2 Van kennis naar probleemoplossen

Oefeningen van kennis naar probleemoplossen

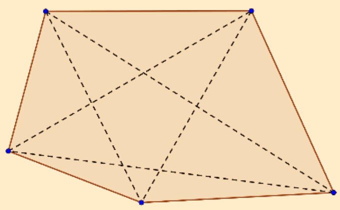
Oefening 5.3.2.1.a De gemiddelde snelheid

Annemiek fietst 's morgens met veel tegenwind naar school. Haar cyclometer geeft aan dat haar gemiddelde snelheid 12 km/u is geweest. 's Middags gaat het veel sneller met een gemiddelde snelheid van 20 km/u.

a. Wat is haar gemiddelde snelheid over de heen- en terugweg samen?
   Heb je ook 16 km/u? Controleer dat met een getallenvoorbeeld!
b. Hangt haar gemiddelde snelheid af van de gereden afstand?
c. Maak een formule voor de gemiddelde snelheid bij een snelheid v voor de wind, een snelheid w tegen de wind in en een afstand d.

d. Karel metselt een muur in 20 uur en Gerard in 12 uur. Hoe lang duurt het als ze samen aan die muur metselen?
e. Twee parallel geschakelde weerstanden van 20 Ω en 12 Ω worden vervangen door één weerstand. Hoeveel Ohm moet die weerstand zijn?

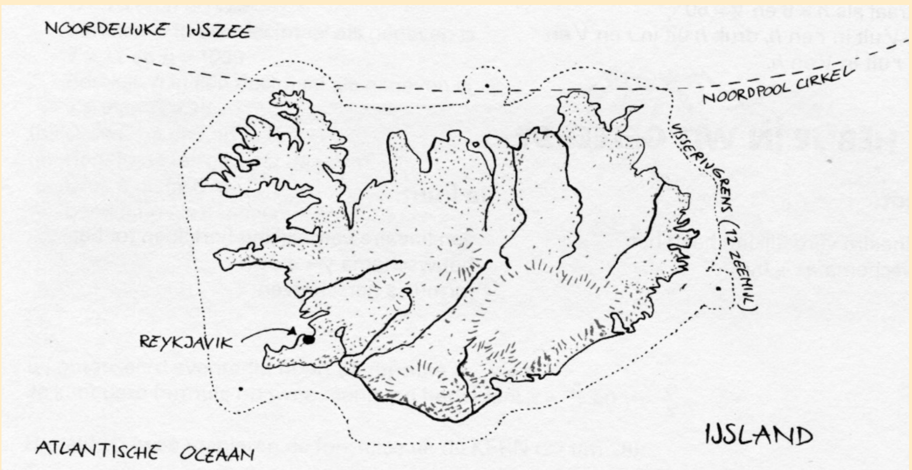
Oefening 5.3.2.1.b Hoeveel diagonalen?



Een vierhoek heeft 2 diagonalen, een vijfhoek heeft 5 diagonalen.

a. Hoeveel diagonalen heeft een zeshoek?
   En een zevenhoek?
b. Beredeneer hoeveel diagonalen een 35-hoek heeft.
c. Hoeveel diagonalen heeft een n-hoek?

Oefening 5.3.2.1.c Visserijzones van IJsland



Visserij is een belangrijke bron van inkomsten voor IJsland. Internationaal is vastgelegd dat een zone met een breedte van 12 mijl voor de kust van een land tot het territorium van dat land behoort. In 1972 heeft IJsland die grens vergroot tot 50 mijl. Om zich te verzekeren van ruimere visgronden heeft IJsland in 1974 een visserijzone van 200 mijl breed ingesteld.

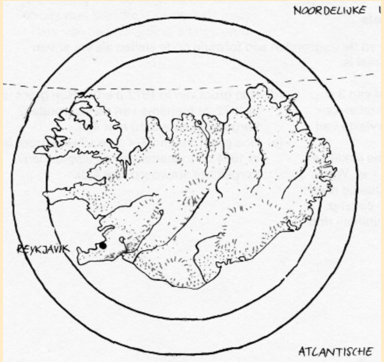
In dit gebied rond IJsland mag alleen door IJslandse vissersschepen worden gevist. Buitenlandse vissers trokken er zich weinig van aan, totdat IJsland er marineschepen op afstuurde. Toen kwamen ter bescherming van hun vissers ook Britse oorlogsschepen in actie. Via bemiddeling van de NAVO gingen de andere landen in 1976 toch akkoord.

a. Op het kaartje staat de 12-mijlszone aangegeven. De buitenomtrek van die zone is ongeveer 1000 mijl. (Een zeemijl is 1852 meter.)
Leg op basis van dit kaartje uit hoe de grens van de 12-mijlszone is vastgesteld.
Wat is de invloed van fjorden en eilandjes?

b. Geef een schatting van de vergroting van de oppervlakte bij de overgang van een 12-mijlszone naar een 50-mijlszone. En van de 50-mijlszone naar de 200-mijlszone.

c. We gaan berekenen met hoeveel mijl^2 de oppervlakte van de IJslandse visgronden in 1972 en 1974 is toegenomen. We gaan daarom een wiskundig model van de situatie maken. Dat betekent dat we meestal eerst uitgaan van een sterke vereenvoudiging.

Het eenvoudigste model van de situatie lijkt een cirkel.
We nemen voorlopig maar even aan dat de grens van de 12-mijlszone een cirkel is.
De omtrek van de 12-mijlszone is gegeven.
Bereken achtereenvolgens de oppervlakte van de 12-mijlszone, de 50-mijlszone en de 200-mijlszone.

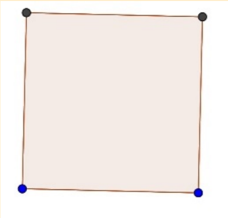


Kloppen je schattingen in antwoord b. een beetje?

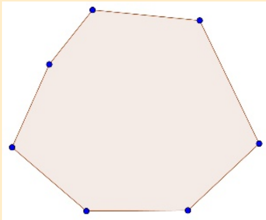
d. Je kunt een algemene formule maken voor de toename van de visgronden.
Neem r voor de straal van de binnenste cirkel en u de breedte van de zone.
Wat is de oppervlakte van de ring?
Controleer je formule met je antwoorden uit c.

e. De vorm van een visserijzone is meestal ingewikkelder dan een cirkel. Toch kun je een redelijk kloppende formule van de oppervlakte maken als je de omtrek p van het land weet.
Bedenk de formule voor de oppervlakte van een visserijzone voor de volgende vormen. Leg uit bij welke vormen dat niet kan en waarom dat zo is.

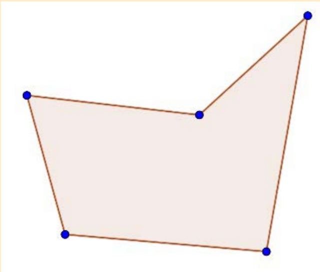
A



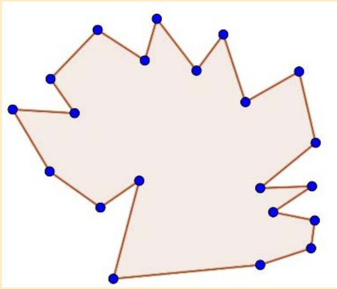
B



C



D



Opdrachten van kennis naar probleemoplossen

Opdracht 5.3.2.2.a   Aantal graankorrels op een schaakbord

Een schaakbord heeft 64 velden. Volgens een legende vond een wijze uit India ongeveer 1500 jaar geleden het schaakspel uit. Hij leerde de koning het spel. Deze was zo enthousiast over het spel dat hij besloot dat het als voorbeeld voor het hele volk moest dienen: het schaakspel had hem geleerd dat de boeren (pionnen) en de adel (de stukken) als een eenheid moesten samenwerken.
De koning beloofde de man een beloning die hij zelf mocht uitkiezen. Deze vroeg de koning om 1 graankorrel op het eerste veld van het schaakveld, 2 korrels op het tweede veld, 4 korrels op het derde, 8 korrels op het vierde enz. Op ieder veld dus steeds het dubbele aantal rijstkorrels van het vorige veld, totdat alle velden gevuld waren.

a. Hoeveel graankorrels liggen er op het 64e veld?
b. Natuurlijk willen we weten wat het totale aantal graankorrels is. Enig idee hoe je dat kunt berekenen?
c. Laten we klein beginnen. Eerst maar de som van de graankorrels op de eerste 6 borden. Die som noemen we S_6.

$$S_6 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

Nu volgt een slimme truc! We vermenigvuldigen S_6 met 2 en trekken S_6 af van $2 \cdot S_6$.

$$\begin{array}{rl} 2 \cdot S_6 = & \quad\; 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \\ S_6 = & 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \\ \hline \end{array} \quad -$$

$$2 \cdot S_6 - S_6 = 64 - 1$$

dus $S_6 = 64 - 1$ of $S_6 = 2^6 - 1$

Bereken nu op dezelfde manier het totale aantal graankorrels S_{10} op de eerste 10 velden. Controleer je antwoord door gewoon op te tellen!

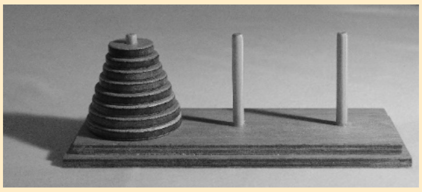
d. Bereken nu het totale aantal graankorrels op het hele schaakbord.

Dit is een voorbeeld van de berekening van de som van een meetkundige rij getallen. Elke volgende term krijg je uit de voorgaande term door met een vast getal te vermenigvuldigen. Bij de graankorrels begin je met 1 en dan vermenigvuldig je steeds met 2. In het algemeen zien de eerste n termen van een meetkundige rij er als volgt uit:

$$a\,,\quad a \cdot r\,,\quad a \cdot r^2,\, a \cdot r^3,\, a \cdot r^4,\, a \cdot r^5,\, a \cdot r^6, \ldots\ldots\ldots \quad a \cdot r^{n-1}$$

e. Kun je met dezelfde methode als hier voor de somformule S_n afleiden? Controleer je formule weer met die voor het aantal graankorrels.

Opdracht 5.3.2.2.b   De toren van Hanoi



De legende gaat dat in de stad Benares onder keizer Fo Hi een boeddhistische tempel stond.
In deze tempel waren priesters continu bezig om gouden schijven die op diamanten punten stonden te verplaatsen.
Het ging om 64 schijven van groot naar klein op één pin.
Zodra de hele stapel naar een andere pin verplaatst is, zal dat het einde van de wereld betekenen.
Regels:

- Er mag maar één schijf tegelijk verplaatst worden.
- Een grotere schijf mag nooit op een kleinere liggen.
- Alle pinnen mogen worden gebruikt.

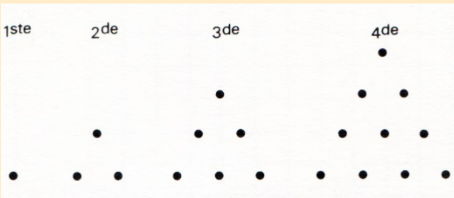
We willen weten wat het minimum aantal zetten is om de toren van 64 schijven te verplaatsen naar de meest rechtse pion!

a. Speel het spel eerst maar eens met een klein aantal schijfjes (munten o.i.d.). Zoek een strategie.
b. Maak een tabel met het verband tussen het aantal schijven *N* en het minimum aantal zetten *Z.*
   Welke formule geeft het verband weer tussen *N* en *Z*?

   Stuck? Uitgeteld? Geef je het op?
   Een torentje van 3 kost 7 zetten.
   Een torentje van 4 is op te vatten als een torentje van 3 plus 1.
   Dus tweemaal dat torentje van 3 verzetten (2 keer 7 stappen) en 1 erbij geeft 15.
   Enzovoort.

c. Over hoeveel jaar vergaat de wereld als die priesters het minimale aantal zetten aanhouden?
d. Wat wordt de formule als een schijf alleen maar naar een naburige pin mag worden verplaatst?

Opdracht 5.3.2.2.c   Driehoeksgetallen



a. Bekijk deze patronen van stippen.
   Teken het 5^e en 6^e patroon.
   Hoeveel stippen hebben deze patronen?
b. Hoe kun je het aantal stippen van het 15^e patroon berekenen?

De getallen 1, 3, 6, 10, noemen we driehoeksgetallen.

c. Bereken het 20ste driehoeksgetal.
d. Hoeveel is 1 + 2 + 3 +4 +5 + ... + 20?

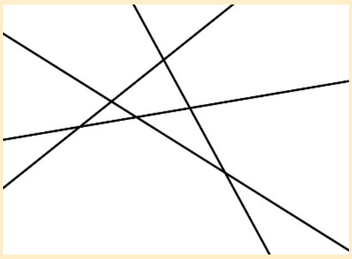
e. We zoeken een handige formule om zo'n driehoeksgetal te berekenen.
Dat gaat als volgt. Bijvoorbeeld het 12^e driehoeksgetal.
Zet onder elkaar en tel op:

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \\ \underline{12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} \quad + \\ 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 = 12 \times 13 \end{array}$$

De som van de eerste twaalf getallen is dus de helft: $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13$.

Leidt nu op dezelfde manier de formule voor de som van de eerst n gehele getallen af:
dus van: 1 + 2 + 3 +4 +5 + ... + n

Opdracht 5.3.2.2.d Snijdende lijnen



a. Neem de tekening over. Tel het volgende:
n : het aantal lijnen
p : het aantal snijpunten
i : het aantal binnengebieden (aan alle kanten begrensd)
u : het aantal buitengebieden (aan één kant open)
t : het totaal aantal gebieden

We sluiten ook in het vervolg evenwijdige lijnen en 3 of meer lijnen door één punt uit.
We zoeken de formules voor p, i, u en t uitgedrukt in n.

b. Vul deze tabel verder in.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
p				6				
i				3				
u				8				
t				11				

Kun je uit de tabel de formules voor p, i, u en t vinden?

Je kunt misschien handiger de formules vinden door redeneren.
Bijvoorbeeld als volgt: *8 lijnen a, b, c, d, e, f, g, h*
lijn a snijdt 7 lijnen, dat geeft 7 snijpunten.
lijn b snijdt 7 lijnen, dat geeft 7 snijpunten enzovoort
dus 8 lijnen snijden 7 andere in 56 snijpunten
maar we hebben zo de snijpunten dubbel geteld
Conclusie: 8 lijnen geven 28 snijpunten

c. Beredeneer nu het aantal snijpunten bij n lijnen.

d. De formule voor het aantal buitengebieden u is eenvoudig te beredeneren.
Bij 1 lijn zijn er 2 buitengebieden. Wat gebeurt er met u bij elke nieuwe lijn?

We gaan nu de formule voor het totale aantal gebieden t zoeken.
In de tabel zie je dat t met 5 toeneemt bij de 5^e lijn, met 6 bij de 6^e lijn, enz.
Het totale aantal gebieden t bij n lijnen kun we nu schrijven als:
2 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n

e. Wat is de formule voor t? (Je kunt het resultaat van de vorige opgave gebruiken.)

f. Maak nu uit de voorgaande formules de formule voor het aantal binnengebieden i.
Schrijf die formule in de ontbonden vorm en controleer met de tabel.

5.3.3 Van exploreren naar abstraheren

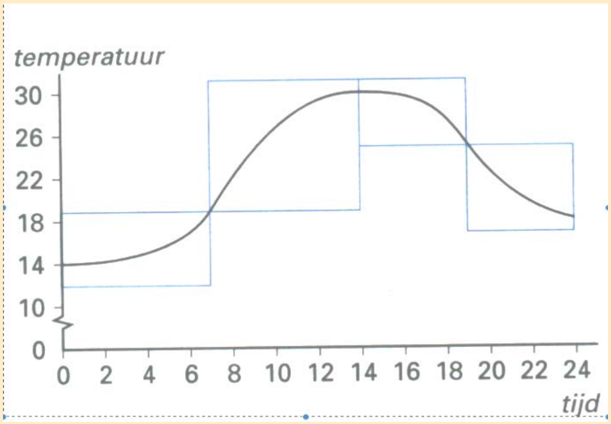
Oefeningen van exploreren naar abstraheren

Veraf en dichtbij

In de afgelopen jaren heb je aantal verbanden met hun formules, tabellen en grafieken bestudeerd. In de volgende opgaven kijken we wat algemener naar een grote variatie aan formules en proberen we iets te zeggen over het verloop van de bijbehorende grafieken. We kijken naar het verloop van de grafiek heel ver weg x naar oneindig positief of negatief), maar ook naar het verloop dichtbij een bijzonder punt. En we vergelijken grafieken om na te gaan welke het hardst stijgt of daalt.

Oefening 5.3.3.1.a Hoe snel stijgt of daalt een grafiek?

De formule van een verband bepaalt hoe snel de y-waarde toeneemt of afneemt als de x-waarde groter of kleiner wordt. Je kunt dat ook aan het snel of langzaam stijgen of dalen van de grafiek zien.



a. In deze grafiek zie je vier stukken met een verschillend verloop.
Op het interval van [0, 7] van *x*-waarden, dat is van 0 tot 7 uur vertoont deze grafiek een *sterker wordende toename,* de snelheid van toename wordt groter.
Bedenk nu zelf hoe je het verloop van de grafiek in de drie andere tijdintervallen kunt beschrijven.

b. In het dagelijks leven gebruiken we vaak het woord gemiddelde.
Wat is de *gemiddelde toename* in graad/uur over de gehele 24 uur?

c. Bereken ook de gemiddelde toenamen voor elk van de vier tijdintervallen.
Zegt dat iets over het verloop van de grafiek?

d. Aan de grafiek kun je zien waar de temperatuur snel stijgt of daalt en waar de verandering niet veel voorstelt.
Kies die drie gebieden en bereken daarvoor de gemiddelde verandering.

Oefening 5.3.3.1.b   Langzaam en snel veranderen

Gegeven is de formule $y = \frac{1}{8}x^3$.

We gaan onderzoeken hoe snel en waar de grafiek die bij deze formule hoort, stijgt.

a. Vul de tabel van $y = \frac{1}{8}x^3$ in.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

b. Teken de grafiek op dit interval.
Wat is de gemiddelde toename over dit hele stuk van de grafiek?
Kun je al iets zeggen over de snelheid van toename op verschillende stukken van de grafiek?

c. Bereken de *gemiddelde toename* voor elk van de intervallen waarin x met 1 groter wordt.
Dus als volgt:

x*-interval*	[-4, -3]	[-3, -2]	[-2, -1]	[-1, 0]	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]
gemiddelde toename y								

Wat kun je nu zeggen over de snelheid van toename van *y*?

d. Dichtbij $x = 0$ 0 is er iets bijzonders aan de hand.
Bereken voor een heel klein intervalletje eens de gemiddelde toename van y .

Oefening 5.3.3.1.c   Verschil in toenamesnelheid

Gegeven zijn de formules $y = \frac{1}{4}x$ en $y = \sqrt{x}$.

a. Maak een tabel voor beide formules en teken daarna de grafieken in één assenstelsel.
b. Beschrijf in woorden het verschil in toename van beide grafieken.
c. Laat met voorbeelden zien dat de ene formule op de duur altijd grotere *y*-waarden produceert dan de andere.
d. In de buurt van (0, 0) is er in de grafiek van $y = \sqrt{x}$ iets bijzonders aan de hand.
Vul de volgende tabel in.

x	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007
$y = \sqrt{x}$								

Bereken de *gemiddelde toename* van y voor de kleine intervallen met breedte 0,0001.

e. Leg in woorden uit wat je opvalt aan dit stukje grafiek.

Oefening 5.3.3.1.c Onder een vergrootglas

Gegeven is de formule $y = x^2 + \sqrt{x}$

a. Maak een geschikte tabel en schets de grafiek.
b. De grafiek lijkt sterk op een parabool. Hoe komt dat?
c. Bereken nu een tabel met een y-waarden voor x heel dicht bij 0.
Wat is de gemiddelde toename op die intervalletjes?
d. Hoe loopt de grafiek in de buurt van (0, 0), als je er met een vergrootglas naar zou kijken?

Oefening 5.3.3.1.d In de verte

Het is vaak de moeite waard om het verloop van een grafiek te onderzoeken als x steeds grotere positieve waarden krijgt. Bijvoorbeeld $x = 10$, $x = 100$, $x = 1000$, enz.
Je zegt: x *gaat naar plus oneindig*. Je schrijft: $x \to +\infty$.

Gegeven is de formule: $y = 100x^3 - x^4$.

a. Wat doet de y-waarde als $x \to +\infty$?
b. Wat doet de y-waarde als $x \to +\infty$?
c. Bereken voor het interval [-0,1; 0,1] de gemiddelde toename van y.
Hoe loopt de grafiek in de buurt van het nulpunt (0, 0)?
d. Wat is het andere nulpunt van de grafiek?
e. Maak een schets van het verloop van de grafiek. Licht jouw schets toe.

Oefening 5.3.3.1.e Verassend?

Gegeven is de formule $y = \dfrac{2x+4}{x-2}$.

a. Wat doet de y-waarde als $x \to +\infty$?
b. Wat doet de y-waarde als $x \to -\infty$?
c. Wat doet de y-waarde als x vanaf $x = 3$ in kleine stapjes naar $x = 2$ gaat?
d. Wat doet de y-waarde als x vanaf $x = 1$ in kleine stapjes naar $x = 2$ gaat?

Oefening 5.3.3.1.f Wie wint het?

De ene grafiek stijgt of daalt veel sneller dan de andere. Dat hangt natuurlijk af van de formule.
Ga bij de volgende tweetallen formules na welke het op de duur wint, dus als $t \to +\infty$.

a. $V = 2500t$ en $K = 0{,}001t^2$
b. $P = t^3$ en $Q = 1{,}5^t$
c. $L = \dfrac{3t+9}{t}$ en $M = \dfrac{t+1000}{t}$

Oefening 5.3.3.1.g Waar lijkt het op?

Gegeven zijn de formules $y = x^3$ en $y = x^3 - 2x$.

a. Maak voor beide een tabel en teken in hetzelfde assenstelsel de grafieken.
b. Wat valt je aan beide grafieken op als $x \to +\infty$?
c. Maak voor beide formules nog een tabel voor het interval [-1, 1].
Teken de grafieken op dat interval.
d. Teken op dat interval ook de grafiek van $y = -2x$.
Wat valt je op? Kun je dat uitleggen?

Opdrachten van exploreren naar abstraheren

Schetsen van globale grafieken

In de afgelopen jaren heb je heel precies de grafieken bestudeerd bij enkele typen formules, zoals de lineaire en kwadratische formules. In deze opdracht is de vraag of je bij formules het globale verloop van de grafiek kunt uitzoeken. Dan gaat het niet meer om precieze x- en y-waarden, maar om het stijgen en dalen, boven of onder de x-as, enz.
Van belang is bijvoorbeeld het verloop van de grafiek van y als x naar positief oneindig gaat, bijvoorbeeld $x = 100$, $x = 1000$, $x = 10000$, $x = 100000$. Wat doet de grafiek dan? Natuurlijk ook het verloop als x naar negatief oneindig gaat. En soms gaat de y-waarde naar plus of min oneindig in de buurt van een bepaalde x-waarden.

Opdracht 5.3.3.2.a x en/of y gaat naar plus of min oneindig

Zoek bij de volgende formules met getallenvoorbeelden uit wat de y-waarde doet als de x-waarde naar plus of min oneindig gaat.
Onderzoek ook of de y-waarde in de buurt van een bepaalde x-waarde naar plus of min oneindig gaat.

a. $y = x^2$

b. $y = x^3$

c. $y = 0{,}5^x$

d. $y = \dfrac{x+5}{x-4}$

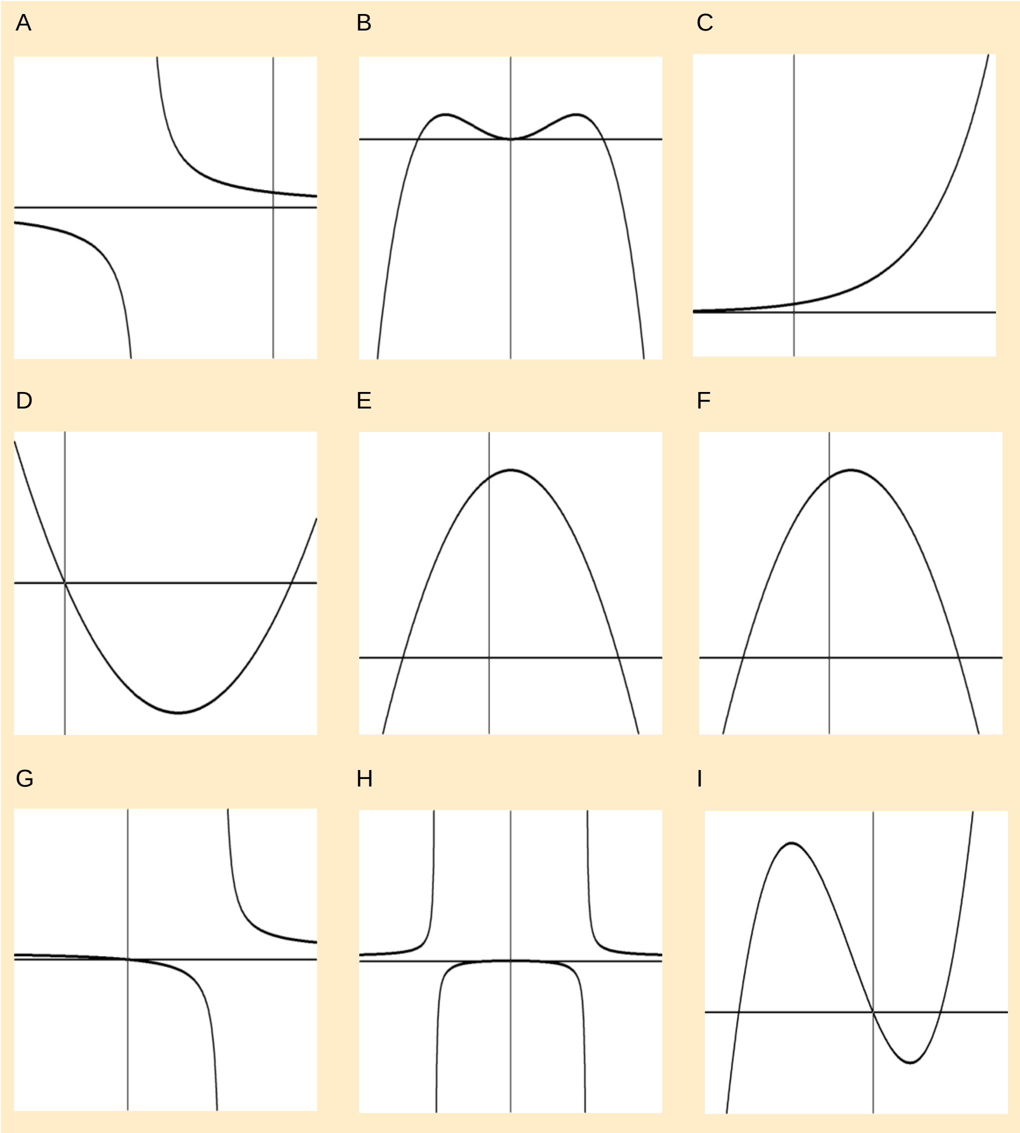
e. $y = 2^{-x^2}$

f. $y = \dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-3)}$

Opdracht 5.3.3.2.b Formules en grafieken matchen

Zoek de grafieken en formules bij elkaar. De grafieken vind je op de volgende bladzijde.

Formule	Keuze grafiek	Waarom die?
$y = 2x(x-9)$		
$y = 2x(x-2)(x+4)$		
$y = x^2(6-x^2)$		
$y = \dfrac{3}{x+3}$		
$y = \dfrac{4x}{x-5}$		
$y = 1{,}8^x$		
$y = x^2 - 4$		
$y = -(x+4)(x-6)$		
$y = \dfrac{x^2-1}{x^2-9}$		


A
B
C
D
E
F
G
H
I

6. Statistiek

Toelichting
In de onderbouw wordt reeds gestart met de leerlijn statistiek. De empirische cyclus vormt de basis van het havo-vwo-programma in de bovenbouw. Deze cyclus beschrijft hoe op een gestructureerde wijze onderzoek uitgevoerd kan worden. Het onderzoek start met een onderzoeksvraag over een populatie. Hierna wordt door middel van een steekproef data verzameld. Deze wordt geordend en gerepresenteerd in diagrammen, tabellen en kentallen. Op basis hiervan worden via kwalitatief redeneren en/of via beslisregels conclusies getrokken over de populatie. Deze conclusies kunnen vaak niet met wiskundige zekerheid getrokken worden. Dit komt door de onzekerheid ten gevolge van het trekken van een steekproef uit een populatie en het feit dat beslissingsregels vaak arbitrair gekozen lijken te zijn. Wennen aan deze onzekerheid en enig gevoel voor statistisch redeneren ontwikkelen behoort tot de onderbouwstof. Dit houdt in dat er aandacht moet zijn voor *big ideas* als data representaties, verdelingen en variabiliteit. Door middel van ICT kunnen we zicht krijgen op de rol van toeval bij het trekken van steekproeven uit populaties. Bij een realistische dataset kunnen leerlingen zelf representaties met ICT maken, redeneren over verdelingen en deze beschrijven met kentallen voor centrum en spreidingsmaten. Naast algoritmische vaardigheden doen leerlingen hierbij ook datageletterdheid (Tolboom, 2012) op. Daarnaast kunnen leerlingen al starten met het kritisch kijken naar onderzoeksvragen, methoden en onderzoeksresultaten.
De nadruk zal liggen op statistisch redeneren (en niet zo zeer op berekeningen van bijv. gemiddelden, medianen en kwartielen), op het interpreteren van representaties als staafdiagrammen, frequentiepolygonen en boxplots (in plaats van het met de hand maken van deze representaties bij kleine datasets), op het leggen van verbanden tussen de verschillende representaties en welke informatie uit de betreffende representaties afgelezen kunnen worden. Hierbij gaan we uit van gegeven realistische datasets. Daarnaast kan aandacht besteed worden aan de problemen die er kunnen optreden als leerlingen zelfstandig een onderzoek doen.

De rol van kansrekening in de onderbouw kan beperkt blijven. Wel is een intuïtief begrip van onzekerheid nodig. Dit kan met behulp van simulaties aangeleerd worden. Voor de onderbouw van het vwo kan gestart worden met beperkte formele kansrekening.

Samenvattend:
De focus voor de onderbouw zal liggen op kernconcepten als:
- Empirische cyclus: Is er een goede onderzoeksvraag? over welke populatie gaat het?
- Data verzamelen: kun je met deze data de onderzoeksvraag beantwoorden?
- Data representeren en analyseren: Welke representaties en/of welke kentallen gebruik je voor je analyse?
- Conclusies met onzekerheid (die we vaak nog niet kwantificeren).
- Kwalitatief redeneren:
  Bijv. groepen vergelijken: bepalen aan de hand van staafdiagram of het gemiddelde in de ene steekproef groter is dan in de andere;
  of aangeven of een verband tussen twee variabelen sterk of zwak is;
  of n.a.v. een steekproef uitspraak doen over populatie: als in steekproef 45% VOOR is dan zeggen we in de populatie het percentage VOOR tussen bijv. 42% en 48% ligt.
- Gevoel voor variabiliteit (spreiding) via simulaties.
- Bij steekproeven nadenken over betrouwbaarheid en representatief.
- Valkuilen bij statistiek: bijv. vertekening van diagrammen via horizontale/verticale as verdeling; veranderen van klassebreedte bij staafdiagram; regressie-effect; omkering (bij flesvoeding kreeg 80% van de kinderen later last van alcoholisme versus 80% van de alcoholisten kreeg vroeger flesvoeding); *causaliteit* versus *confounding* (correlatie hoeft niet causaliteit te betekenen).

Denkgereedschap als voorbeelden van parate kennis/vaardigheden:
- Kwalitatief redeneren met en over gemiddelde/mediaan en het berekenen van gemiddelde/mediaan.
- Kwalitatief redeneren over spreiding en het berekenen van kwartielafstand.

- Percentielen (i.h.b. P_{25} en P_{75}).
- ICT gebruiken voor het maken van dotplots, staafdiagram, boxplot, puntenwolk, frequentietabel, kruistabel (i.h.b. 2x2-tabel) en informatie uit deze representaties halen ten behoeve van het beantwoorden van de onderzoeksvraag.

Deze kernconcepten en denkgereedschap zien we vaag terug in de **tussendoelen**:

Domein F: Informatieverwerking en onzekerheid

17. Data verzamelen, ordenen, interpreteren en vergelijken en grafische representaties van data maken, ook met behulp van technologie. De leerling kan:
    - 17.1 Grafische weergaven van data (tabel, diagram) aflezen en interpreteren.
    - 17.2 Data verzamelen ordenen, samenvatten en vergelijken met behulp van gemiddelde, modus, mediaan en spreiding (spreidingsbreedte en kwartielafstand) en conclusies trekken.
    - 17.3 Bij datasets (van eenvoudige, praktische contexten) uitspraken over kansen beoordelen en voorspellingen doen.
    - 17.4 Passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het verwerken, aflezen, representeren en vergelijken van dataverzamelingen.

Oriëntatie

Statistiek komen leerlingen overal tegen: buiten school en in school in verschillende vakken (zoals aardrijkskunde (Bosatlas), geschiedenis, biologie). Zonder dat leerlingen zich verliezen in rekenen, lijkt het verstandig een leerlijn te starten waarin steeds met gezond verstand een intuïtieve aanpak gekozen wordt, een verklaring geformuleerd of een conclusie getrokken wordt. Nadat een noodzaak om preciezer te gaan werken is gevoeld, kan dan het rekenen aan statistische grootheden gestart worden. Veel onderwerpen kunnen gestart worden met bijvoorbeeld het vergelijkingen van groepen op basis van diagrammen of tabellen. Kernconcepten als centrum, met gemiddelde, spreiding, waarschijnlijkheid (of onzekerheid) kunnen hierbij ingezet worden. In deze oriëntatiefase komt het verschil tussen populatie en steekproef aan bod: soms hebben we data over de hele populatie en soms enkel data van een steekproef. In de laatste situatie proberen we dan iets te zeggen over de populatie.

Van exploreren naar structuur.
In deze fase komen de verschillende soorten statistische problemen, als uitspraken doen over populatie op basis van een goede steekproef, het verschil tussen groepen, en het verband tussen variabelen aan bod. Daarnaast wordt het statistische denkgereedschap bij deze problemen ontwikkeld. Dat denkgereedschap is vaak nog kwalitatief van karakter, maar in enkele situaties ook kwantitatief. Er wordt aandacht besteed aan het gemiddelde, mediaan, spreidingsbreedte, en kwartielafstand. Als standaard 'plaatjes' komen frequentietabel met klassen, staafdiagram, boxplot, cirkeldiagram, lijndiagram, 2x2-tabel, kruistabel, puntenwolken. Dit wordt aangeleerd met behulp van realistische databestanden en ICT. Het berekenen van statistische maten en/of het maken van statistische diagrammen met de hand staan in dienst van het kunnen interpreteren van resultaten die gemaakt zijn met behulp van ICT. Na deze exploratie wordt vastgelegd wat tot de *parate kennis en vaardigheden (Weten dat)* moet behoren. Deze parate kennis en vaardigheden zullen leerlingen moeten kunnen inzetten bij het oplossen van statistische problemen.

Van kennis naar probleemoplossen
In deze fase zal aandacht besteed worden aan data exploratie. Bij een gegeven databestand wordt ICT benut om datarepresentaties te maken, zoals staafdiagrammen, boxplots, cirkeldiagrammen, 2x2-tabel, kruistabel, puntenwolk, enz. met kentallen zoals gemiddelde, mediaan, kwartielafstand. Uit de representaties worden conclusies getrokken over verschillen tussen groepen, verbanden tussen variabelen, of over de populatie aan de hand van een steekproef.

Van exploreren naar redeneren
In deze fase zal aan onderzoeksopdrachten gewerkt worden, waarin de empirische cyclus als leidraad fungeert. De onderzoeksvraag zal hier nadrukkelijk aandacht verdienen. In eerste instantie zal enkel de gehele populatie in beeld gebracht moeten worden; later zal met een steekproef gewerkt worden, waarna op basis van een steekproef een uitspraak over een (kleine) populatie gedaan moeten worden, waarbij een onzekerheid in acht genomen moet worden. Men kan denken aan:
In klas 2: Breng je eigen klas in beeld met betrekking tot bijv. gewicht, lengte
In klas 3: Onderzoek d.m.v. steekproef jouw eigen straat, eigen stad/dorp, eigen leeftijdsgroep in stad (aselect, representatief). In deze fase zal ook 'kritisch kijken' naar statistische resultaten aan bod moeten komen. Het is misschien vreemd maar voor sommige leerlingen is dit statistiekonderwijs tegelijkertijd eindonderwijs in het voortgezet onderwijs.

Relatie met schoolboeken
Onze huidige schoolboeken geven veel opgaven met mooie voorbeelden. Toch wordt al heel snel gezegd 'hoe het moet', wordt er al heel snel gerekend, en komt het kwalitatief redeneren er soms bekaaid vanaf.
Hierboven houden wij een pleidooi om meer aandacht te schenken aan het intuïtief begrip: eerst met gezond verstand en de bestaande kennis van leerlingen leren kijken naar de situatie. Ook het gebruik van ICT wordt aanbevolen. 'Met de hand' tekenen of berekenen zou altijd in dienst moeten staan van het begrijpen en interpreteren van ICT-resultaten. Verschillende statistische problemen die in het voortgezet onderwijs aan bod moeten komen (op basis van een steekproef proportie/gemiddelde een uitspraak doen over de populatie, het verschil tussen groepen aangeven, het verband tussen twee variabelen) zouden in de onderbouw gestart kunnen worden. Daarbij zou een grote focus op het kwalitatief redeneren moeten liggen en ook op het uitvoeren van korte onderzoeksopdrachten.
De opgaven en opdrachten die hierna komen, kunnen vaak als start of als afsluiting van de statistiekhoofdstukken uit de veelgebruikte methoden gebruikt worden.

Als u instemt met de hiervoor beschreven doelen van het statistiekonderwijs, zoals die nu in de bovenbouw havo-vwo gaan functioneren, dan kunt u ook besluiten om uw schoolboeken voor dit onderwerp dicht te laten om samen met uw klassen (en de wiskundesectie) te ervaren hoe inspirerend het voor u en uw leerlingen is om op deze manier met statistiek aan de slag te gaan!

6.1 Van exploreren naar structuur

Oefeningen van exploreren naar structuur

Toelichting
Leerlingen hebben al een notie van het begrip gemiddelde en van het begrip variatie (spreiding). We proberen deze kennis eerst te mobiliseren en er dan op voort te bouwen. Nadrukkelijk komt dit kwalitatief redeneren eerst voordat er gerekend wordt en voordat allerlei stappenplannen en formele definities aan bod komen.
We gebruiken ICT om snel de verschillende representaties te kunnen maken; de focus ligt hier op het kwalitatief redeneren naar aanleiding van plaatjes en kentallen en op de verbanden tussen verschillende representaties van dezelfde dataset.

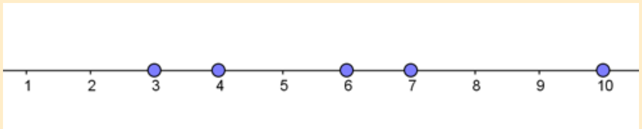
Oefening 6.1.1.a Gemiddeld

Het woord gemiddelde had oorspronkelijk de betekenis van ‘het midden houdend tussen uitersten’ en rekenkundig ‘de waarde hebbend, die men krijgt door het totaal der waarden te delen door het aantal’.
Hieruit ontwikkelde zich ook de vagere betekenissen ‘zonder uitersten’ dus ‘gewoon, veel voorkomend’ en ook wel ‘middelmatig’.

a. Gemiddeld kom je in onderstaande zinnen tegen. Zeg in eigen woorden wat er precies bedoeld wordt.
   1) Een huis van gemiddelde grootte.
   2) Dat is een gemiddelde prestatie.
   3) De gemiddelde lengte is 1,80 meter.
   4) Hij loopt gemiddelde zo’n 10 km hard op een doordeweekse avond.

Op school wordt het gemiddelde gebruikt om een rapportcijfer te berekenen. Dit gemiddelde cijfer wordt bepaald door het aantal tekortpunten gelijk te maken aan het aantal overpunten.
Bekijk bijvoorbeeld:
Bij de cijfers 6, 6, 7, 9 is het gemiddelde 7. In dit voorbeeld leveren de twee ‘zessen’ beide 1 tekort (dus samen 2 tekortpunten) en de ‘negen’2 overpunten. Dus bij ‘zeven’ is het geheel in evenwicht.

b. Bepaal op deze manier het gemiddelde van de cijfers in onderstaande figuur.



Die tekort- en overpunten noemen we vaak de afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde.
Hieronder zie vier van de vijf repetitiecijfers vermeld.

	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4	Rep 5
Cijfer	6	7	9	6	
Afwijking t.o.v. gemiddelde					

c. Hoeveel moet deze persoon voor de vijfde repetitie halen om gemiddeld een 7,5 te staan?
d. Controleer je antwoord door alle afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde op te tellen.

Soms tellen sommige repetities meer mee dan andere.

	Rep 1 Weging 2	Rep 2 Weging 3	Rep 3 Weging 2	Rep 4 Weging 2	Rep 5 Weging 4
Cijfer	6	7	9	6	
Afwijking t.o.v. gemiddelde					

e. Bereken het gemiddelde na vier repetities.
Bereken vervolgens welk cijfer deze leerling moet halen voor de vijfde repetitie om na vijf repetities gemiddeld een 7,5 te staan.

We kijken naar een repetitie van een hele klas. In de tabel zie je hoe vaak de cijfers voorkwamen.

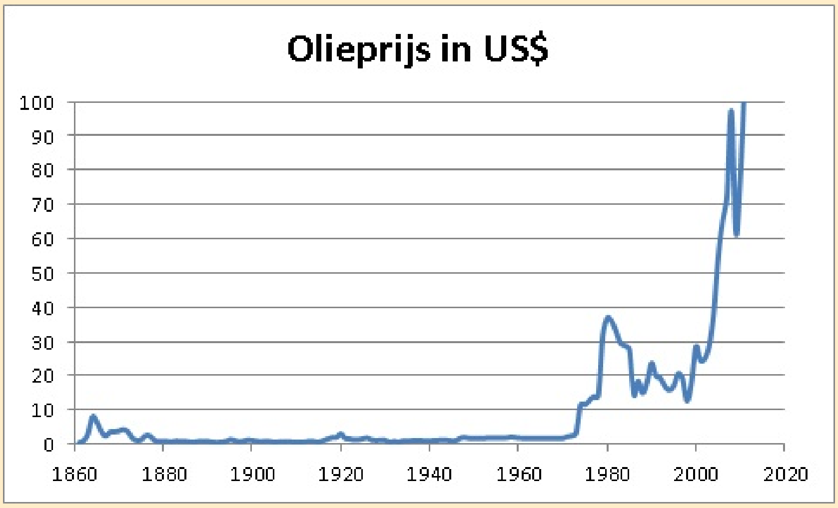
Cijfer	6	7	8	9	10
Aantal keer	5	8	7	3	2

Bereken het gemiddelde cijfer van deze klas.

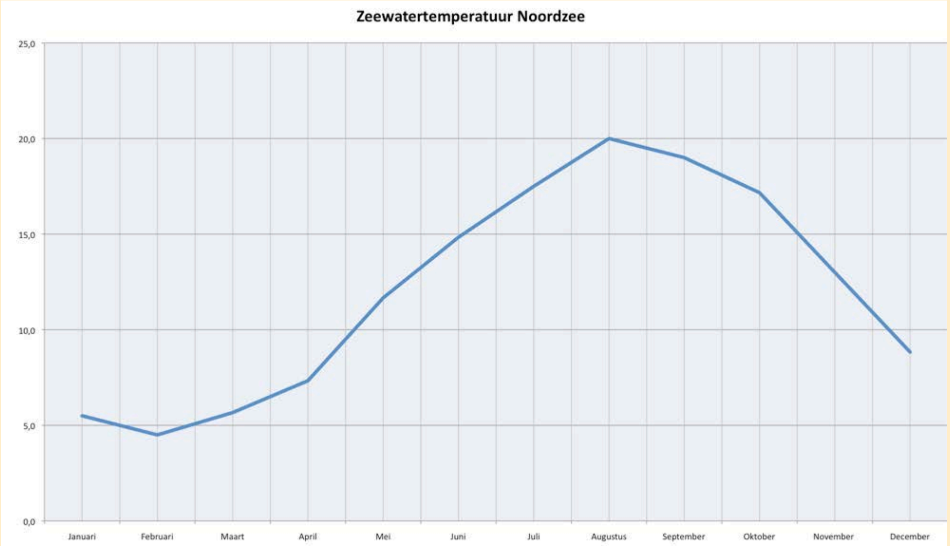
Oefening 6.1.1.b *Variatie*

Variatie in de resultaten zie je bijna overal en altijd.
Bekijk de situaties hieronder en bespreek of er sprake is van variatie in de uitkomsten.
Vind jij dat er veel variatie in de uitkomsten zit?

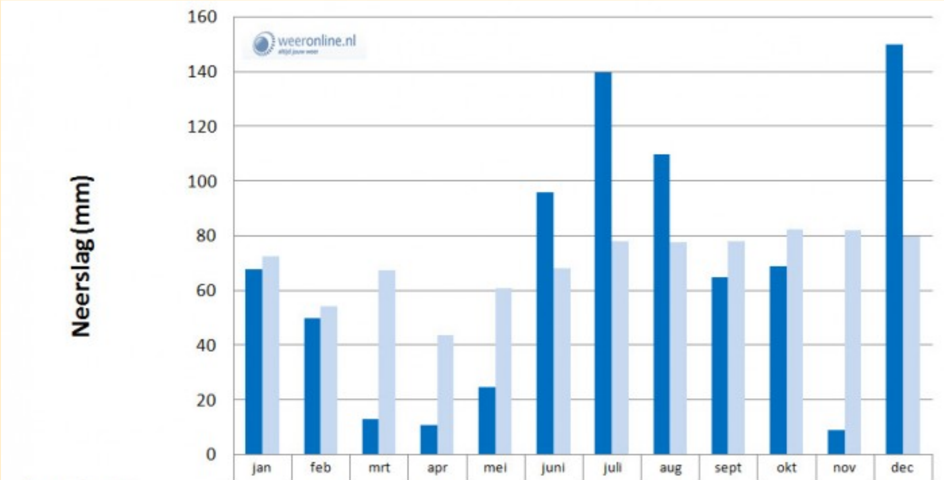
a. De prijs van een vat olie.



b. De temperatuur van het zeewater.

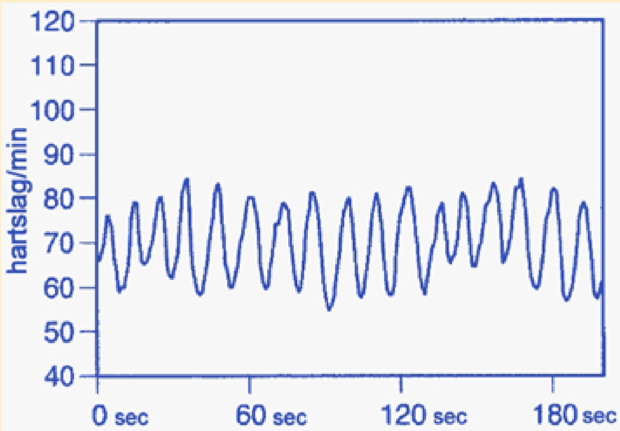


c. De neerslag in De Bilt in 2011 en de ‘normale’ neerslag.

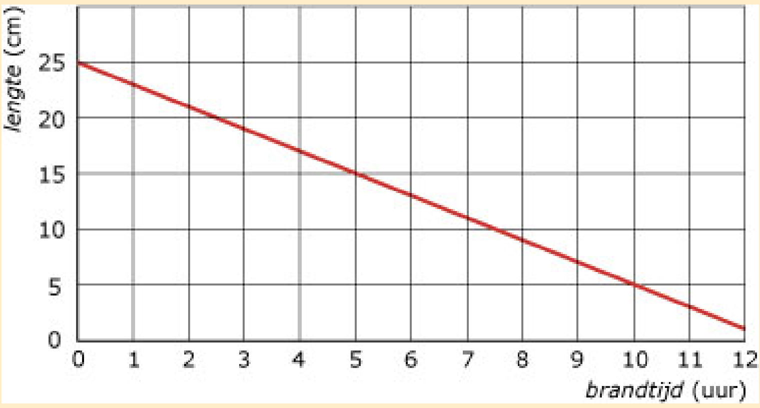


	jan	feb	mrt	apr	mei	juni	juli	aug	sept	okt	nov	dec
Neerslag 2011	68	50	13	11	25	96	140	110	65	69	9	150
Neerslag normaal (1981-2010)	73	55	68	44	61	68	78	78	78	83	82	80

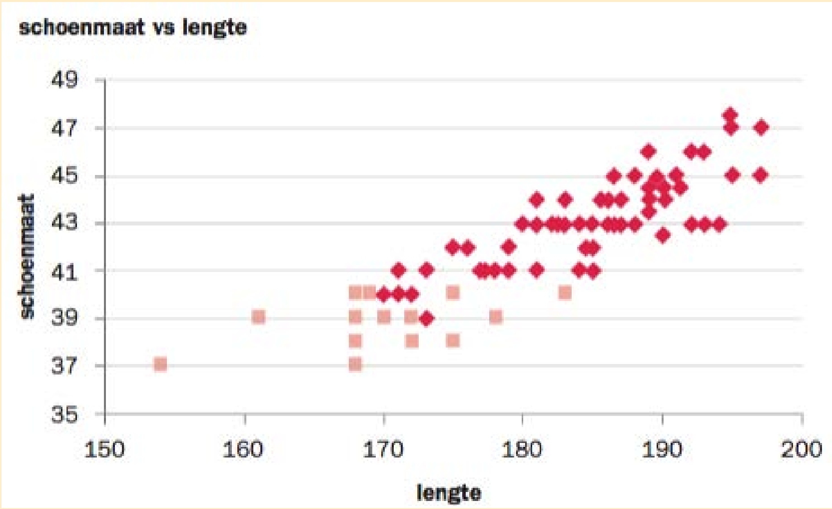
d. De hartslag van een persoon.



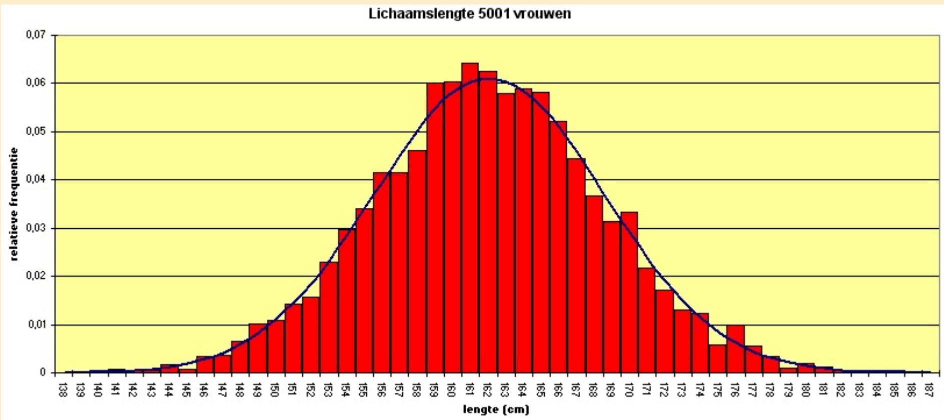
e. De hoogte van een brandende kaars.



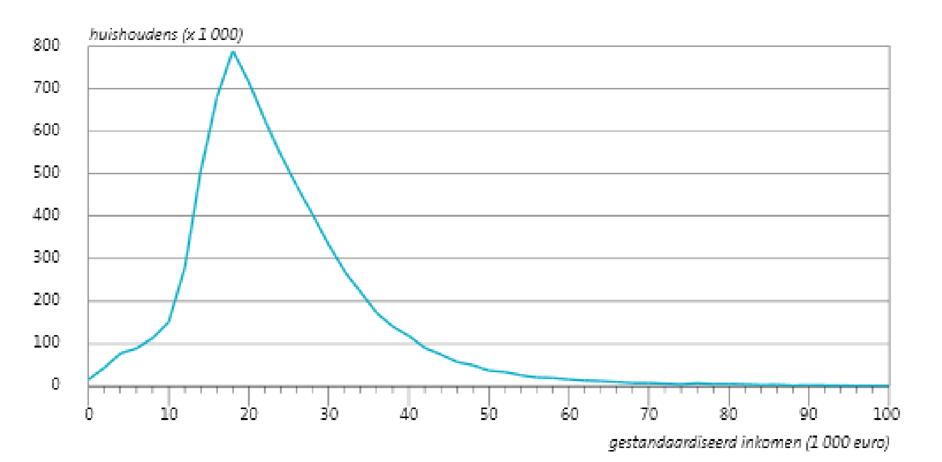
f. De schoenmaat



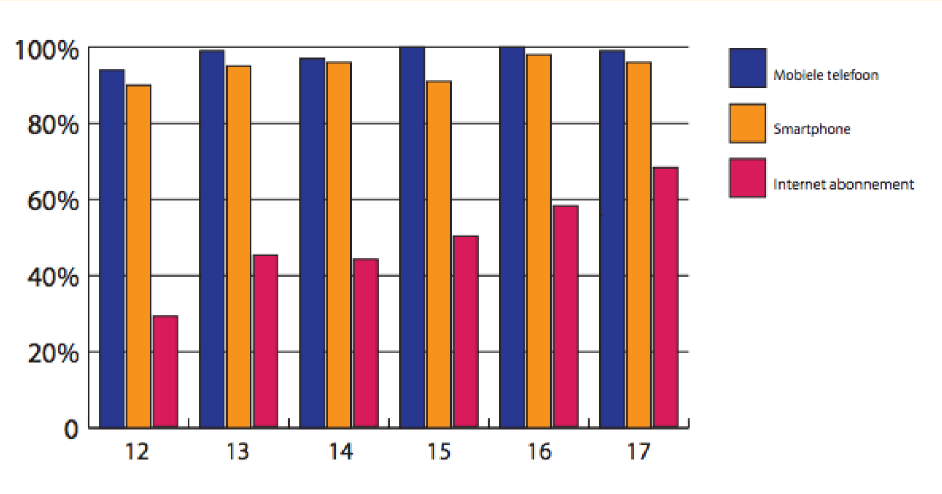
g. De lengte van vrouwen



h. De inkomensverdeling



i. Het percentage mobiele telefoonbezitters bij tieners.



Figuur 2.1 – Het bezit van mobiele telefoons, smartphones en internet-abonnementen bij 12- t/m 17-jarigen. (Bron: MKO/Kennisnet, 2014)

Data exploreren met ICT

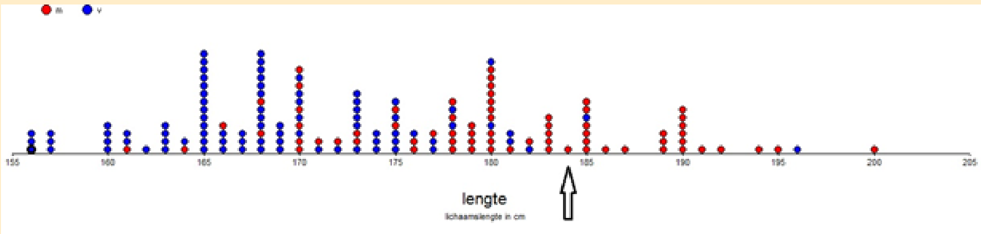
In deze oefening ga je een leerling, Wouter, volgen.
Wouter is een van de 154 leerlingen in de dataset ▶**school.vus.**
Hij is 184 cm lang en weegt 68 kg. Zijn cijfergemiddelde is 7,5. We vergelijken deze gegevens van Wouter met die van andere leerlingen.

Om dit te doen kijken we naar een aantal representaties van de gegevens. Bij iedere representatie kun je Wouter terugvinden, maar niet elk plaatje geeft dezelfde informatie. In deze paragraaf bekijken we alle plaatjes apart, en bekijken we welke informatie we hieruit kunnen halen.

Representaties

In de voorbeelden wordt steeds gekeken naar gewicht. Je gaat daarna zelf met behulp van ICT een plaatje maken van de lengte en ook een van het cijfergemiddelde. Beantwoord de vragen over Wouter.

Dotplot



De plek van Wouter is aangegeven. Het is duidelijk te zien dat Wouter bij de langere leerlingen in de groep hoort. Het verschil tussen jongens en meisjes wordt aangegeven in kleur. Dit is niet altijd goed te zien, vooral bij een zwart/wit print valt de kleur weg.

Oefening 6.1.1.c *Dotplots*

a. Maak met gebruik van ICT een dotplot voor gewicht en voor cijfergemiddelde. Wijs Wouter aan in je grafieken.

b. Geef een omschrijving van Wouters gewicht en cijfergemiddelde ten opzichte van de rest van de groep, gebruik alleen de informatie die je in de dotplots kunt zien.

Frequentietabel

In de frequentietabel staat per klasse hoeveel waarnemingen hier in zitten.

lengte	Freq.
155 - 159	6
160 - 164	14
165 - 169	37
170 - 174	26
175 - 179	24
180 - 184	23
185 - 189	12
190 - 194	9
195 - 199	2
200 - 204	1
Totaal	154

Wouter zit in de klasse 180-184. Maar je kunt Wouter nu niet meer individueel aanwijzen.

Je verliest informatie over het individu wanneer je een frequentietabel met klassen maakt. Toch wordt dit heel vaak gedaan. Uit de tabel blijkt dat 23 leerlingen ongeveer even lang zijn als Wouter. Hij zit niet in de groep waar de meeste leerlingen inzitten, hij is dus langer dan de modale lengte. De lengte-klasse van Wouter zit wel net iets boven het gemiddelde. Wouter is dus niet uitzonderlijk lang.

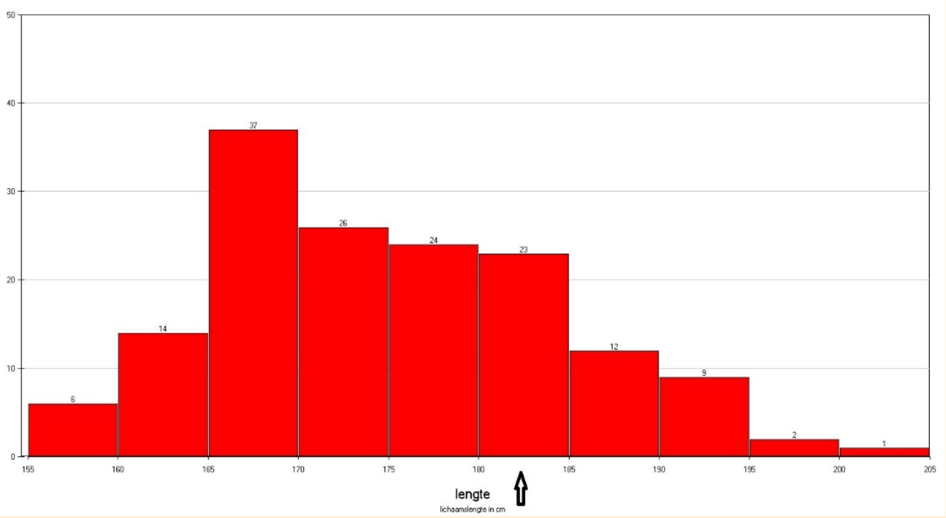
Oefening 6.1.1.d *Frequentietabel*

a. Maak met gebruik van ICT een frequentietabel voor gewicht en cijfergemiddelde. Denk na over de klassenindeling. (Vuistregel: maak ongeveer 10 klassen)

b. Wat kun je over Wouters gewicht en cijfergemiddelde zeggen wanneer je alleen naar de frequentietabellen kijkt?

Staafdiagram

In een staafdiagram zet je de frequenties uit de frequentietabel in een grafiek.



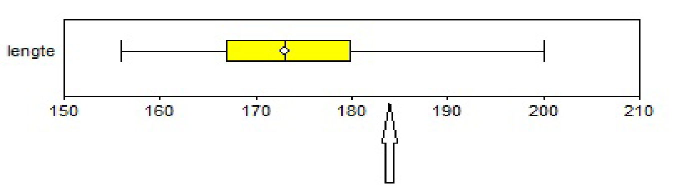
Wouter's lengte zit in de klasse 180-185 cm. Deze klasse is niet de klasse met de meeste leerlingen, maar er zitten relatief veel leerlingen in deze klasse. Meer naar rechts in de grafiek wordt het aantal leerlingen in de klassen snel kleiner. Wouter hoort bij de langere leerlingen, maar is niet uitzonderlijk lang.

Oefening 6.1.1.e *Staafdiagram*

a. Maak een staafdiagram voor gewicht en cijfergemiddelde.
b. Wat kun je over Wouters gewicht en cijfergemiddelde zeggen wanneer je alleen naar de staafdiagrammen kijkt?

Boxplot

Bij een boxplot verlies je nog meer individuele gegevens. Om een boxplot te maken gebruik je de mediaan, het eerste en derde kwartiel en het maximum en minimum.



De minimale lengte = 156 cm De maximale lengte = 200 cm
Mediaan = 173 cm Q1 = 167 cm Q3 = 180 cm

In ieder van de 4 stukjes van een boxplot zit 25% van de waarnemingen. Dus:
- tussen het minimum en Q1 zit 25% van de waarnemingen.
- tussen Q1 en de mediaan zit 25% van de waarnemingen.
- tussen de mediaan en Q3 zit 25% van de waarnemingen.
- tussen Q3 en het maximum zit 25% van de waarnemingen.

De plek van Wouter is aangegeven. Wouter zit voorbij de box van de boxplot, dit betekent dat hij bij de langste 25% van de leerlingen hoort. Het is niet duidelijk hoe de verdeling binnen deze groep is, je kunt alleen nog zeggen dat hij niet het langste is.

Oefening 6.1.1.f *Boxplot*

a. Maak voor de variabelen gewicht en cijfergemiddelde boxplotten.
b. Geef de plek van Wouter in beide boxplotten aan. Wat kun je zeggen over Wouter ten opzichte van de rest van de leerlingen?

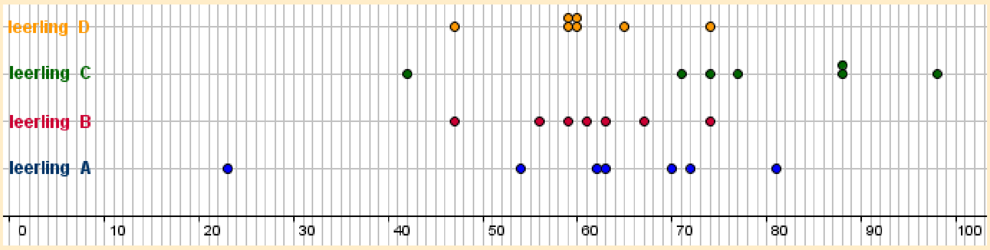
Oefening 6.1.1.g *Gemiddelde en spreiding*

Je ziet hier de SE-cijfers (schoolexamencijfers) van drie leerlingen aan het eind van havo 5.

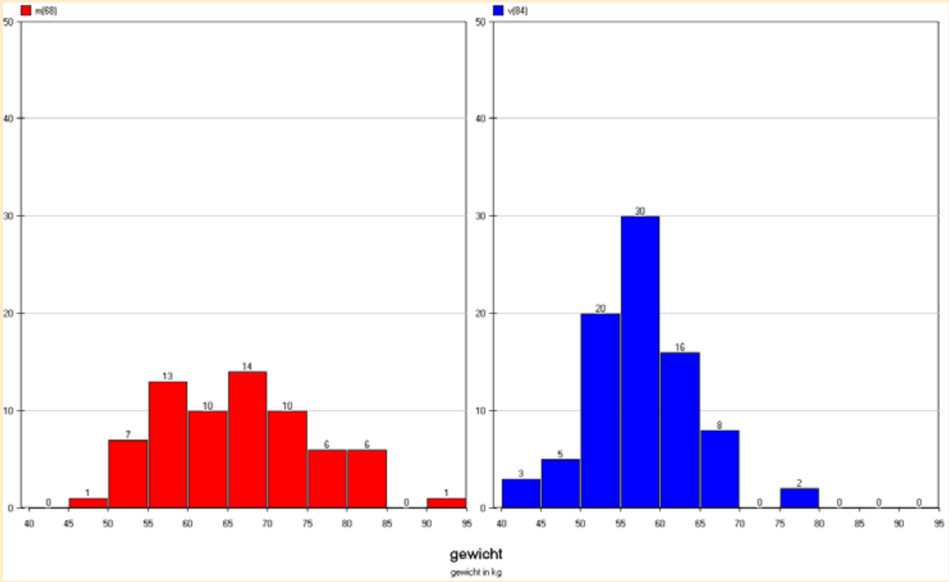
Leerling A	7,3	7,6	8,3	8,4	8,4
Leerling B	6,2	8,5	6,9	8,2	7,0
Leerling C	9,2	8,8	8,6	8,9	8,9

a. Geef aan welke leerling het hoogste gemiddelde heeft.
b. Geef aan welke leerling het grootste spreiding heeft.

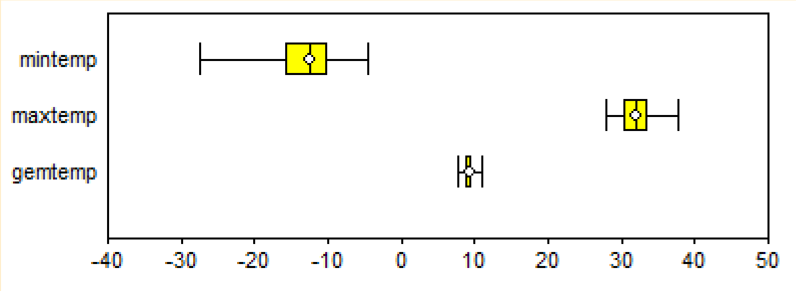
c. Weer SE-cijfers van enkele leerlingen met dezelfde opdracht.



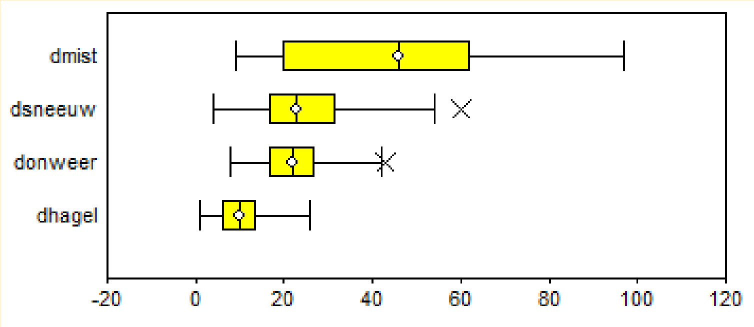
d. Gegevens over het gewicht van brugklassers: in welke groep is het gemiddelde gewicht het hoogste?
En in welke groep is de spreiding het grootst?



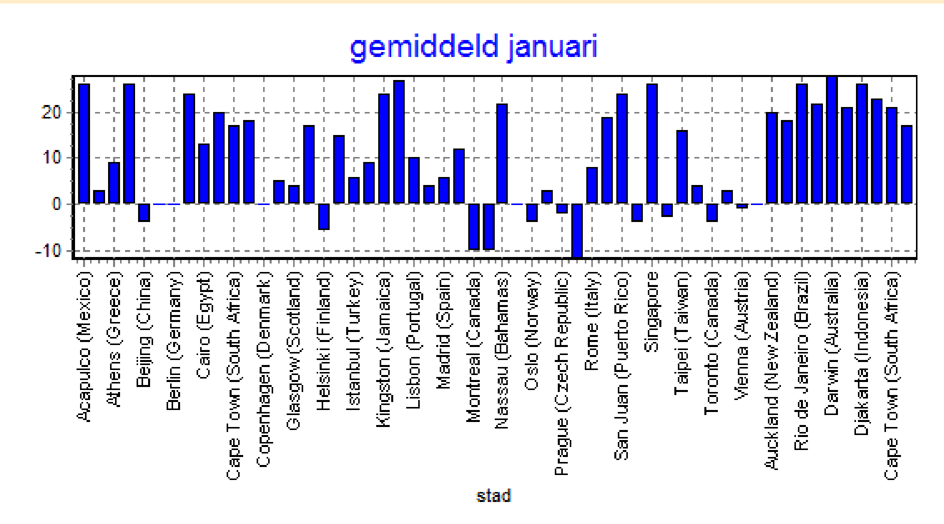
e. Hieronder zie je informatie over de minimum, maximum en gemiddelde temperaturen in een stad over verschillende jaren in een bepaalde stad. Welke van deze drie (mintemp, maxtemp, gemtemp) heeft het hoogste gemiddelde?
Bij welke is de spreiding het grootst?

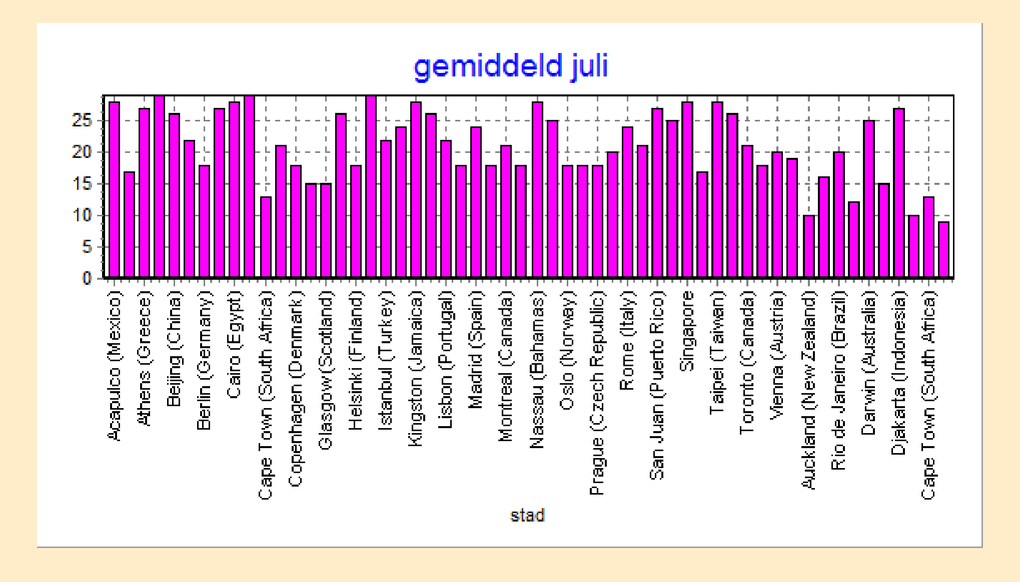


f. Hieronder zie je informatie over het aantal dagen per jaar dat er mist is, sneeuwt, onweert en hagelt. Bij welke is het gemiddelde het hoogste?
En bij welke is de spreiding van het aantal dagen het grootst?



g. Hieronder zie je informatie over de gemiddelde temperaturen in januari en in juli, in een aantal steden. We vergelijken deze steden voor januari en voor juli. Bij welk van deze perioden is het gemiddelde het hoogste?
En bij welke periode is de spreiding het grootst?



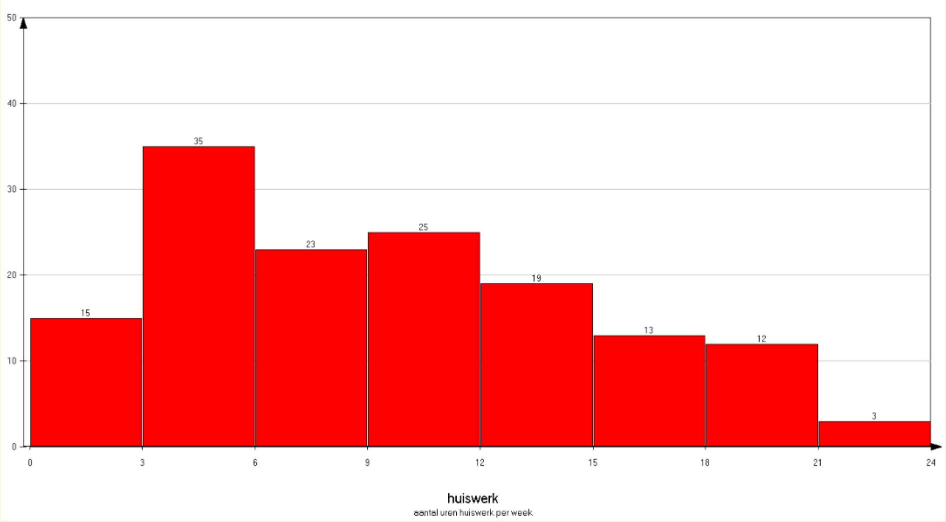

gemiddeld juli
25
20
15
10
5
0
Acapulco (Mexico)
Athens (Greece)
Beijing (China)
Berlin (Germany)
Cairo (Egypt)
Cape Town (South Africa)
Copenhagen (Denmark)
Glasgow(Scotland)
Helsinki (Finland)
Istanbul (Turkey)
Kingston (Jamaica)
Lisbon (Portugal)
Madrid (Spain)
Montreal (Canada)
Nassau (Bahamas)
Oslo (Norway)
Prague (Czech Republic)
Rome (Italy)
San Juan (Puerto Rico)
Singapore
Taipei (Taiwan)
Toronto (Canada)
Vienna (Austria)
Auckland (New Zealand)
Rio de Janeiro (Brazil)
Darwin (Australia)
Djakarta (Indonesia)
Cape Town (South Africa)
stad

Opdrachten van exploreren naar structuur

Opdracht 6.1.2.a *Het verband tussen representaties*

Ga naar de dataset ▶**school.vus.**
Zoals je weet is Wouter een van de leerlingen. In deze opdracht gaan we op basis van een representatie proberen te voorspellen hoe een andere representatie eruit zal zien.

Voorbeeld:
Hier zie je een staafdiagram van het aantal uren huiswerk per week.



a. Maak een schets van een boxplot (ga niet rekenen). En controleer je antwoord met behulp van het bestand school.vus.
b. Kun je op basis van de bovenstaande figuur een schatting maken van het gemiddelde aantal uren huiswerk? En van de mediaan?
Controleer je antwoorden weer met behulp van het bestand school.vus.

Hier zie je een frequentietabel van het gewicht van de 154 leerlingen.

gewicht	Freq.
40-<45	3
45-<50	6
50-<55	27
55-<60	43
60-<65	26
65-<70	22
70-<75	10
75-<80	8
80-<85	6
85-<90	0
90-<95	1
Totaal	152

c. Maak een schets van de bijbehorende boxplot. Maak ook een schatting van het gemiddelde en van de mediaan. Controleer weer je antwoorden.

Opdracht 6.1.2.b   Het verband tussen huiswerk en cijfers

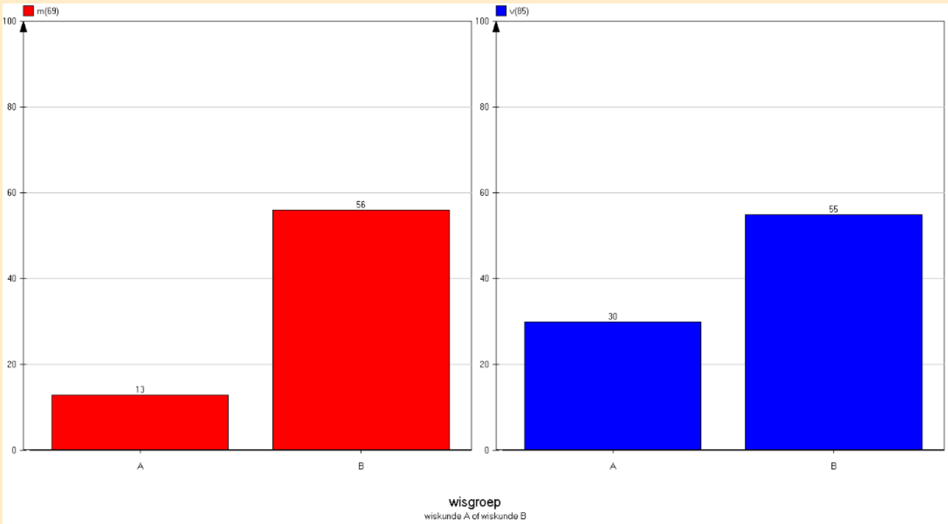
Zou er een verband zijn tussen het aantal uren huiswerk en het cijfergemiddelde? Daarvoor is onderstaande kruistabel gemaakt.

uren huiswerk	cijfergemiddelde			Totaal
	6 - <7	7 <8	8 - <9	
0-<5	6	29	2	37
5-<10	9	23	3	35
10-<15	9	25	8	42
15-<20	2	9	7	18
20-<25	1	7	.	8
Totaal	27	93	20	140

Zeg op basis van deze kruistabel iets over het verband tussen huiswerk en cijfergemiddelde. Gebruik het bestand school.vus om een puntenwolk te maken en vul je antwoord aan.

Opdracht 6.1.2.c   Het vergelijken van twee groepen

Hier zie je informatie over de aantallen jongens en meisjes die wiskunde A of wiskunde B hebben. De informatie voor jongens staat links.

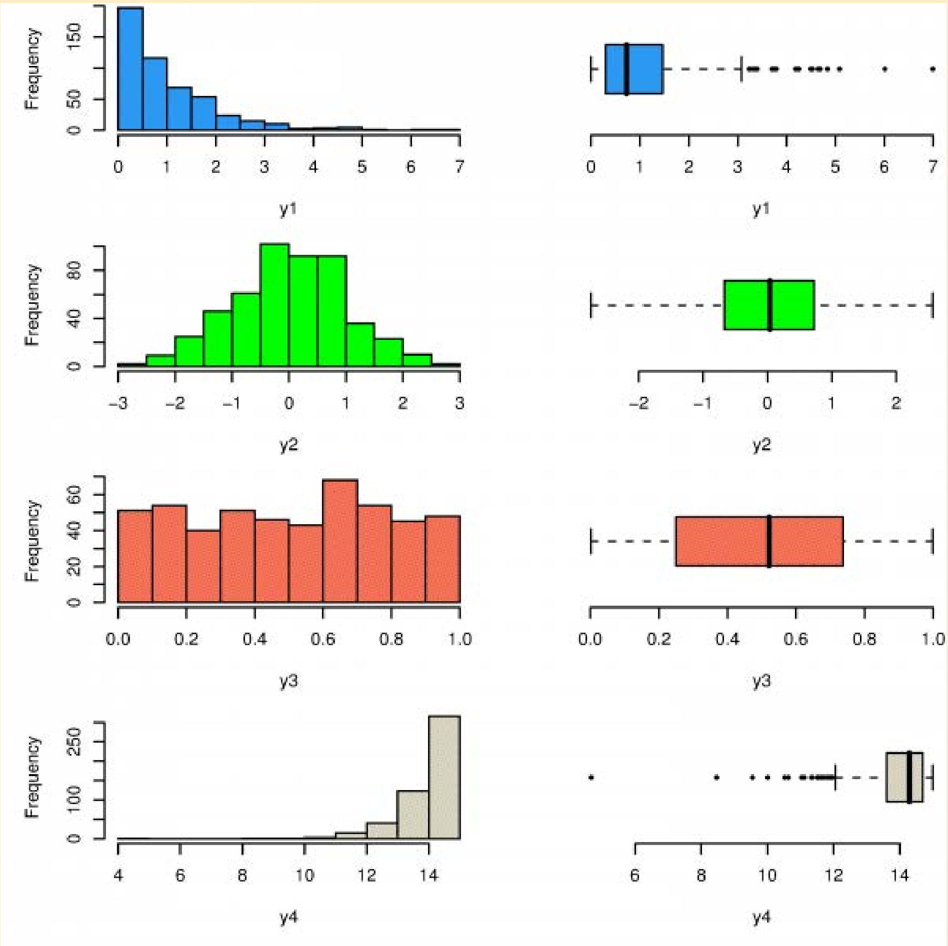


Maak een 2x2-tabel. Hoe zou je, met deze gegevens, kunnen verdedigen dat jongens vaker wiskunde B kiezen?

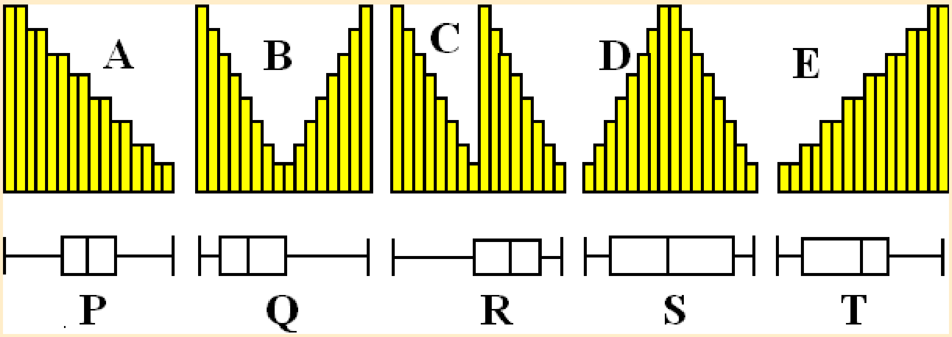
wisgroep	geslacht		Totaal
	m	v	
A			
B			
Totaal			154

Opdracht 6.1.2.d *Een patroon*

Hieronder zie je bij verschillende staafdiagrammen een boxplot van dezelfde verdeling. Bestudeer de voorbeelden goed en probeer het patroon te ontdekken.



Bekijk nu onderstaande figuur.
Probeer nu bij ieder van de staafdiagrammen A tm E de meest passende boxplot (uit P tm T) te zoeken.



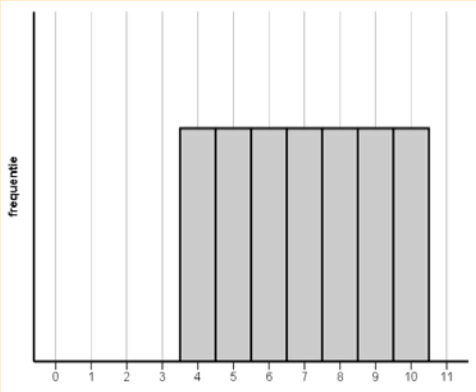
Opdracht 6.1.2.e *Cumulatieve frequentie*

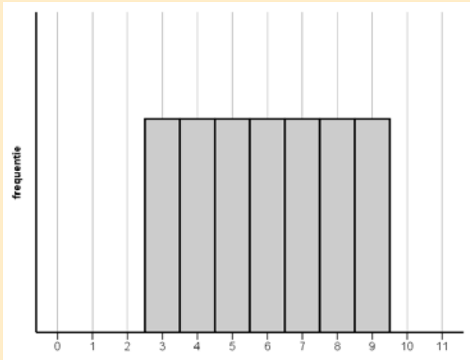
Hieronder zie je de examenresultaten van een wiskunde A pilot examen. Bij dit examen konden de leerlingen maximaal 100 punten halen.
De kolom “cum. fr.“ (cumulatieve frequentie) geeft aan hoeveel leerlingen er de aangegeven score of minder gehaald hebben. Zo lees je bijvoorbeeld af dat 15 leerlingen een score van 33 of minder punten gehaald hebben.
We willen de leerlingen in vier groepen verdelen: de groep van de laagste 25%, de groep van de middelste 50% en de groep van de bovenste 25%.
Geef aan bij welke score je tot de groep van de middelste 50% hoort. Je kunt daarvoor handig de kolom “cumulatieve frequentie” gebruiken, maar dan moet je wel eerst uitzoeken wat de cumulatieve frequentie is. Bestudeer daarvoor de tabel.

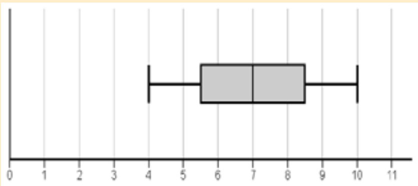
score	frequentie	cum. fr.	score	frequentie	cum. fr.	score	frequentie	cum. fr.
10	0	0	41	10	58	71	25	684
11	0	0	42	12	70	72	20	704
12	0	0	43	19	89	73	13	717
13	0	0	44	17	106	74	15	732
14	0	0	45	7	113	75	15	747
15	0	0	46	11	124	76	13	760
16	0	0	47	8	132	77	10	770
17	0	0	48	12	144	78	5	775
18	0	0	49	11	155	79	12	787
19	0	0	50	18	173	80	10	797
20	1	1	51	17	190	81	11	808
21	0	1	52	16	206	82	9	817
22	0	1	53	22	228	83	10	827
23	0	1	54	23	251	84	4	831
24	1	2	55	26	277	85	9	840
25	1	3	56	19	296	86	5	845
26	1	4	57	19	315	87	6	851
27	1	5	58	25	340	88	3	854
28	1	6	59	28	368	89	4	858
29	0	6	60	25	393	90	7	865
30	2	8	61	28	421	91	4	869
31	5	13	62	37	458	92	3	972
32	0	13	63	30	488	93	2	874
33	2	15	64	19	507	94	3	877
34	3	18	65	26	533	95	2	879
35	4	22	66	29	562	96	0	879
36	2	24	67	25	587	97	2	881
37	8	32	68	29	616	98	1	882
38	4	36	69	21	637	99	0	882
39	6	42	70	22	659	100	1	883
40	6	48						

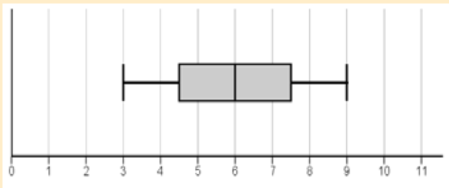
Opdracht 6.1.2.f *Statistisch drietal*

Hieronder staan van verschillende verdelingen steeds drie kaartjes.
Knip de kaartjes uit en leg ze open op tafel. Zoek vervolgens samen met je groepsgenoten de drietallen (drie kaartjes behorend bij dezelfde verdeling).



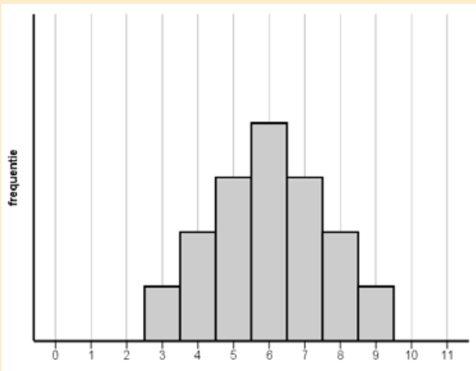


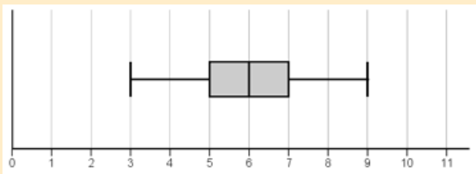




Het gemiddelde is 7.
De kwartielafstand is 3.

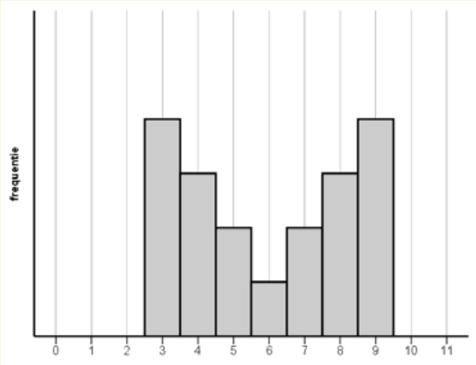
Het gemiddelde is 6.
De kwartielafstand is 3

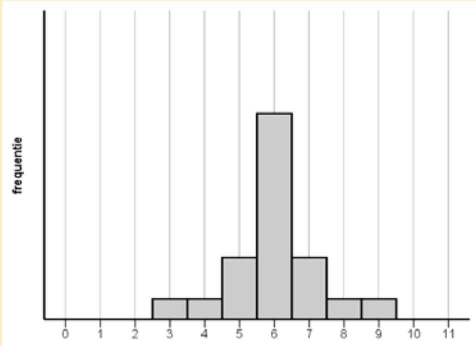


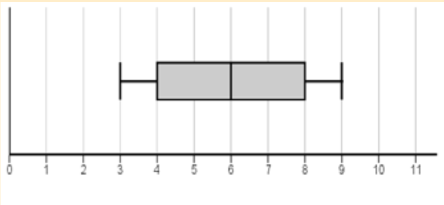


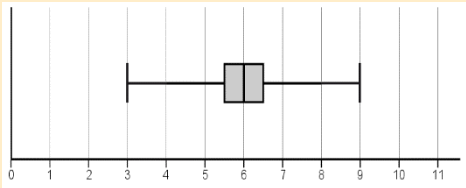
Het gemiddelde is 6.
De kwartielafstand is 2.

Het gemiddelde is 6.
De kwartielafstand is 4.



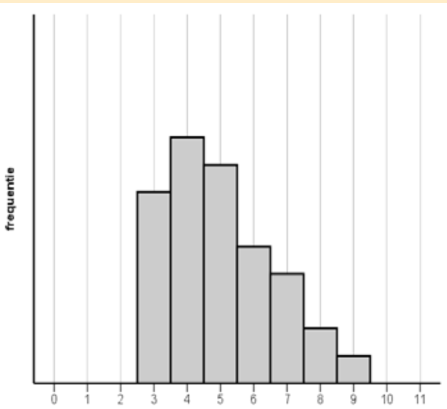


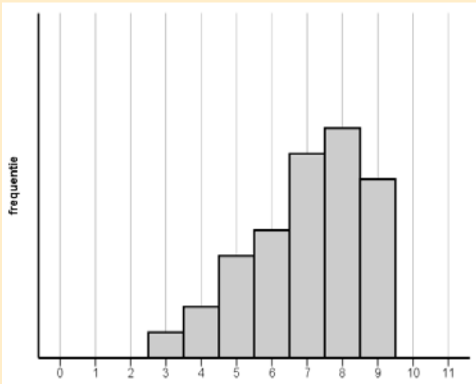


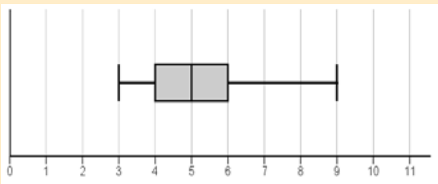


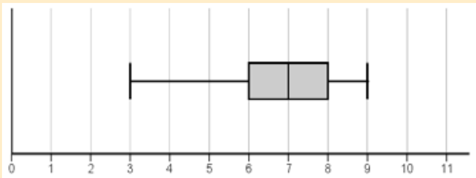
Het gemiddelde is 6.
De kwartielafstand is 1.

Het gemiddelde is 5.
De kwartielafstand is 2.









Het gemiddelde is 7.
De kwartielafstand is 2.

6.2 Van kennis naar probleemoplossen

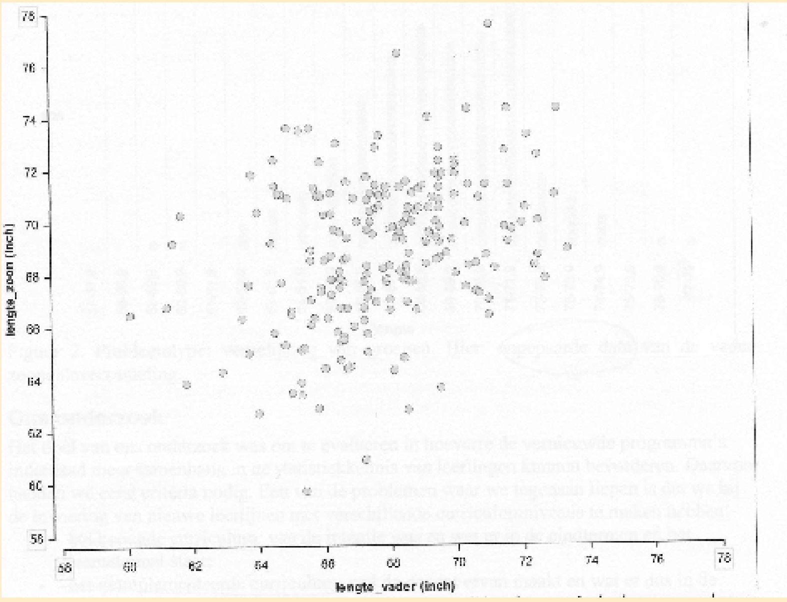
Toelichting

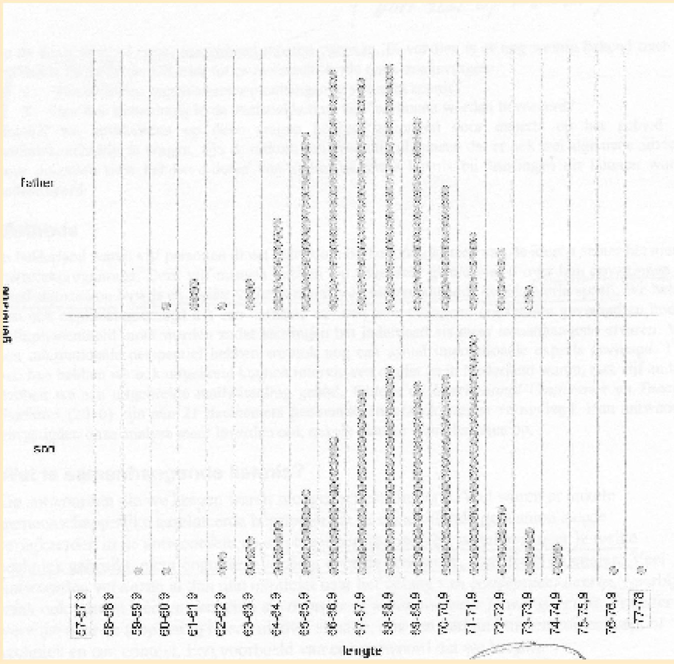
De focus ligt nu op het probleem oplossen: met de bestaande kennis en vaardigheden een probleem aanpakken. Het gaat dus om productieve kennis en vaardigheden.

Oefeningen van kennis naar probleemoplossen

Oefening 6.2.1.a *Lengten van vaders en zonen*

Hieronder zie je data van een onderzoek over de lengten van zonen en hun vaders.

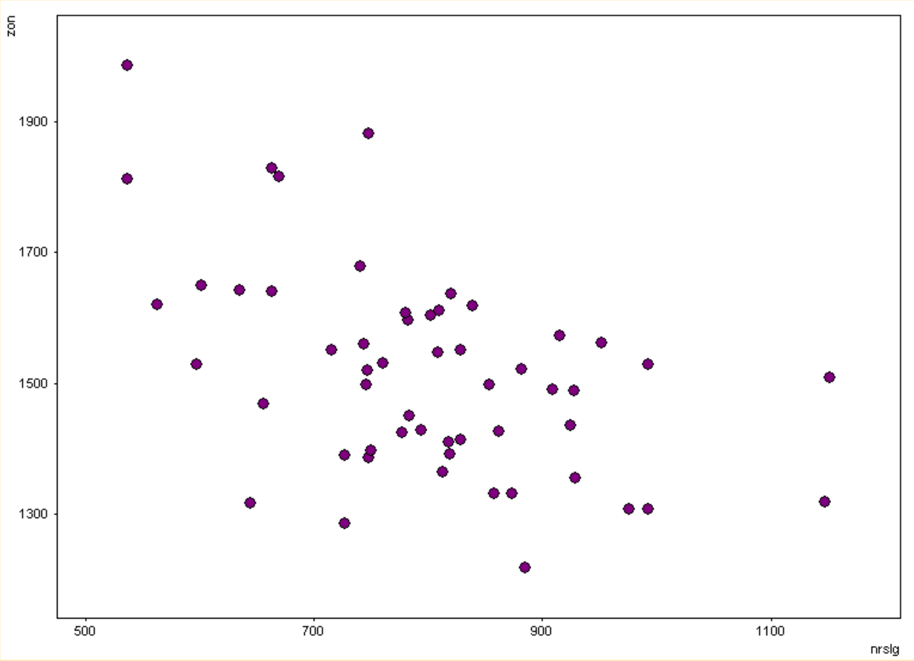




Welke groep is langer": de zonen of de vaders? Hoe bepaal je dat in deze diagrammen?

Oefening 6.2.1.b *Neerslag en zonneschijn*

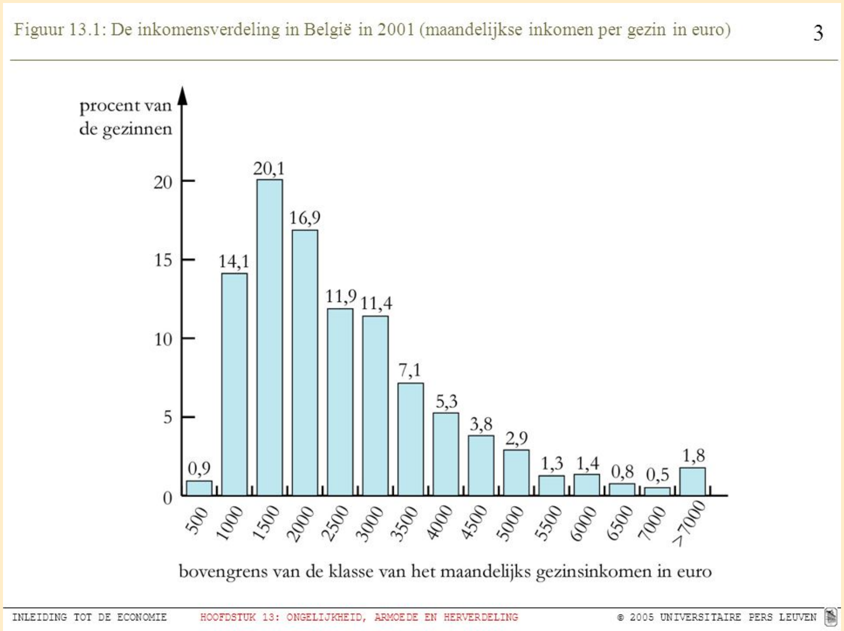
Hieronder zie je informatie over de neerslag per jaar (in mm) en het aantal uren zon per jaar voor de jaren 1935-1988.



a. Maak een schatting voor het gemiddeld aantal uren zon in een jaar.
b. Welke conclusies kun je trekken met betrekking tot het verband tussen de hoeveelheid neerslag en de hoeveelheid zonneschijn?

Oefening 6.2.1.c *Inkomsten van de Belgen*

Maak een schatting van het gemiddelde maandelijkse gezinsinkomen in België in 2001 naar aanleiding van deze figuur.



Oefening 6.2.1.d Havo-leerlingen in tabellen

Hier zie je informatie over havo-leerlingen. Je vindt informatie over de variabelen geslacht (1=jongen, 2=meisje), profiel (1=CM profiel, 2= EM profiel, 3=NG profiel, 4=NT profiel), en over de geboortemaand (1=januari, 2=februari, enz).

Welke kritiek kun je op deze tabellen hebben?

Variabele	geslacht
Aantal waarnemingen	154
Gemiddelde	1,6
Mediaan	2,0
Modus	2
Minimum	1
Maximum	2

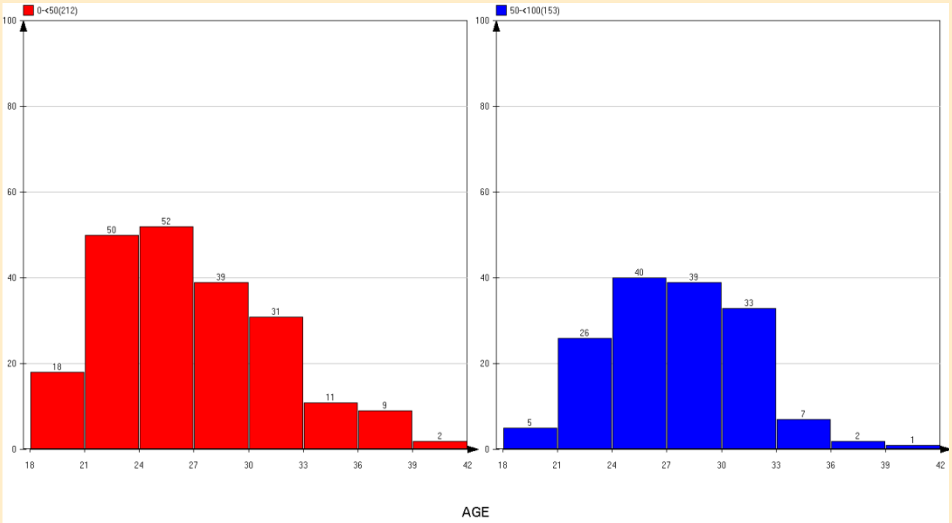
Variabele	Gebmnd
Aantal waarnemingen	154
Gemiddelde	6,4
Mediaan	6,0
Modus	1
Minimum	1
Maximum	12

Variabele	profiel
Aantal waarnemingen	154
Gemiddelde	2,9
Mediaan	3,0
Modus	3
Minimum	1
Maximum	4

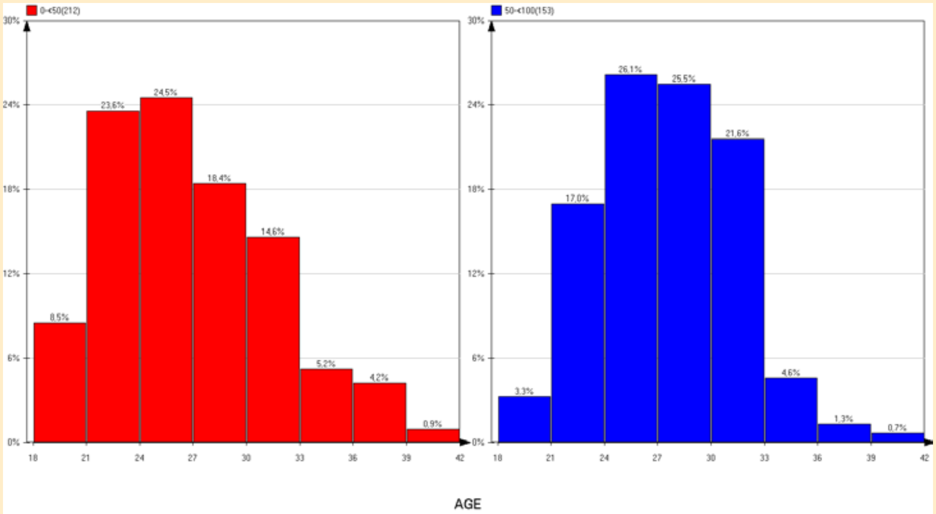
Oefening 6.2.1.e NBA

In de figuren 1 t/m 3 zie je gegevens over de leeftijd van NBA-spelers en ook hoeveel procent van de wedstrijd tijd deze spelers in het veld staan.

Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

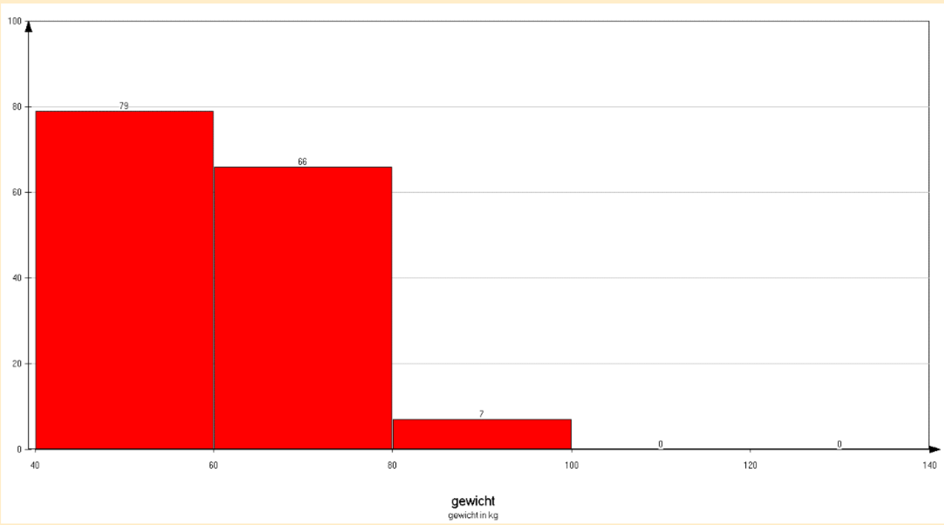
	MIN%		
AGE	0-<50	50-<100	Totaal
0-<30	159	110	269
30-<60	53	43	96
Totaal	212	153	365

Welke van deze figuren helpt je het meest om de vraag te beantwoorden “Staan oudere spelers (30 en 30+) langer in het veld dan de jongeren (30-)?”

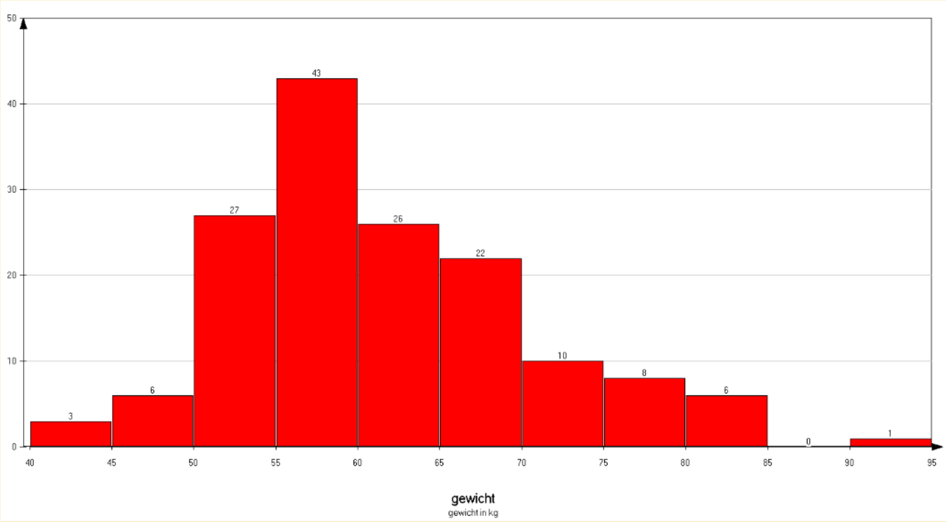
Oefening 6.2.1.f *Gewicht leerlingen havo 4*

Hieronder zie je twee figuren met informatie over het gewicht van havo 4 leerlingen.

Figuur 1



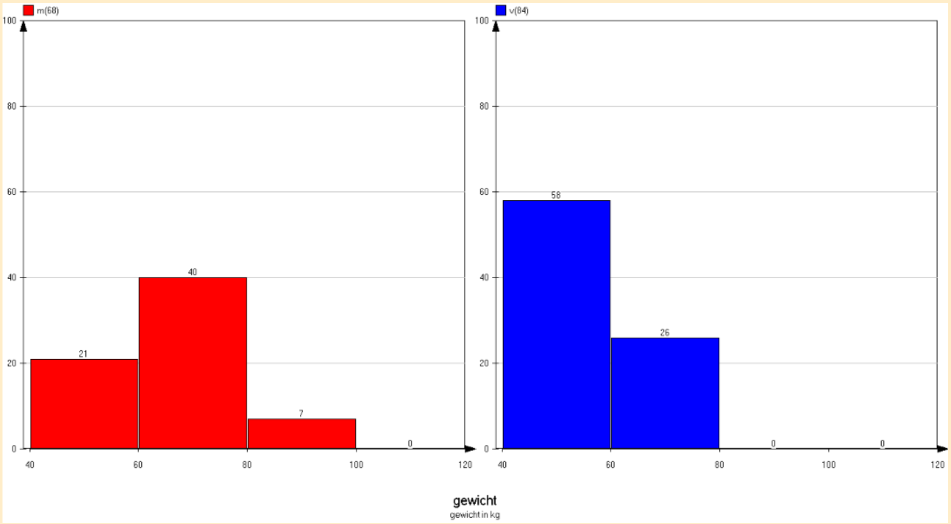
Figuur 2



a. Leg uit dat beide figuren bij dezelfde groep kunnen horen.
b. Geef aan welke verschillen je ziet tussen deze twee figuren. Welke geeft je de meeste informatie over de gewichten van deze groep leerlingen?

Hieronder zie je van figuur 1 een uitsplitsing tussen jongens en meisjes (jongens steeds links).

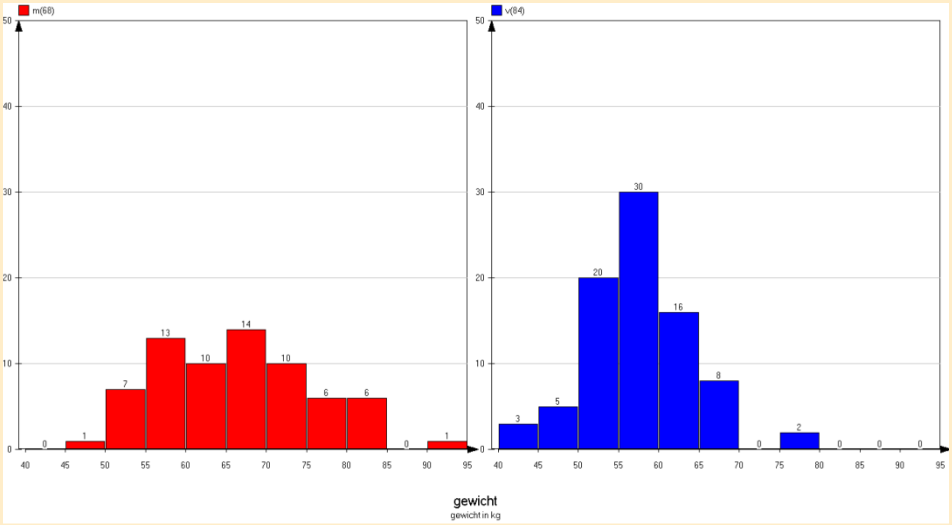
Figuur 3



c. Leg uit dat deze figuur bij figuur 1 kan passen.

Ook deze twee figuren zijn weer uitgesplitst.

Figuur 4



d. Op basis van welke van deze twee figuren (3 en 4) kun je het beste de jongens en meisjes vergelijken?

e. Bekijk nu alle figuren en bespreek bij iedere figuur welke informatie met betrekking tot het gewicht je daar goed uit af kunt lezen.

Opdrachten van kennis naar probleemoplossen

Opdracht 6.2.2.a *Examencijfers*

Hier zie je een overzicht van de behaalde cijfers van een klas bij een examen.

cijfer	4	5	6	7	8	9
Aantal leerlingen	1	2	6	9	5	3

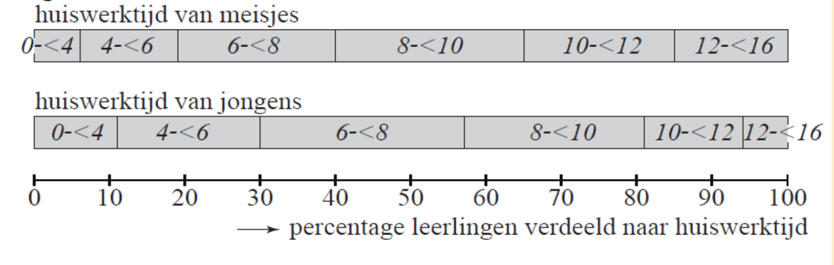
a. Schat het gemiddelde voordat je het gaat berekenen. Hoe goed was je schatting?

Je zult niet vaak het gemiddelde hoeven uit te rekenen (tenminste als je geen docent wordt). Maar vaker krijg je wel het resultaat van een berekening te zien. In dit geval bijvoorbeeld: het gemiddelde in de klas was een 6,5.
Wat zegt dat nu?

b. Bedenk een tabel of een grafiek met een cijferverdeling waarbij het gemiddelde (ongeveer) 6,5 is en er sprake is van een kleine spreiding. Maak er ook een waarbij de spreiding groot is.

Opdracht 6.2.2.b *Huiswerktijd*

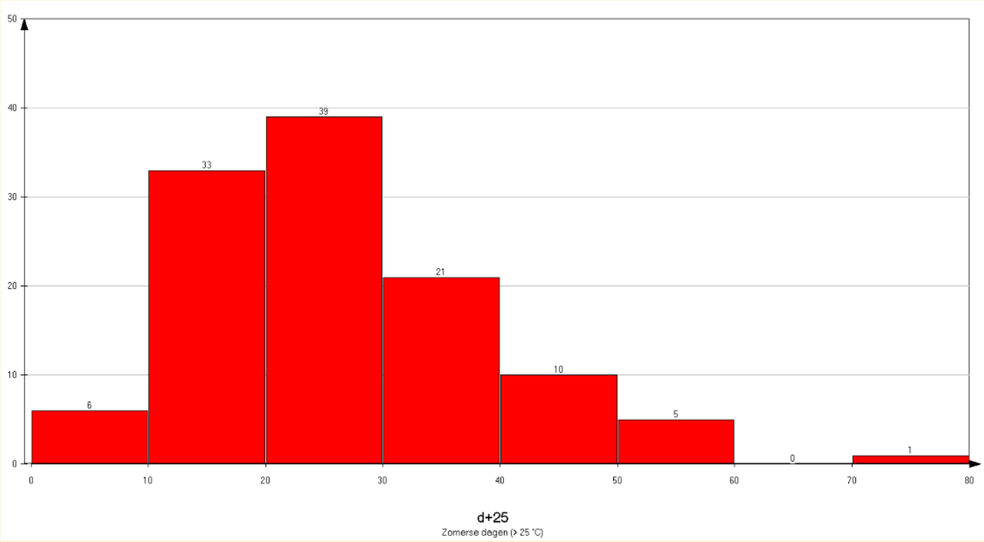
In een onderzoek naar de tijd die per week aan huiswerk besteed wordt, wordt de volgende figuur gemaakt.

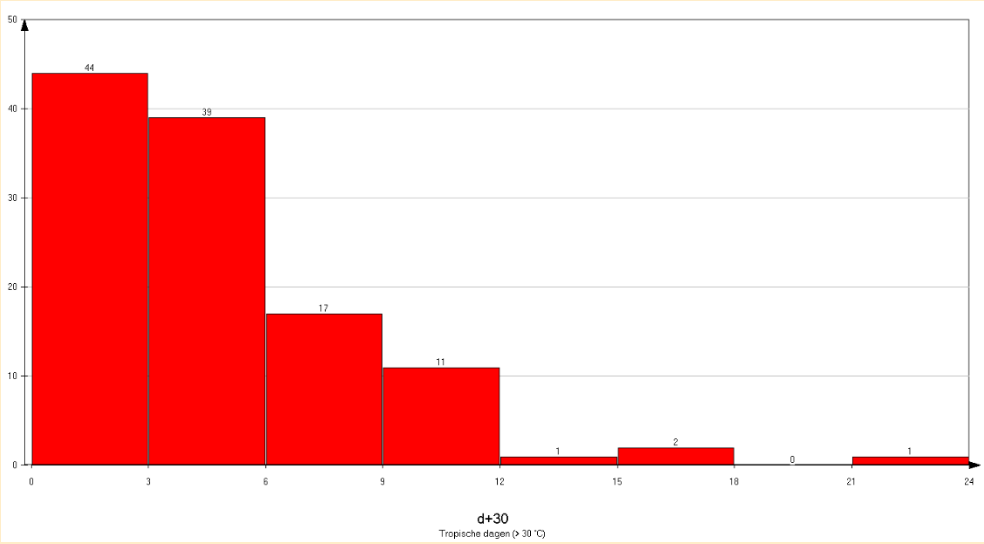


Welke conclusies kun je trekken over de verschillen tussen jongens en meisjes met betrekking tot het aantal uren huiswerk per week.

Opdracht 6.2.2.c *Zonnige en tropische dagen*

In 2008 waren er 33 zonnige dagen (25^0 C of meer) en 4 tropische dagen (30^0 C of meer). In de onderstaande figuren zie je informatie over het aantal zonnige dagen en over het aantal tropische dagen in de jaren vanaf 1894 t/m 2008). Zo zie je in de eerste figuur 2008 terug in de kolom met 21.



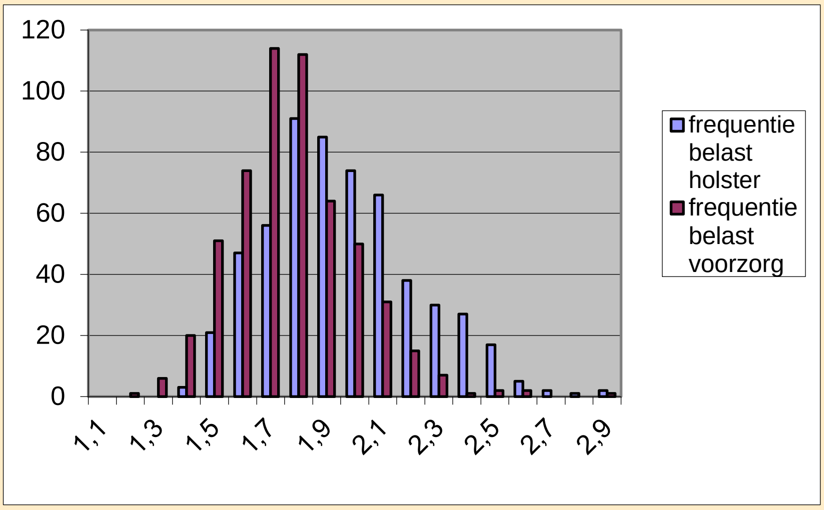


a. Leg uit wat de 44 in de tweede figuur precies betekent.
b. Probeer aan de hand van deze twee figuren “iets” te zeggen over het aantal zonnige dagen en het aantal tropische dagen gedurende de periode 1894 t/m 2008.

Opdracht 6.2.2.d *Reactiesnelheid*

In een politieonderzoek naar reactiesnelheid bij het schieten van politieagenten: hoe lang duurt het afvuren van een kogel? Er worden twee situaties vergeleken, namelijk wapen in holster en wapen vrij (het wapen uit voorzorg al in de hand).

reactiesnelheid in seconden	*frequentie holster*	*frequentie voorzorg*	*reactiesnelheid in seconden*	*frequentie holster*	*frequentie voorzorg*
1,1	0	0	2,2	38	15
1,2	0	1	2,3	30	7
1,3	0	6	2,4	27	1
1,4	3	20	2,5	17	2
1,5	21	51	2,6	5	2
1,6	47	74	2,7	2	0
1,7	56	114	2,8	1	0
1,8	91	112	2,9	2	1
1,9	85	64	tot	565	551
2,0	74	50	gem	1,956	1,776
2,1	66	31	med	1,9	1,8

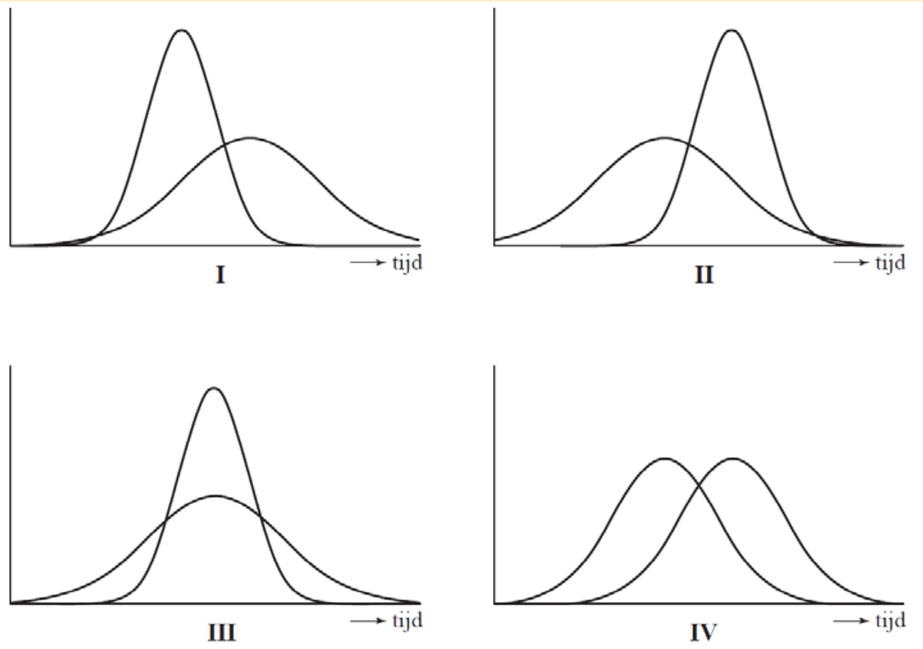


a. Bepaal op basis van de figuur bij welke situatie de reactietijd het langst is. Geef aan hoe je dat in de figuur ziet.
b. Welke van de twee situaties geeft de grootste spreiding in reactietijden.
c. Maak een schets van een boxplot op basis van deze figuur. Het gaat om de globale vorm, dus niet rekenen.

Opdracht 6.2.2.e *Samenstellen grafieken*

Hieronder zie je, in vier situaties, steeds twee verdelingen: een voor de jongens en een voor de meisjes. Welke bij de jongens en welke bij de meisjes horen is nog niet van belang.
Men wil nu bij iedere situatie een grafiek tekenen voor de hele groep (jongens en meisjes samen).

Neem aan dat er evenveel jongens als meisjes in het onderzoek zitten.



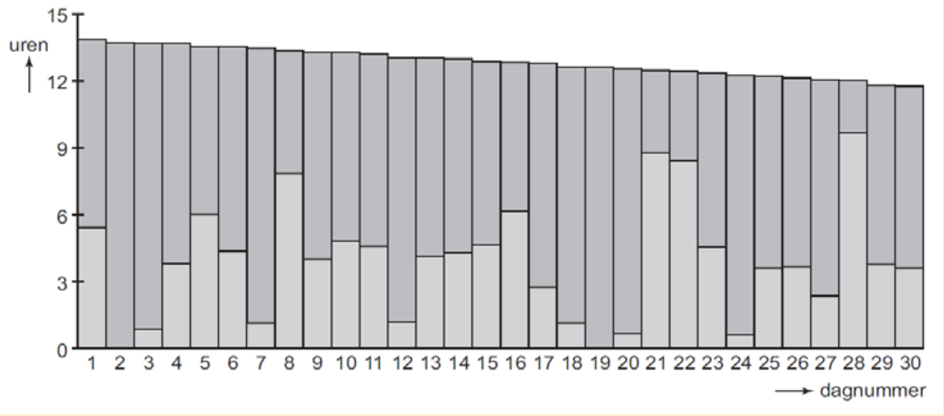
a. Schets in alle situaties de grafiek voor de totale groep.

In een onderzoek naar de tijd die jongens en meisjes thuis besteden aan hun huiswerk kwam naar voren dat jongens gemiddeld korter aan hun huiswerk zitten en dat de spreiding in huiswerktijd bij jongens kleiner is.

b. Welke van de vier situaties, I, II, III of IV, past het best bij de resultaten van dit onderzoek.

Opdracht 6.2.2.f *Daglengte*

Hier zie je informatie over de lengte van de dag (aantal uren dat de zon op is) en het aantal zonne-uren (het aantal uren dat de zon schijnt).



Maak een schatting van de gemiddelde lengte van de dag en ook van het gemiddeld aantal zonne-uren volgens deze figuur. Over welke maand zal dit waarschijnlijk gaan?

Opdracht 6.2.2.g *Basketbalwedstrijden*

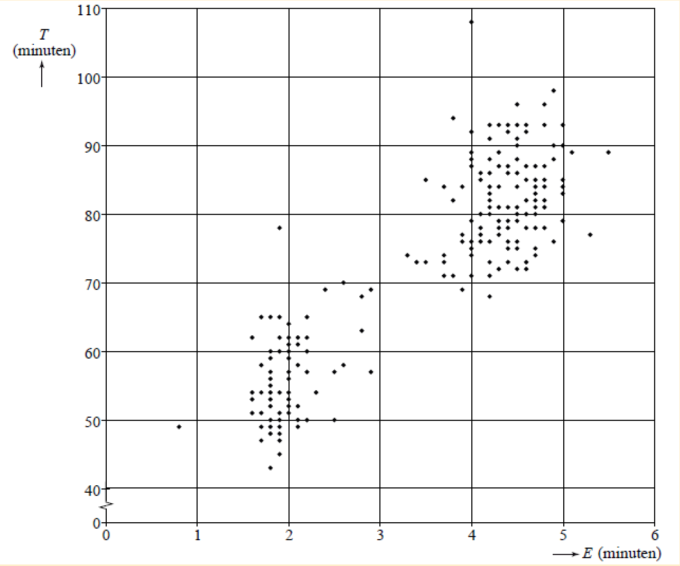
Een basketbalteam speelt met 5 spelers in het veld. Vaak twee “kleine” spelers (guards), twee forwards en 1 grote man (center).
Bij basketbalwedstrijden worden allerlei acties geturfd, waaronder het aantal schotpogingen en ook het aantal treffers daaruit.
Hieronder zie je dat voor guard 2 geldt dat hij 3 van 7 schotpogingen raak schoot (3/7), dat is een schotpercentage van 42%.

Team	Guard 1	Guard 2	Forward 1	Forward 2	Center	Team totaal
A	6/12=50%	5/10=50%	8/21=38%	1/2=50%	8/14=57%	28/59=47%
B	2/5=40%	3/7=42%	1/3=33%	1/3=33%	…..	…..

Als de statistieken zijn ingevuld blijkt dat alle spelers van team A een hoger schotpercentage hebben dan de overeenkomstige speler van team B. Maar ………. team B heeft een hoger percentage bij het team totaal.
Stel dat beide teams 59 schotpogingen hebben gemaakt.
Bedenk een mogelijk aantal schotpogingen en een mogelijk aantal treffers, zodat de center van team B een lager schotpercentage heeft dan de center van team A maar dat het percentage van het team totaal bij team B hoger is dan dat van team A.

Opdracht 6.2.2.h   Old Faithful

Hier zie je gegevens over Old Faithful, een geiser die regelmatig water spuit (eruptie).

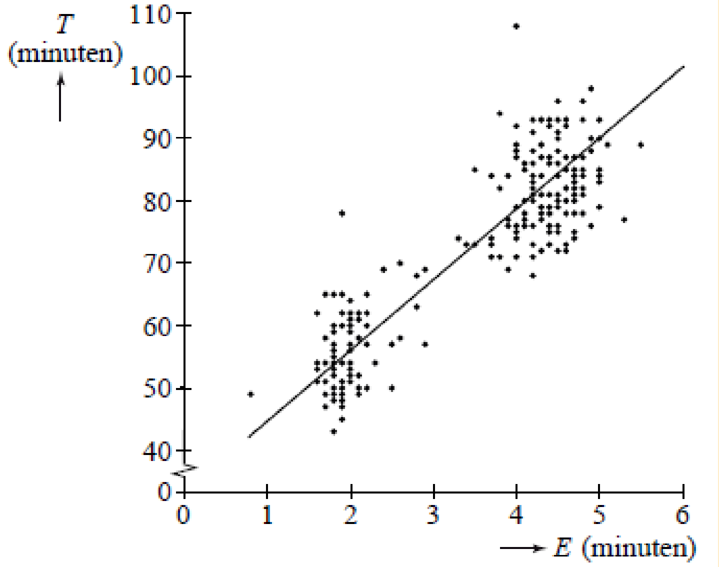


Van Wikipedia:

Old Faithful is de beroemdste geiser in het Amerikaanse Yellowstone National Park in het Upper Geyser Baasin. Van de vele geisers is deze de meest actieve; hij blaast om de 60 tot 80 minuten hete dampen in de lucht. Old Faithful geldt als de grootste attractie van het park. Een uitbarsting kan tot 32.000 liter kokend water zo'n 56 m hoog spuiten. Reeds meer dan 137.000 uitbarstingen werden genoteerd, die anderhalve tot 6 minuten duren, met tussen iedere uitbarsting een half uur tot twee uur.

In de figuur zijn de eruptietijden en de tussentijden aangegeven. Zo is bijvoorbeeld het meest linkse punt in de figuur (0,8;49). Dit wil zeggen: de eruptie duurde 0,8 minuten en daarna was het 49 minuten rustig (de tussentijd was 49 minuten, d.w.z. het duurde 49 minuten voordat de volgende eruptie kwam).

Om het verband tussen de eruptietijd en de tussentijd te bestuderen werd een lijn in de figuur getekend.



In hoeverre is dit een goede benadering van het verband tussen de eruptietijd en de tussentijd? Zou je het verband tussen de eruptieduur en de tussentijd ook anders kunnen beschrijven?

6.3 Van exploreren naar redeneren

Toelichting
Het gaat nu om statistisch redeneren en kritisch leren kijken naar statistische resultaten en onderzoeksopzet zonder dat de waarde van statistiek uit het oog verloren wordt. Deze opgaven lenen zich goed om in klassengesprekken uitgediept te worden*.*

Oefeningen van exploreren naar redeneren

Oefening 6.3.1.a De onderzoeksvraag

Bekijk de volgende probleemsituaties en formuleer bij elk een heldere onderzoeksvraag (of vragen):

a. Wat is het succes van bijles?
b. Wat willen havo-leerlingen doen in hun vrije tijd?
c. Welke betekenis hebben vriendinnen voor meisjes?
d. Spijbelen havo 5 leerlingen?

Oefening 6.3.1.b Deugt die enquête wel?

Wat mankeert er aan de volgende enquête vragen en formuleer voorstellen tot verbeteringen (eventueel meerdere verbeteringen).

a. De film *Grease* is door heel veel mensen gezien. Heb jij deze gezien?
b. Hoeveel boeken heb je het afgelopen jaar gelezen?
c. Lees je een krant, zoals de *Volkskrant* of *Algemeen Dagblad*?
d. Hoe vaak ben je vorig jaar naar de dokter geweest?
e. Denk je dat criminaliteit beter bestreden kan worden? Ja/Nee

Oefening 6.3.1.c Marktonderzoek

In een onderzoek naar inkomen van mensen in een stad, worden op zaterdag op de markt mensen ondervraagt “Wat verdient U per maand”.
Waarom zou je de resultaten van deze steekproef moeten wantrouwen?

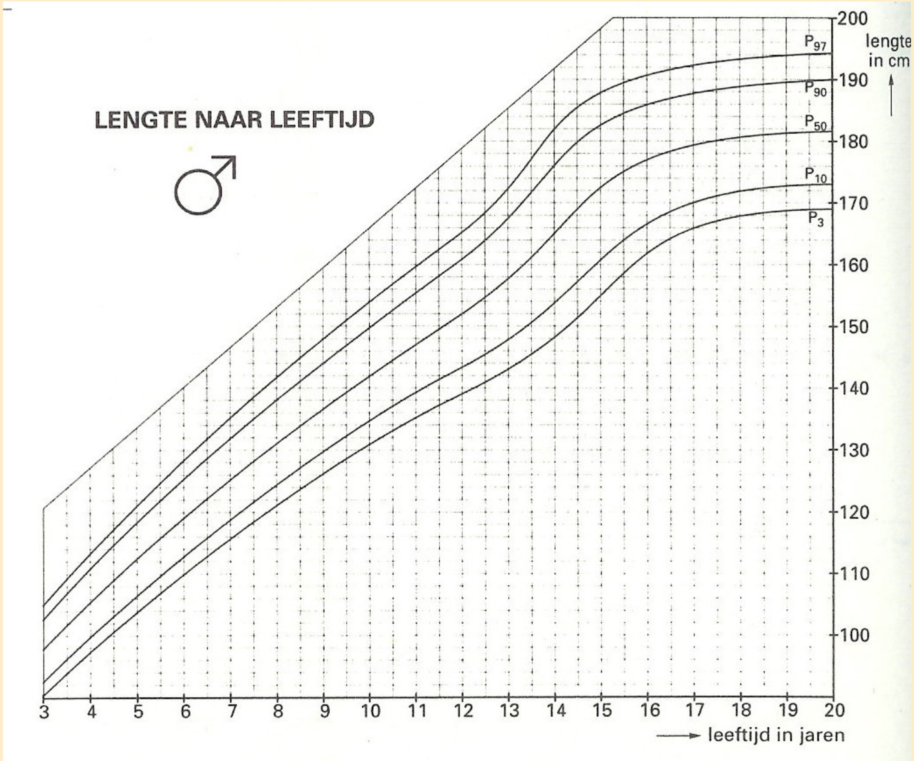
Oefening 6.3.1.d Hoofdpijn

Om te testen of aspirine helpt tegen hoofdpijn, krijgen 50 mensen aspirine. Dertig blijken na 2 dagen geen hoofdpijn te hebben.
Kun je nu concluderen dat aspirine helpt tegen hoofdpijn?

Oefening 6.3.1.e Onvoldoendes?

Als het gemiddelde voor een wiskunde proefwerk in klas 3A 6,5 is, dan zullen er wel geen onvoldoendes gevallen zijn in die klas.
Klopt dat?

Oefening 6.3.1.f *Lengte van jongens*



Hierboven zie je de gegevens van een onderzoek naar de lengte van jongens van 3 tot 20 jaar.
Voor elke leeftijdsgroep zijn de drie-percentiel P_3, tien-percentiel P_{10}, mediaan P_{50}, negentig-percentiel P_{90}, en zeven-en-negentig percentiel P_{97} berekend en aangegeven in de figuur.
De drie-percentiel (P_3) van een groep is de lengte L waarvoor geldt dat 3% van de jongens van die groep kleiner is dan L. Zo kun je ook P_{10}, P_{50}, P_{90}, P_{97} omschrijven.
Zo lees je bijvoorbeeld af dat voor jongens van 9 jaar geldt P_{10} = 130 cm. Dat betekent dat 10% van de jongens van 9 jaar kleiner is dan 130 cm.
Uit de figuur is op te maken dat de spreiding niet voor iedere leeftijd even groot is.

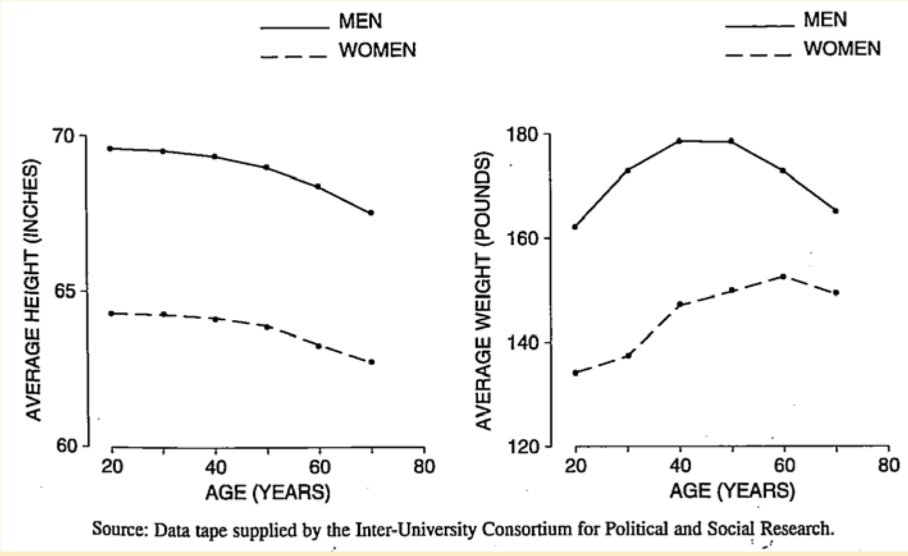
Kun je de volgende conclusies trekken?

a. De spreiding in lengte van jongens is op 20-jarige leeftijd het grootst.
b. Een jongen van 14 jaar is 175 cm lang. Dit is uitzonderlijk lang.
c. Rond 14 jaar hebben jongens een groeispurt.
d. Op 13 jarige leeftijd is bijna iedere jongen langer dan 1.40 meter

Oefening 6.3.1.g *Onveilig op straat?*

Bij een onderzoek in de VS bleek dat 45% van de mensen zich ’s avonds op straat niet veilig voelde. De steekproef was 1500 mensen groot.
Twee weken later wordt er weer aan 1500 mensen dezelfde vraagt gesteld. De uitkomst is nu 47%.
De kranten schrijven ‘De bevolking voelt zich steeds onveiliger’.
Waarom kun je kritiek hebben op deze conclusie.

Oefening 6.3.1.h Krimpende mensen



Er is in Verenigde Staten onderzoek gedaan naar het verband tussen leeftijd, lengte en gewicht. Uit de curves valt te zien dat de gemiddelde lengte van de mannen en vrouwen verminderd na de 20e verjaardag. Dat is vreemd: je kunt nu niet zeggen dat mensen korter worden naarmate ze ouder worden.
Leg uit dat de onderzoekers toch deze resultaten hebben kunnen vinden.

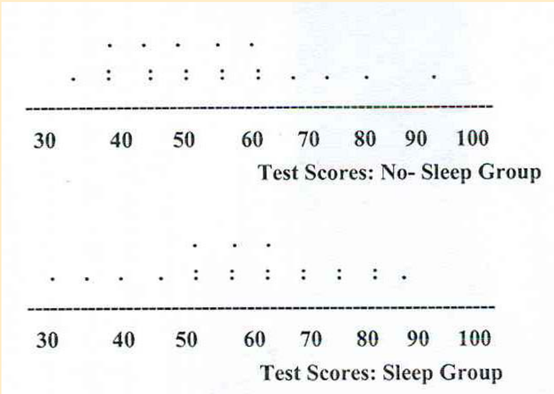
Oefening 6.3.1.i Oorzaak-gevolg

De verwarring tussen samenhang en causaliteit(oorzaak-gevolg) is wijdverbreid en wekelijks te signaleren in kranten en politieke of maatschappelijke beschouwingen.
Probeer een tegenargument te geven bij deze conclusies.

a. In 1987 promoveerde een huisarts op de aanwezigheid van longkanker onder zijn patiënten. Hij constateerde een hoge positief verband tussen longkanker en het aantal stofdeeltjes in de longen bij patiënten die er in huis een volière op na hielden. Zijn dringend advies was de volières de deur uit te doen.
b. Er is een positief verband tussen (te) hoge bloeddruk en de hoogte van het inkomen. Advies: verlaag je salaris.
c. Uit een Amerikaans onderzoek bleek dat er een negatief verband is tussen de drop-out van high schools en het salaris van de leraren: hoe hoger het salaris van leraren was, des te minder was de drop-out van high-school. Advies: verhoog de salarissen van docenten.

Oefening 6.3.1.j *No-sleep*

Veertig leerlingen doen mee aan een studie op het effect van slaap op testscores. Twintig leerlingen melden zich aan om een nacht niet te slapen (*no-sleep group*), de andere twintig gaan om 11 uur ’s avonds naar bed. De volgende dag maken ze een test, waarvan de resultaten in de onderstaande puntendiagrammen staan weergegeven. Elk punt is de score van een leerling. Twee punten boven de 80 in de tweede verdeling betekenen dat twee leerlingen in de slaapgroep de score 80 hebben gehaald op de test.



Leg uit wat je vindt van de volgende vier mogelijke conclusies en kies de conclusie waar je het mee eens bent.

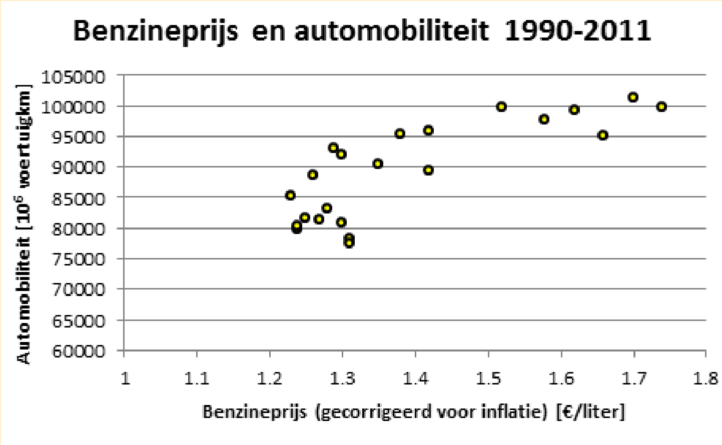
a. De niet-slapen groep deed het beter want geen leerling scoorde lager dan 40 en de hoogste score zit ook in deze groep.
b. De niet-slapen groep deed het beter want het gemiddelde is wat hoger dan het gemiddelde van de sleep-groep.
c. Er is geen verschil tussen de groepen want er is een grote overlap tussen de verdelingen van de scores.
d. Er is geen verschil want het verschil tussen de gemiddelden is klein vergeleken met de spreiding in de scores.

Oefening 6.3.1.k *Maatschappelijk succesvol?*

Als onderdeel van een 25-jarige reünie van jaargang 1970 van de Erasmus-universiteit wordt in een vragenlijst aan de oud-studenten gevraagd wat hun inkomen het laatste jaar is geweest. Van de 820 oud-studenten heeft de organisatie 583 adressen en 421 sturen de vragenlijst ingevuld op. De organisatie berekent het gemiddelde inkomen en merkt op: “De oud-studenten van 1970 zijn maatschappelijk bijzonder succesvol geweest gelet op hun gemiddeld inkomen van 120.000 euro.
Bespreek mogelijke bronnen van misleiding in deze uitspraak en geef aan in welke richting dat de conclusie kan beïnvloeden.

Oefening 6.3.1.l *Meer autorijden?!*

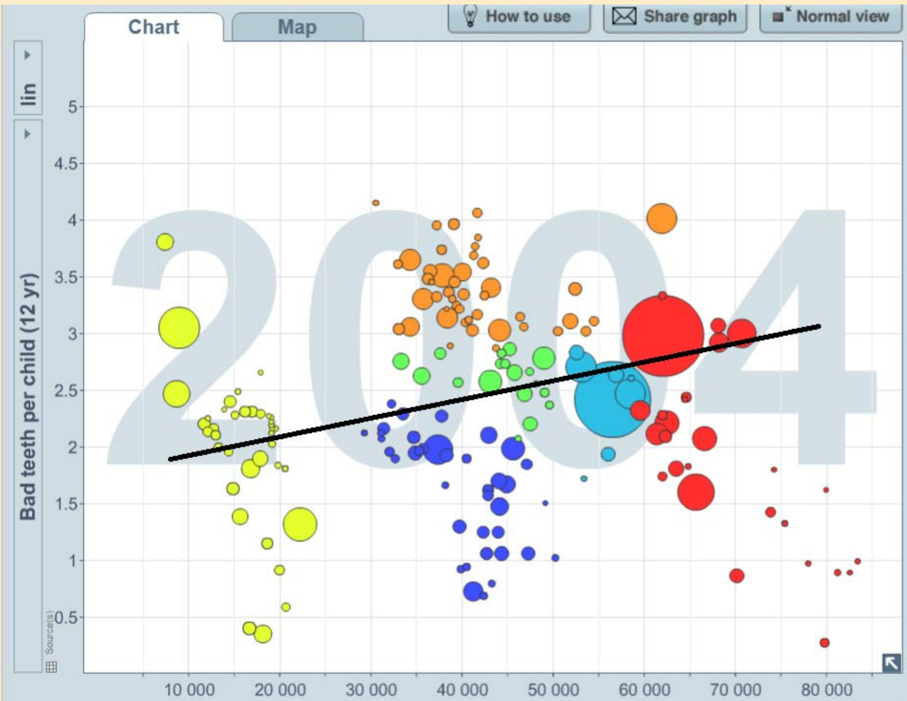
Op basis van onderstaande figuur wordt geconcludeerd: “Naarmate de benzineprijs stijgt, wordt er meer auto gereden”. Geef commentaar op deze conclusie.



(Automobiliteit is het totaal aantal kilometers dat in een jaar door alle auto’s bij elkaar gereden wordt).

Oefening 6.3.1.m *Een trendlijn*

Hieronder zie je informatie over hoe het aantal slechte tanden per kind afhangt van het inkomen. Ook is een trendlijn in de figuur getekend.



Leg uit waarom deze trendlijn het verband tussen het inkomen per inwoner en het aantal slechte tanden slecht weergeeft.

Opdrachten van kennis naar probleemoplossen

Opdracht 6.3.2.a Verschillen tussen klas 3 en klas 4

In een onderzoek gaan we kijken naar de verschillen tussen leerlingen klas 3 en klas 4.
We kijken naar de wiskundige vaardigheid in klas 3, de leeftijd en de belangstelling voor kunst.
Maak een vragenlijstje om deze kenmerken te onderzoeken.

Opdracht 6.3.2.b Cola testen

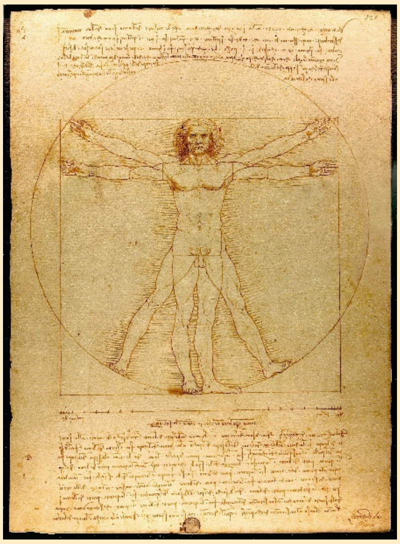
We willen weten welke van de twee Cola merken de mensen het lekkerste vinden.
Wat zou precies de onderzoeksvraag zijn? Hoe zou je dit onderzoek opzetten. Beschrijf heel precies hoe je dit zou proberen.

Opdracht 6.3.2.c Non-response

Als een enquête over gevoelige onderwerpen gaat, zoals seks of drugs, dan stuit de onderzoeker op problemen. Mensen zijn bij dit soort onderwerpen niet geneigd om zomaar alles over zichzelf te vertellen. Sommige mensen geven zelfs helemaal geen antwoord op dit soort vragen. Dit verschijnsel heet non-response.

a. Leg uit waarom een grote non-response ongunstig is voor de onderzoeker.
b. Hoe zou je dit probleem kunnen oplossen?

Opdracht 6.3.2.d Lengte en spanwijdte



Bedenk hoe je het volgende onderzoek zou kunnen uitvoeren.
Bedenk welke data je verzamelt, welke representatie je gebruikt en hoe je een conclusie kunt trekken.

“Kun je met behulp van de lengte van een persoon zijn spanwijdte voorspellen?”

Opdracht 6.3.2.e Woordlengte

“Zijn de woorden is het ene boek langer dan in het andere boek?”.
Neem twee boeken en bedenk hoe je deze onderzoeksvraag kunt beantwoorden.

Opdracht 6.3.2.f Muziek

“Welke muziek is het meest populair op je school?”
Bedenk hoe je deze onderzoeksvraag kunt beantwoorden. Beschrijf je methode en hoe je conclusies kunt trekken.

Opdracht 6.3.2.g Je eigen onderzoek

Bedenk in tweetallen een eigen onderzoeksvraag, die je met het verzamelen van data kunt beantwoorden.

Voor klas 2 kies je een populatie die je in zijn geheel kunt “bevragen”, zoals je eigen klas of eigen leerlaag op school of je eigen straat.
Je zou kunnen denken aan de lengte en het gewicht en de samenhang tussen beide van leerlingen uit je klas.

Voor klas 3 werk je met een steekproef. De populatie kan groter zijn, maar jullie moeten wel bedenken hoe je een goede steekproef (aselect) uit de populatie kunt trekken.
Je onderzoeksvraag kan nu gaan over bijvoorbeeld jullie school of jullie dorp.

Referenties

Bos, M. (1997). Zelfwerkzaamheid? Zelfstandig leren! *Euclides 72*(1), 15-18.

Bos, W. J. (1955). Het aanvangsonderwijs in de meetkunde. *Euclides, 31*(2), 57-69.

Dijk, J. van, Gulikers, I. (1997). *Vlakke Meetkunde. Waarom? Wat? Hoe?* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen, Department of Mathematics.

Drijvers, P., Streun, A. van, Zwaneveld, B. (2012). *Handboek Wiskundedidactiek.* Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1960). *Didactische opstellen wiskunde*. Zutphen: Thieme.

Ernst-Militaru R., Nijhof, P., Ghysels, J. (2016). *De metadenkende leerling.* Geraadpleegd op 26-10-2017 van www.nro.nl/prijs/genomineerden-2016/rodica-ernst/.

Galileo (1638) *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*. Leida, Appresso gli Elsevirii. doi.org/10.3931/e-rara-3923

Goffree, F., Hoorn, M. van, & Zwaneveld, B. (2000). *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*. Leusden: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Janssen, F, Hulshof, H., Veen, K. van (2016). *Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs.* Leiden/Groningen: Universiteit Leiden, ICLON/ Rijksuniversiteit Groningen, ILO.

Kop, P., Streun, A. van (2016). Wiskunde. In: Janssen, F., Hulshof, H., Veen, K. van (2016). *Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs* (pp. 283-306). Leiden/Groningen: Universiteit Leiden, ICLON/ Rijksuniversiteit Groningen, ILO.

Krüger, J. (2014). *Actoren en factoren achter het wiskundecurriculum sinds 1600.* (dissertatie), Utrecht: Universiteit Utrecht.

Nijhof, P., Ernst-Militaru, R., Ghysels, J. (2017). Meta-methode. *Euclides (92)*6, 13-15.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery.* New York, NY: Wiley and Sons.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan. (pp. 334-370)

Smid, H.J. (1997). *Een onbekookte nieuwigheid*? (dissertatie). Delft: Technische Universiteit Delft.

Stiphout, I, van (2011). *The development of algebraic proficiency. Eindhoven,* University of Technology.

Streun, A. van (1989). *Heuristisch wiskunde-onderwijs.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Streun, A. van (1991). The Relation between Knowledge and Heuristic Methods. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*(6), 899-907.

Streun, A. van (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten.* Enschede: SLO.

Streun, A. van (2016). *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten bovenbouw havo-vwo.* Enschede: SLO.

Tolboom, J. L. J. (2012). *The potential of a classroom network to support teacher feedback; A study in statistics education.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Register van voorbeelden

Als landelijk kenniscentrum leerplanontwikkeling richt SLO zich op de ontwikkeling van het curriculum in het primair, speciaal en voortgezet onderwijs in Nederland. We werken met het onderwijsveld aan de doelen, kaders en instrumenten waarmee scholen hun opdracht vanuit een eigen visie kunnen vervullen.

We brengen praktijk, beleid, maatschappelijke ontwikkelingen en onderzoek samen en stellen onze expertise beschikbaar aan onderwijs en overheid, bijvoorbeeld in de vorm van leerplannen, tools, voorbeeldlesmaterialen, conferenties en rapporten.

Fotografie omslag: ©Jan Schartman

slo

Hoofdlocatie
Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Nevenlocatie
Aidadreef 4
3561 GE Utrecht

Postadres
Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
E info@slo.nl
www.slo.nl

company/slo
SLO_nl