# Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten bovenbouw havo-vwo

Implementatie examenprogramma havo-vwo 2015

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

slo

# Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten bovenbouw havo-vwo

Implementatie examenprogramma havo-vwo 2015

April 2016

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

**2016 SLO (nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling), Enschede**

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze dan ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

**Auteurs:** Anne van Streun, Peter Kop

**Eindredactie:** Nico Alink

**Met medewerking van:** Peter Vaandrager, Piet Versnel, Hielke Peereboom, Jos Tolboom

**Illustraties:** o.a. Henk Meijer; Icoon op p. 35: Freepik (www.flaticon.com).

**Informatie**
SLO
Afdeling: tweede fase
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 661
Internet: www.slo.nl
E-mail: tweedefase@slo.nl

**AN:** 3.7508.686

# Inhoud

# 1. Inleiding

Deze publicatie is bedoeld voor docenten wiskunde in de bovenbouw havo-vwo die inspiratie zoeken voor het ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten (WDA) in hun onderwijs. In de nieuwe examenprogramma's, die vanaf 2015 van kracht zijn in het vierde leerjaar, is een belangrijk leerdoel het bevorderen van WDA in alle wiskundevakken.
In de SLO-publicatie *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* (Van Streun, 2014) ging het onder andere over de toetsing van WDA in de pilotexamens. Geleidelijk aan zullen in de nieuwe centrale eindexamens meer aspecten van WDA aan de orde komen.
Deze publicatie ging ook in op de vraag hoe docenten die wiskundige denkactiviteiten in de les kunnen stimuleren. Het advies was om in samenwerking met de collega's te werken aan een doorlopende leerlijn vanaf leerjaar 1 tot en met het eindexamen. Dat betekent het samen ontwerpen, uitvoeren en evalueren van onderwijs dat gericht is op het bevorderen van wiskundig denken in alle leerjaren.
Voor de bovenbouw havo-vwo is de noodzaak om dit zelf te doen wel duidelijk. In de tot nu toe verschenen schoolboeken is er namelijk nog geen duidelijke leerlijn te ontdekken. Het is kennelijk ook aan de wiskundedocenten zelf om de gewenste houding en vaardigheden bij hun leerlingen te stimuleren. Deze publicatie heeft daarom tot doel ideeën aan te leveren voor dat onderwijs. In hoofdstuk 11 staan ontwerpen van de auteurs en van docenten, tot stand gekomen op de wiskunde-doe-dag van SLO in het voorjaar van 2015. Ze zijn bedoeld als voorbeelden die kunnen inspireren tot een eigen ontwerp. Het is aan de wiskundedocent om te beoordelen of zo'n onderwijsontwerp past bij de eigen situatie.

Na enkele inleidende hoofdstukken zijn de onderwijsontwerpen ingedeeld naar het leerdoel en de plaats in het onderwijs. Hoofdstukken 5 en 6 gaan over startopdrachten, hoofdstuk 7 over het versterken van het overzicht, hoofdstuk 8 over het leren oplossen van problemen, hoofdstuk 9 over modelleren en hoofdstuk 10 over abstraheren.
De Lijst van voorbeelden geeft een overzicht van alle voorbeelden, bedoeld om snel een onderwerp te kunnen vinden.

# 2. Probleemstelling

Door de eeuwen heen hebben wiskundedocenten, auteurs van wiskundeboeken en ontwikkelaars van leerplannen geprobeerd een goede balans te vinden tussen enerzijds het verwerven van *parate kennis en vaardigheden* en anderzijds het bevorderen van het *wiskundig denken*. Zie bijvoorbeeld *Honderd jaar wiskundeonderwijs* (Goffree, Van Hoorn, & Zwaneveld 2000), *Een onbekookte nieuwigheid?* (Smid, 1997) en *Actoren en factoren achter het wiskundecurriculum sinds 1600* (Krüger, 2014).

In deze publicatie gaat het met name over de vraag hoe dat wiskundig denken in de dagelijkse onderwijspraktijk kan worden bevorderd. Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa heeft het decennia geleden als volgt treffend geformuleerd:

> "Iedere leerling kan men laten beleven wat het is, op het *eigen verstand* vertrouwend, een *eigen inzicht* in een voor hem begrijpelijk gesteld probleem te vormen en, eventueel, ook een eigen oplossing te vinden. En dit is des te gemakkelijker, hoe minder gecompliceerd het probleem is; dus niet eerst aan 't eind van de cursus, maar in het begin.
> Daardoor wordt tevens de gelegenheid tot het oefenen in het niet-denken uitgeschakeld! Hoe meer de leerling het opbouwen van de leerstof meebeleeft, des te meer gelegenheid krijgt hij om het denken te oefenen en des te meer wordt de leerstof zijn eigen bezit."

(Ehrenfest-Afanassjewa, 1960)

Een kenmerk van de nieuwe examenprogramma's havo-vwo is de expliciete aandacht voor de genoemde balans tussen verschillende typen leerdoelen. In de syllabi bij de nieuwe examenprogramma's worden die typen leerdoelen als volgt verwoord:

- Met *parate vaardigheden* worden de wiskundige basistechnieken bedoeld die de kandidaat routinematig moet beheersen.
- Bij *productieve vaardigheden* is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door *inzicht*, *overzicht*, *probleemaanpak* en *metacognitieve vaardigheden* een *strategie* moeten bedenken om het probleem op te lossen.

De parate kennis en vaardigheden zijn dus een essentieel onderdeel van het denkgereedschap waarmee leerlingen niet op routine opgaven kunnen aanpakken en oplossen. Het andere deel van dat denkgereedschap noemen we *wiskundige denkactiviteiten* (WDA). Die kunnen zowel betrekking hebben op het benutten van *inzicht* (betekenissen gebruiken, abstraheren van onderliggende begrippen) en het hebben van *overzicht* (samenhangen beheersen, verbanden inzien) als op het toepassen voor het *oplossen van niet-standaard-problemen*.

De probleemstelling van deze handreiking voor docenten is:

**Hoe kunnen we in de dagelijkse onderwijspraktijk activiteiten ontwikkelen en opdrachten ontwerpen die het wiskundig denken van de leerlingen bevorderen?**

Het gaat dus in de eerste plaats over het **hoe**, met veel concrete voorbeelden. De SLO-publicatie *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* (Van Streun, 2014) bespreekt voornamelijk het toetsen op examenniveau.
Goede literatuur over het **waarom** is te vinden in het *Handboek wiskundedidactiek* (Drijvers, Van Streun, & Zwaneveld, 2012), terwijl er in de oraties *Het denken bevorderen* (Van Streun, 2001) en *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT* (Drijvers 2015) veel aandacht is voor de inhoud van het wiskundig denken.
In de proefschriften van Gerrit Roorda (2012) en Sonia Palha (2013) wordt beschreven hoe leerlingen werken aan WDA-problemen. In de publicatie van het onderzoeksproject NRO-WDA (UU, 2015) komen zowel de theorie als de voorbeelden en ervaringen van wiskundeleraren in dat project aan de orde, zie *Handreiking Denkactiverende wiskundelessen* (Bor-De Vries & Drijvers, 2015).

# 3. De stimulerende docent

In de literatuur en het onderzoek over het bevorderen van het wiskundig denken en het leren oplossen van wiskundige problemen bestaat grote overeenstemming over de centrale rol van de docent. Met onderwijs, leerboeken en computerlessen die gebaseerd zijn op de directe VNO-instructie (*Voordoen – Nadoen – Oefenen*), kunnen de leerlingen op *korte termijn* succes boeken in verwerven van parate vaardigheden. Voor het verwerven van productieve vaardigheden op de *lange termijn* zal de docent naast doceren, uitleggen en controleren ook andere activiteiten moeten gebruiken.
(In de genoemde SLO-publicatie *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* geven docenten aan hoe zij dat in hun lessen doen.)

Kort samengevat komen bij de verschillende auteurs de volgende aandachtspunten steeds weer naar voren:

- Leerlingen hebben zelfvertrouwen en een stimulerende omgeving nodig om aan niet-standaard opdrachten te kunnen werken. De docent moet het vereiste werkklimaat scheppen.
- Leerlingen zijn in de schoolse situaties veelal tevreden met succes op korte termijn door kant-en-klare specifieke oplossingsmethoden voor typen opgaven te memoriseren. De docent moet doorvragen naar het waarom.
- De docent modelleert de aanpak van een probleem door steeds eerst de *analyse van het probleem* (Wat wordt er gevraagd? Wat is er gegeven? Wat volgt daar direct uit? Welke voorwaarden zijn er?) centraal te stellen en dan door te vragen naar een *plan van aanpak* (Maak een tekening. Reken een getallenvoorbeeld door. Heb je al eens eerder iets dergelijks gezien? Enz.)
- De docent organiseert een variatie van werkvormen, bijvoorbeeld naar een idee van Schoenfeld (1992):
  - brainstormen over een mogelijke aanpak van een probleem,
  - in tweetallen of groepjes laten uitwerken,
  - rondlopen en waar nodig wat hints geven, niet uitleggen,
  - oplossingswegen laten toelichten,
  - samen reflecteren en generaliseren.

Een geïnterviewde wiskundedocent in de genoemde SLO-publicatie formuleerde het zo:

> Natuurlijk kan ik na zoveel jaren ervaring al die sommetjes wel die de leerlingen moeten maken. Er zijn collega's die daarom hun lessen niet meer voorbereiden. Wel gemakkelijk, maar op die manier bereik je natuurlijk geen diepgang. Mijn lesvoorbereiding is altijd een antwoord op mijn vraag: "Hoe kan ik ze over wiskunde aan het denken krijgen?" Het gaat om de waarom-vraag! En dus moeten ze leren redeneren, ook over simpele formules.

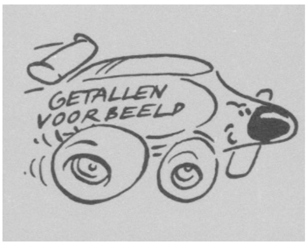
Enerzijds gaat het dus om de vragen die je als docent in de lessen stelt en anderzijds om geschikte opgaven te ontwerpen of vinden die zich goed lenen tot het doorvragen.
Voorbeelden van vragen zijn:

*Eerst even op je handen zitten en nadenken*


- Wat stelt dit voor? Wat is dit? Herken je iets?
- Waar lijkt dit op? Waar denk je aan?
- Wat weet je te vertellen over …

*Aanpak*

- Hoe werk je hier aan?
- Kun je voorbeelden geven? En non-voorbeelden?
- Geef een voorbeeld van …. en nog een en nog een….
- Zoek een verband of patroon.
- Geef een schatting.
- Beredeneer wat je wilt gaan doen.
- Enig idee waar je uit wilt komen?




*Proberen*

- Aan de slag, probeer het maar.

*Monitoren*

- Waarom is dit waar?
- Wat gaat er fout?
- Waar willen we ook al weer naartoe?

*Reflecteren*


- Hoe verschilt dit van …?
- Hoe is dit hetzelfde als …?
- Beredeneer dat ….
- Kun je een algemene regel formuleren?
- Kan het ook anders?

*Spiekboekje*

- Wat heb je geleerd over jouw aanpak?
- Waar moet je een volgende keer om denken?
- Welke wiskunde vergeet je telkens?
- Even opschrijven in je spiekboekje.

Voorbeelden van opgaven die te gebruiken zijn om het denken te stimuleren, staan in de volgende hoofdstukken.

De structuur van schoolboeken en de wens dat leerlingen ‘zelfstandig’ het boek doorwerken, geven de leerlingen weinig gelegenheid om al denkend de opbouw van wiskundige begrippen en methoden mee te maken. Om nogmaals Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa te citeren:
*Leerlingen oefenen in het niet-denken!*

Het ‘zelfstandig leren’ betekent in de praktijk vaak ‘zelfstandig werken’ uit de schoolboeken met antwoorden en uitwerkingen bij de hand. Leerlingen lossen zo veel sommetjes op, maar het is de vraag of zij er iets van leren. Dat valt hun niet te verwijten, die houding wordt door deze vorm van onderwijs juist gestimuleerd. Ter illustratie enkele citaten uit nieuwe leerboeken voor 4 havo-vwo.

- *Denk aan de afspraak op bladzijde 64.*
- *Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.*
- $OUD = \dfrac{NIEUW}{1+\frac{p}{100}}$
- *Onthoud:*

  *De afgeleide van* $f(x)=\sqrt{ax+b}$ *is* $f'(x)=a\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{ax+b}}$
- *Je gaat de vergelijking* $(2x+3)^2=25$ *oplossen.*

  *Omdat* $5^2=25$ *levert de vergelijking* $2x+3=5$ *een oplossing op. Bereken die oplossing.*

Het geheugen van leerlingen kun je beschouwen als een leeg vat waar je allerlei betekenisloze, specifieke regels in kunt gooien, in de hoop dat ze die onthouden. Maar zo werkt het niet. Na korte tijd krijg je die regels er nooit meer op het juiste moment weer uit. Al die (losse) weetjes gaan in het langetermijngeheugen van leerlingen klonteren en zoekraken, als ze niet worden ingebed in een samenhangend geheel van begrippen en methoden dat leerlingen begrijpen. Wat dan overblijft, is het ongericht zoeken in het geheugen naar de juiste regels en begrippen. Leerlingen ervaren het als het gebruiken van een trukendoos.

Als je leerlingen zelfstandig opdrachten uit het boek laat maken, met één oog gericht op de regel, levert dat vaak op korte termijn succes op, de volgende toets wordt goed gemaakt. Daarna verdringen de nieuwe regels de al geleerde regels. En verzucht de docent: “Dat heb je toch allang gehad”.

Docenten die wel het denken en begrip van hun leerlingen willen stimuleren, bedenken vooraf waar het in een hoofdstuk of paragraaf eigenlijk om gaat en zoeken daar passende opdrachten bij (die jammer genoeg vaak pas aan het einde van een hoofdstuk te vinden zijn!).
Leerlingen kunnen zich aan de hand van die opdrachten oriënteren op de ‘nieuwe’ begrippen, in samenhang met wat ze al weten. En steeds weer teruggrijpen naar de betekenissen, naar het waarom. Niet voor niets was de titel van het visiedocument (cTWO, 2007) waar de nieuwe programma’s op gebaseerd zijn: *Rijk aan betekenis.*

# 4. Typen opdrachten die het denken activeren

In het vervolg spreken we kortweg van ‘denkopgaven’ als we opgaven (opdrachten, taken, problemen) bedoelen waarmee leerlingen leren hun wiskundig denkgereedschap verder ontwikkelen. Het gaat dus niet om opgaven die een beroep doen op scherpzinnigheid, slimheid, intelligentie, spitsvondigheid, enzovoort. Het gaat om opgaven die de leerlingen leren hun wiskundige kennis en vaardigheden breder in te zetten en wendbaar toe te passen in (relatief) nieuwe situaties. Met de kanttekening dat een opgave door sommige leerlingen kan worden herkend (reproductie), maar voor andere leerlingen “nieuw” is.

In de eerste plaats moeten leerlingen in het wiskundeonderwijs hebben ervaren dat je soms een opgave als een denkopgave moet opvatten. Dus niet reageren met “ik weet het niet meer, ik stop er maar mee”, maar met “ik moet het bedenken”, “ik moet een verband leggen tussen de gegeven situatie, het gevraagde waar ik naartoe moet, en gebruiken wat ik al weet”.

We onderscheiden in het vervolg van deze publicatie denkopgaven naar hun functie in het leerproces. Een denkopgave heeft als functie het wiskundig denken te bevorderen over:

A. een “nieuw” wiskundig begrip;
B. een nieuwe wiskundige methode of techniek;
C. de samenhang van wiskundige begrippen/methoden;
D. de aanpak van een (wiskundig) probleem;
E. het wiskundig modelleren van een rijke contex;.
F. het abstraheren en generaliseren van een wiskundig begrip.

In de voorbeelden wordt, waar mogelijk, verwezen naar:

1. het ‘onderwerp’ met de parate vaardigheden waar een beroep op wordt gedaan;
2. de plaats waar het ontwerp in het curriculum kan worden gebruikt;
3. de plaats in de doorlopende leerlijn van een WDA;
4. een mogelijk werkwijze in de ‘les’;
5. de reflectie achteraf op het oplossingsproces.

We maken onderscheid tussen *oefeningen* en *opdrachten.*
De *opdrachten* betreffen veelal grotere niet-standaard opgaven, die leerlingen kunnen aanpakken door relevante parate kennis en vaardigheden te activeren én hun repertoire aan verworven wiskundige begrippen, strategieën en heuristische methoden bewust in te zetten.
De *oefeningen* zijn enkelvoudige opgaven waarin een enkel aspect van een wiskundige denkactiviteit naar voren komt, zodat leerlingen die op de duur ook als mogelijke aanpak of zoekstrategie bewust kunnen inzetten bij het oplossen van problemen. Overigens zullen veel leerlingen die *oefeningen* ook vaak als *problemen* ervaren.

Hoofdstuk 11 bevat een scala aan ontwerpideeën die wiskundedocenten op de Wiskunde-doe-dag van SLO in maart 2015 hebben bedacht en later in hun lessen hebben uitgevoerd.

# 5. Starten met een 'nieuw' wiskundig begrip

## 5.1 Toelichting

Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa formuleerde het als volgt:

> “Hoe meer de leerling het opbouwen van de leerstof meebeleeft, des te meer gelegenheid krijgt hij om het denken te oefenen en des te meer wordt de leerstof zijn eigen bezit.”

In het *Handboek Wiskundedidactiek* is de conclusie, gebaseerd op wetenschappelijk onderzoek:

> “Een goed gekozen instapopdracht oriënteert de leerlingen op een probleemaanpak zonder veel voorkennis en tegelijk krijgen ze een idee over de concepten en methoden waar het in de komende lessen over zal gaan.”

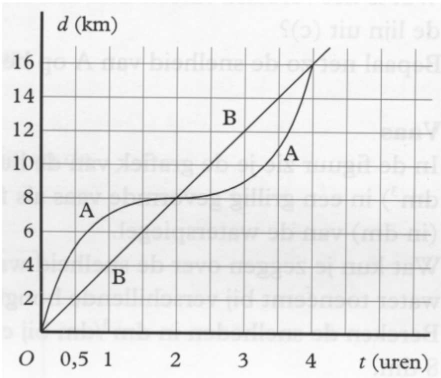
In alle examenprogramma’s havo-vwo is het kunnen gebruiken van wiskunde in toegepaste problemen of realistische contexten een van de belangrijke leerdoelen. In de opbouw van een ‘nieuw’ wiskundig begrip moeten relevante contexten daarom vanaf het begin worden meegenomen. Als het ‘nieuwe’ begrip veel betekenissen heeft, moet de instapopdracht eveneens op alle aspecten oriënteren waar idealiter in de volgende lessen op terug kan worden gegrepen.
We spreken van de WDA *abstraheren* als het gaat om het ‘doorzien’ van onderliggende wiskundige concepten in een gegeven situatie, zodat je kunt ‘zien’ en uitleggen dat het om hetzelfde begrip gaat. Uiteindelijk gaat het erom dat leerlingen in allerlei concrete en abstracte situaties het onderliggende gemeenschappelijke wiskundige concept herkennen.

Schoolboeken werken vaak met het aanbieden van kleine deelstappen met de gedachte dat de leerlingen aan het eind vanzelf de onderliggende abstractie hebben bereikt. In plaats daarvan kun je ook een of meer brede instapopdrachten ontwerpen, die allerlei aspecten van het begrip verbinden, zodat verkokering in het geheugen wordt voorkomen.

De voorbeelden in dit hoofdstuk zijn bedoeld om die bij een brede start van een nieuw onderwerp in te zetten, zodat leerlingen zich vanaf het begin kunnen oriënteren op de kern waar het in het vervolg om draait. De mooiste instapopdrachten leiden tot een denkcontext, die alle relevante aspecten van het wiskundig begrip bevatten, zodat daar voortdurend op terug kan worden gegrepen. Op die manier wordt het abstraheren bevorderd.
Hoofdstuk 10 bevat voorbeelden om het proces van abstraheren af te ronden en na te gaan of de abstractie uiteindelijk wel is bereikt.

## 5.2 Oefeningen

**Oefening 5.2.a Twee wandelaars**




In de figuur zijn de grafieken getekend van twee wandeltochten.
Horizontaal is de tijd $t$ in uren vanaf het vertrek afgezet. Verticaal staat de afstand $d$ in kilometers. A en B vertrekken tegelijkertijd.

- *De grafieken zijn een vereenvoudiging van de werkelijkheid. Kun je verschillen bedenken met de waarschijnlijke werkelijkheid?*
- *Beschrijf het wandeltempo van A en B.*
- *Vergelijk hun snelheden op dezelfde tijdstippen.*
- *Op welk tijdstip zijn hun snelheden gelijk? Hoe groot is hun snelheid dan?*

Als we de formules kennen die bij deze wandelingen horen, kunnen we wat preciezer de snelheden schatten. Bij deze grafieken passen ongeveer de volgende formules.
wandelaar *A*: $d = t^3 - 6t^2 + 12t$ en wandelaar *B*: $d = 4t$
Je kunt de snelheden op een bepaald tijdstip, bijvoorbeeld $t = 1$, goed benaderen door met de formules de gemiddelde snelheid in een klein tijdinterval rond dat moment te berekenen. Bijvoorbeeld 3 minuten (0,05 uur) ervoor en 3 minuten erna.

- *Benader zo de snelheden op de tijdstippen* $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 3{,}5$.
- *Klopt dat redelijk met je resultaten op basis van de grafieken?*
- *Schets de snelheidsgrafieken (snelheid tegen tijd) voor beide wandelingen.*

*Toelichting*
De kern waar het bij differentiëren om draait, is al verborgen in deze enkelvoudige oefening. Uit een grafiek kun je al van alles opmerken over de momentane snelheden en met behulp van de formules kun je die al rekenkundig benaderen, gekoppeld aan het intuïtief heldere begrip ‘gemiddelde snelheid’.

*Parate vaardigheid*
Er wordt geen beroep gedaan op specifieke kennis en vaardigheden.

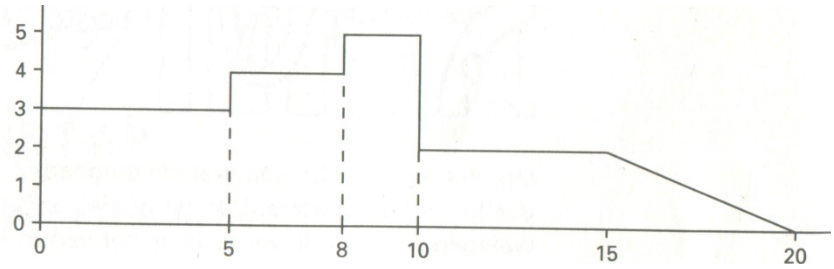
*Werkwijze*
In een les in tweetallen laten uitwerken en overleggen.

*Reflectie*
In een afsluitend klassengesprek zal de stap naar het vervolg gemaakt kunnen worden, namelijk de verwevenheid van momentane snelheid, steilheid van de grafiek, gemiddelde snelheid, snelheidsgrafiek. Deze context kan dienen als aan soort denkmodel dat leerlingen kan helpen om het onderliggend begrip bij het vervolg vast te houden. En de docent kan er telkens op teruggrijpen.

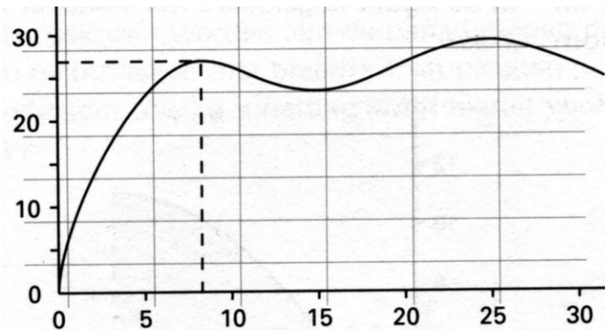
*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Voorafgaand aan het eerste hoofdstuk over afgeleide.

**Oefening 5.2.b Afstand uit snelheid-tijd grafieken**




a. Deze snelheid-tijd grafiek behoort bij een wandeling van 20 minuten (horizontale as) met wisselende snelheden (km/u, verticale as).
Maak een grafiek van de afgelegde afstand in meters (verticale as) tegen de tijd in minuten.
Hoe kun je uit die afstand-tijd grafiek de snelheden aflezen?




b. Deze snelheid-tijd grafiek behoort bij een fietstocht van 30 minuten (horizontale as) met wisselende snelheden (km/u, verticale as).
Maak een vloeiende grafiek van de (geschatte) afgelegde afstand in meters (verticale as) tegen de tijd in minuten.
Hoe kun je uit die afstand-tijd grafiek de snelheden bij benadering aflezen?

*Toelichting*
Net als de afgeleide is de integraal een centraal en complex begrip. In deze oefening worden de leerlingen op het spoor gezet van de oppervlaktefunctie onder de grafiek en de relatie tussen die oppervlaktefunctie en de oorspronkelijke snelheidsfunctie. Dit sluit aan bij dezelfde procedure in de natuurkunde.

*Parate vaardigheid*
Kennis van de grafische betekenis van de afgeleide functie.

*Werkwijze*
In een les in tweetallen laten uitwerken en overleggen.

*Reflectie*
In een klassengesprek de reactie tussen beide grafieken accentueren en het begrip oppervlaktefunctie introduceren.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5/6 vwo.

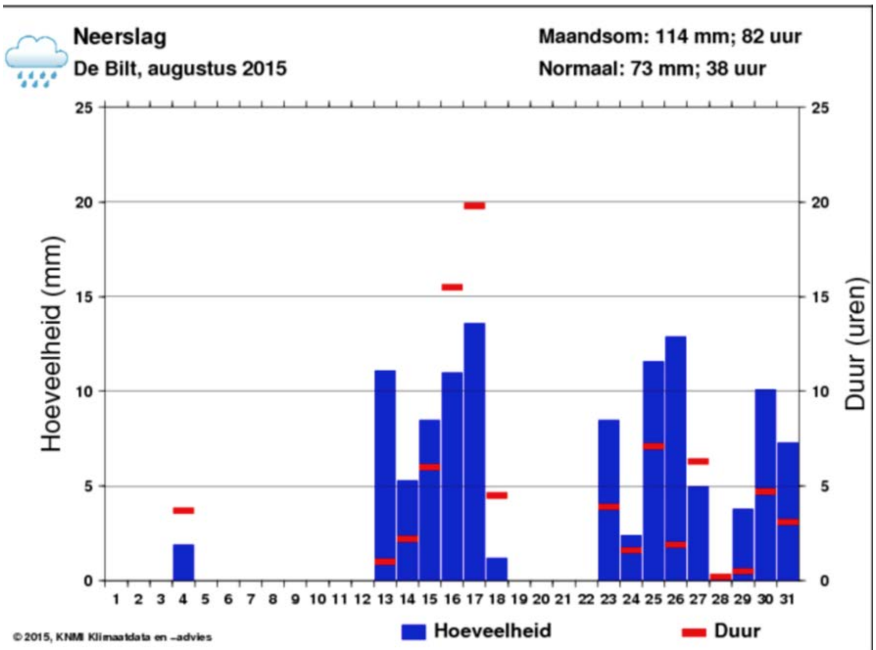
*Relatie met schoolboeken*
Voorafgaand aan het eerste hoofdstuk over integraalrekening.

## Oefening 5.2.c Meten is weten?

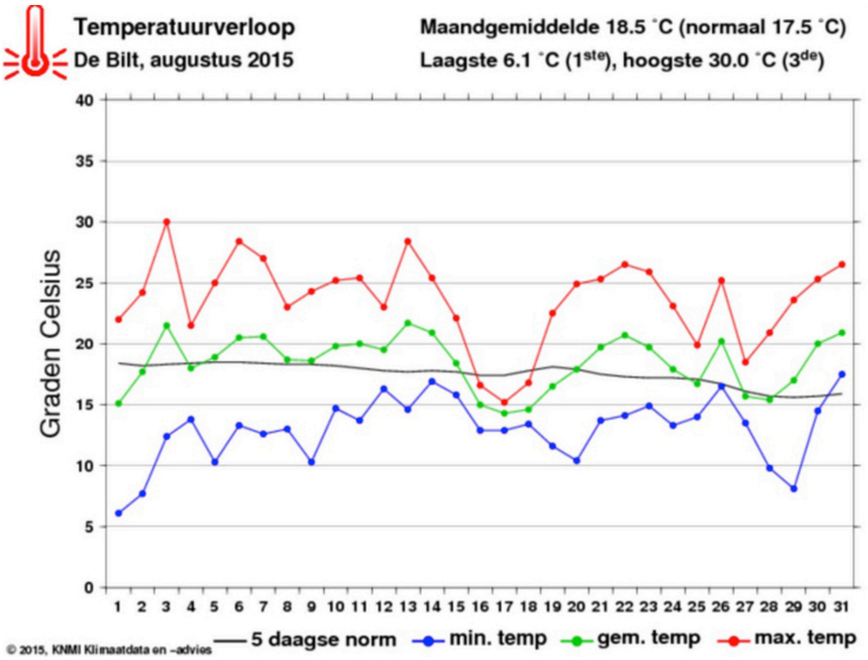
Variant Tolboom 2012

In de volgende twee figuren zie je een groot aantal gegevens (data) door het KNMI samengevat. Gebruik die gegevens om met voorbeelden je redeneringen bij de volgende vragen te onderbouwen.

a. Bereken het gemiddeld aantal mm regen per dag in augustus. Heb je daar wat aan?
b. Volgens het KNMI was augustus een natte maand. Waar komt dat door?
c. De maandsom van 114 mm had ook elk dag kunnen vallen, verspreid over 10 uur per dag. Hoe ziet dit histogram er dan uit? Wat heb je liever voor je vakantie?




Bron: KNMI

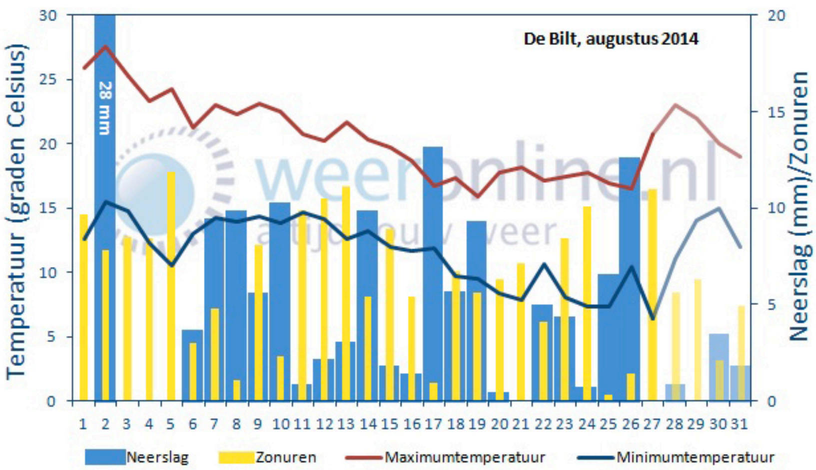



d. Je ziet hier vier temperatuurgrafieken. Welke zijn gebaseerd op directe metingen?

e. Hoe bereken je het verloop van de gemiddelde dagtemperatuur?

f. De waarden in sommige grafieken schommelen sterker dan in andere. Leg uit.

g. Het maandgemiddelde ligt 1 °C boven normaal (dat is het gemiddelde over 30 jaar). Is dit een bewijs dat het klimaat opwarmt?




h. Vergelijk de gegevens van 2014 met die van 2015 op een vijftal kenmerken. De maandsom in 2014 was 127 mm en de gemiddelde dagtemperatuur 16,1 °C.

*Toelichting*

Ook bij de relatief eenvoudige vragen over de presentatie van data gaat het erom dat leerlingen zich als vanzelf vragen gaan stellen en de beschreven representatie bevragen op de betekenis. Wat kun je direct aflezen, wat kun je concluderen, hoe zou je dit kunnen berekenen, wat heb je aan die gegevens, enzovoort.

N.B. Leerlingen kunnen de grafieken direct van het internet in kleur downloaden.

*Parate vaardigheid*
Kennis van grafische presentaties en van het gemiddelde.

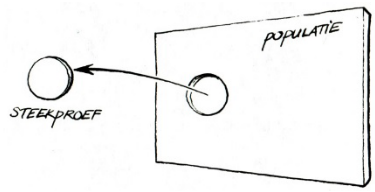
*Werkwijze*
In een les in tweetallen laten uitwerken en overleggen.

*Reflectie*
In een nabespreking het belang naar voren laten komen van zelf kritisch nadenken over de gegeven situatie.

*Plaats in de leerjaren*
In 3 havo-vwo, wiskunde A 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Voorafgaand aan een hoofdstuk over beschrijvende statistiek.

## Oefening 5.2.d Aselecte steekproef




Dagelijks kom je in het nieuws conclusies tegen die gebaseerd zijn op gegevens die in een steekproef zijn verzameld. Op grond van die gegevens uit een betrekkelijk klein deel van de grote groep (de populatie) worden dan uitspraken gedaan over wat er in die populatie aan de hand is. Om conclusies te kunnen trekken over die populatie moet je gaan rekenen met kansen, maar in de eerste plaats moet je goed nadenken over de manier waarop je die steekproef hebt verzameld (getrokken).
Wil je bijvoorbeeld weten wat alle leerlingen van je school vinden over de regels voor gebruik van de smartphone, dan mag je steekproef niet alleen bestaan uit de leerlingen van jouw klas. We gebruiken daarom vaak een aselecte steekproef:

*Aselecte steekproef: Elk individu (of object) uit de populatie moet evenveel kans hebben om in de steekproef te worden opgenomen.*

*Beredeneer in de volgende voorbeelden van steekproefonderzoek of je wel conclusies kunt trekken over de populatie. Bedenk waar nodig een verbeterde opzet.*

| *vraag* | *probleemstelling* | *steekproef* | *populatie* |
|---|---|---|---|
| a | *Zijn we het eens met het niet meer verkopen van frisdrank door de kantine?* | *De eerste 50 leerlingen die bij het begin van de eerste pauze het plein opkomen.* | *Alle leerlingen.* |
| b | *Het plan voor een nieuw lesrooster van 10 tot 17 uur.* | *Enquête per mail naar alle leerlingen.* | *Alle leerlingen.* |
| c | *Peiling van de opinie over de opvang van vluchtelingen.* | *Steekproef uit het totale netwerk van vaste telefoonaansluitingen.* | *Heel Nederland.* |

| *vraag* | *probleemstelling* | *steekproef* | *populatie* |
|---|---|---|---|
| d | *Wilt u de koopavond in plaats X verplaatsen?* | *Op de koopavond van plaats X bezoekers ondervragen.* | *Bewoners in de plaats X.* |
| e | *Omvang criminaliteit onder de jeugd.* | *Zelfrapportage door een grote steekproef van jeugdigen.* | *Alle jeugdigen.* |
| f | *Bedenk zelf een onderzoeksvraag.* | *Bedenk zelf een aselecte steekproef.* | *Omschrijf de populatie.* |

*Toelichting*
In het steekproefonderzoek ging en gaat er vaak wat mis. Daar eerst maar over nadenken.

*Parate vaardigheid*
Niets specifieks.

*Werkwijze*
Deze en andere voorbeelden in een brainstormdiscussie met de klas doornemen.

*Reflectie*
Leerlingen zelf voorbeelden laten bedenken.

*Plaats in de leerjaren*
In 3 havo-vwo, wiskunde A 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Voorafgaand aan een hoofdstuk over voorspellende statistiek.

## 5.3 Opdrachten

**Opdracht 5.3.a De fietselfstedentocht**

*Deze route is in kleur te downloaden vanaf* [http://www.fietselfstedentocht.frl/nl-NL/route](http://www.fietselfstedentocht.frl/nl-NL/route).


De fietselfstedentocht is 235 km lang. De start en finish zijn in Bolsward, met steden als Dokkum (na 78 km), Leeuwarden (na 102 km), Sneek (na 147 km), Stavoren (na 198 km). Jannes, Sietske en Gerard fietsen de tocht in verschillende groepjes, maar starten tegelijk (om 7 uur) en komen tegelijk aan ('s avonds 8 uur). Het groepje van Sietske houdt een constante fietssnelheid aan. Het groepje van Gerard start snel maar haalt met moeite de eindstreep, terwijl het groepje van Jannes heel onregelmatig fietst.

*Opdracht (groepjes):*

a. Bedenk bij deze gegevens een realistische tabel met de verstreken tijd en de afgelegde afstand als variabelen en teken in één assenstelsel de drie bijpassende vloeiende afstand-tijd grafieken.

b. Maak vervolgens een tabel met de gemiddelde snelheden op de vijf genoemde trajecten.
c. Teken nu een bij jouw tabel passende grafiek van de snelheid op elk tijdstip (verticale as) tegen de verstreken tijd.
d. Leg uit wat een mogelijk verband is tussen deze snelheidsgrafiek en de eerste afstandsgrafiek.

*Product: Een posterpresentatie.*

*Toelichting*
Dit is een onderzoeksopdracht over de fietselfstedentocht om begrippen als gemiddelde snelheid, momentane snelheid en helling te ontwikkelen en te verankeren aan de grafische voorstelling en aan een concrete context. Deze onderzoeksopdracht kan naar behoefte gemakkelijk worden gevarieerd naar andere contexten, zoals een fietstocht of de wandelvierdaagse. Een mooie variant is het aanleveren van een plattegrond van de eigen plaats, waarbij leerlingen een bepaald traject moeten afleggen met verkeerslichten e.d.

*Parate vaardigheid*
Er wordt geen beroep gedaan op speciale parate vaardigheden.

*Werkwijze*
In tweetallen of groepjes werken de leerlingen aan de opdracht, waarna in de nabespreking hun resultaten worden bediscussieerd en samengevat. De docent baant vervolgens de weg naar de wiskundige termen en begrippen.

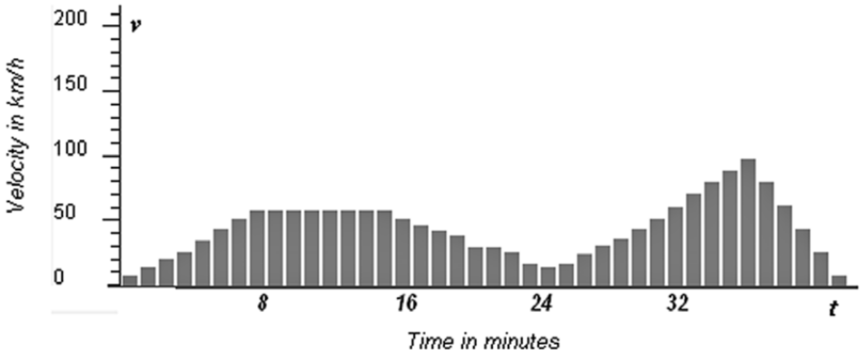
*Reflectie*
Aansluitend op de posterpresentatie kunnen de wiskundige begrippen aan de hand van de grafieken worden benoemd. Naast het inzoomen op het verband tussen de beide grafieken kan de vraag worden gesteld hoe je in de eerste grafiek de snelheid op een bepaald moment kunt benaderen. Een paar geslaagde posters kunnen wellicht in het lokaal blijven hangen om telkens weer te kunnen verwijzen naar de betekenissen uit deze context.

*Plaats in de leerjaren*
Begin wiskunde B 4 havo, 4 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Voorafgaand aan de eerste hoofdstukken over veranderingen en de afgeleide.

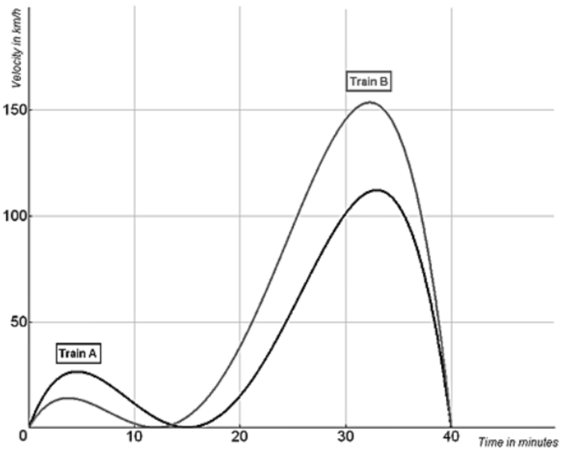
**Opdracht 5.3.b Snelheid, afstand, oppervlakte**

Bron: Palha, S., 2013



De snelheid van een trein wordt elke minuut gemeten. Het staafdiagram geeft de resultaten weer gedurende een rit van 40 minuten.

a. Schets de bijbehorende afstand-tijd grafiek met een vloeiende kromme.




In bovenstaande figuur staan de snelheid-tijd grafieken van twee treinen getekend die langs verschillende trajecten zijn gereden.

b. Beredeneer welke trein de grootste afstand heeft afgelegd.

c. Construeer nu in één figuur de snelheid-tijd grafieken van twee treinen, die met verschillende snelheden toch een gelijke afstand hebben afgelegd.

d. Beredeneer hoe je uit een afstand-tijd grafiek een snelheid-tijd grafiek kunt construeren.

*Toelichting*

Net als de afgeleide is de integraal een centraal en complex begrip. In deze opdracht worden de leerlingen op het spoor gezet van de oppervlaktefunctie onder de grafiek en de relatie tussen die oppervlaktefunctie en de oorspronkelijke snelheidsfunctie.

*Parate vaardigheid*

Kennis van de grafische betekenis van de afgeleide functie.

*Werkwijze*

In een les in tweetallen laten uitwerken en overleggen.

*Reflectie*

In een klassengesprek accentueren van de reactie tussen beide grafieken en het begrip oppervlaktefunctie introduceren.

*Plaats in de leerjaren*

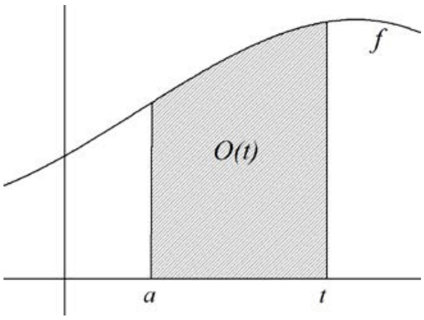
Wiskunde B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*

Voorafgaand aan het eerste hoofdstuk over integraalrekening.

**Opdracht 5.3.c De oppervlaktefunctie**

We gaan de oppervlakte berekenen van het vlakdeel onder de grafieken van functies $f$ tot aan de $x$-as. Omdat de grenzen variëren is die oppervlakte zelf ook weer een functie, de oppervlaktefunctie $O(t)$.




We zoeken naar een manier om die functie te bepalen als we de functie $f$ kennen.

a. Wat is de formule voor de oppervlakte $O(t)$ van het vlakdeel tussen de grafiek van de gegeven functie en de $x$-as van $x=0$ tot $x=t$, $t>0$?
Neem als gegeven functie de volgende functies:
$f(x)=x$, $g(x)=2x+1$ en $h(x)=4x+3$

b. Wat is de formule voor de oppervlakte $O(t)$ van het vlakdeel tussen de grafiek van deze gegeven functies en de $x$-as van $x=2$ tot $x=t$, $t>2$?

c. Onderzoek wat het verband is tussen de functies $O(t)$ en de gegeven functies.

d. Wat is de formule voor de oppervlakte $O(t)$ van het vlakdeel tussen de grafiek van de gegeven functie en de $x$-as van $x=0$ tot $x=t$, $t>0$?.
Neem als gegeven functies de volgende functies:
$k(x)=x^2$, $m(x)=2x^2+1$, $n(x)=4x^2+3$ en $z(x)=x^3$

*Toelichting*
In deze opdracht worden de leerlingen direct betrokken bij de opbouw naar de relatie tussen de afgeleide van de oppervlaktefunctie en de oorspronkelijke functie.

*Parate vaardigheid*
Kennis van de afgeleide functie.

*Werkwijze*
In een les in tweetallen laten uitwerken en overleggen.

*Reflectie*
In een klassengesprek de betekenis van primitieve verder uitbouwen.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Voorafgaand aan het eerste hoofdstuk over integraalrekening.

**Opdracht 5.3.d Een statistisch onderzoekje**

Je hebt in de onderbouw beschrijvende statistiek gehad met grafische voorstellingen, zoals diagrammen, en met maten, zoals gemiddelde, mediaan, modus en spreiding. Deze opdracht gaat over het opzetten en uitvoeren van een statistisch onderzoekje waarin je gegevens verzamelt van twee groepen leerlingen/mensen over een kenmerk, eigenschap of opvatting. Dat doe je om uit te zoeken of er verschillen bestaan tussen die groepen. Je bedenkt zelf wat je wilt onderzoeken, over welke groepen het gaat, hoe je de gegevens verzamelt, of je een computerprogramma gebruikt, enzovoort.

Deze opdracht kent verschillende fasen:
1. *Een onderzoeksplan maken en voorleggen aan je docent.*
2. *Het verzamelen van de gegevens.*
3. *Het verwerken van de gegevens door ze samen te vatten in grafieken en getallen.*
4. *Het beargumenteren van de verschillen en overeenkomsten tussen de beide groepen.*
5. *Het presenteren van het onderzoek in power-point of een dergelijk programma.*

*Toelichting*
Het gaat hier om een start van de statistieklijn, niet om een afsluitend onderzoek. Zie daarvoor hoofdstuk 9. Tijdens het proces komen leerlingen allerlei problemen tegen en zullen ze ongetwijfeld onjuiste beslissingen nemen. De motivatie om meer te weten te komen over hoe je zoiets doet wordt gestimuleerd. Je kunt ook samen met collega's deze opdracht verder uitwerken. Zie bijvoorbeeld het onderzoek van Martha Witterholt (2015), dat beschrijft hoe docenten voor de onderbouw zo'n statistiekopdracht bedenken en uitvoeren.

*Parate vaardigheid*
Kennis van de beschrijvende statistiek uit de onderbouw.

*Werkwijze*
In groepjes van 3-4 leerlingen laten uitvoeren.

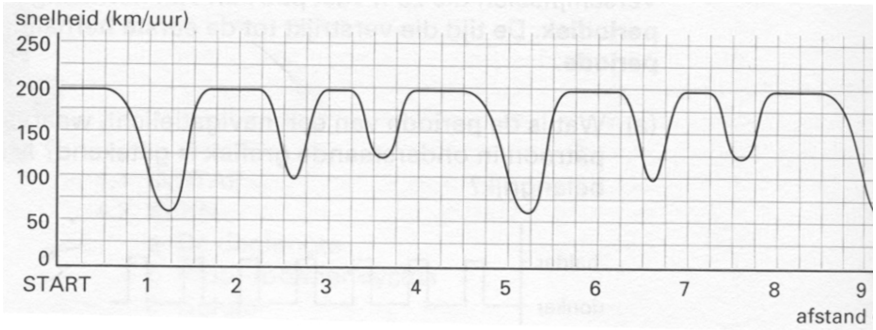
*Reflectie*
In een nabespreking verschillende kritische aspecten van statistisch onderzoek aan de orde laten komen en het zelf argumenteren benadrukken.

*Plaats in de leerjaren*
In 3 havo-vwo, wiskunde A 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Voorafgaand aan het eerste hoofdstuk over statistiek.

**Opdracht 5.3.e	Racecircuit**

In deze grafiek is de snelheid van een motor in km/u op een afgelegde afstand in km weergegeven tijdens een aantal ronden van een motorrace. Er zijn hierna verschillende circuits getekend.




- Welk circuit behoort bij de grafiek?
- Hoe lang doet de motorrijder over één ronde?
- Waarom kan het eerste stuk, vanaf de startlijn, niet de eerste ronde zijn?
- De snelheid verandert tijdens een ronde. Die verandering in snelheid kunnen we in een tabel weergeven. Bijvoorbeeld als volgt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *verandering in snelheid* | *+ 90 km/u* | *0 km* | *0 km* | *- 110 km/u* | *+110 km/u* |
| *over de afstand* | *van 1 km tot 2 km* | *van 2 km tot 3 km* | *van 3 km tot 4 km* | *van 4 km tot 5 km* | *van 5 km tot 6 km* |

Geeft deze tabel een goede indruk van de voortdurende veranderingen in de snelheid?
- Maak voor één ronde een tabel die wel inzicht geeft in de veranderingen in snelheid.

*Toelichting*
Bedoeld als intro op de invoering van toenamediagrammen.

*Parate vaardigheid*
Kennis van grafieken uit de onderbouw.

*Werkwijze*
In groepjes van 3-4 leerlingen laten uitvoeren.

*Reflectie*
In een nabespreking verschillende valkuilen, zoals ongelijke intervallen, doornemen en de toenamediagrammen introduceren.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde A 4 havo.

*Relatie met schoolboeken*
Voorafgaand aan het eerste hoofdstuk over toenamediagrammen.

# 6. Starten met een 'nieuwe' wiskundige methode

## 6.1 Toelichting

Een groot deel van de leerstof in de schoolwiskunde is hiërarchisch opgebouwd. Nieuwe begrippen bouwen voort op al eerder verworven kennis en begrippen en dat geldt ook voor nieuwe technieken en oplossingsmethoden. Die hiërarchische opbouw heeft tot gevolg dat ‘gaten’ in de kennis van leerlingen het verwerven van nieuwe kennis vaak frustreren. Aan de andere kant kun je als wiskundedocent gebruik maken van die opbouw door met een reeks ‘oude’ en ‘nieuwe’ voorbeelden de leerlingen zelf aan het denken te zetten en daarmee de samenhang in hun kennis te versterken en hen te oriënteren op de nieuwe methode van het komende hoofdstuk.

De samenhang in de algebra is te vinden in de studie van vergelijkingen en functies of formules. Het manipuleren van algebraïsche vormen staat dan ook in functie van het kunnen trekken van conclusies over eigenschappen van verbanden, inclusief oplossingen van vergelijkingen. Om te bereiken dat leerlingen ook dat overzicht in hun langetermijngeheugen verwerven, ligt het voor de hand de leerstof ook zo te ordenen dat helder wordt waarom manipulaties van algebraïsche vormen, zoals ontbinden in factoren, moeten worden beheerst.
Zo zouden tweedegraads vergelijkingen pas na een eerste studie van tweedegraads functies aan de orde moeten komen en ontstaat de behoefte aan het ontbinden in factoren pas nadat leerlingen hebben ontdekt dat op die manier tweedegraads vergelijkingen kunnen worden opgelost. De volgorde in schoolboeken is een andere, zonder dat er wordt gewerkt aan het versterken van het overzicht. Achteraf een samenvatting in het boek opnemen helpt niet om de aandacht meteen te richten op de samenhang tussen alles wat je ooit al hebt gehad.

Voor een wiskundedocent die de leerlingen vanaf het begin wil laten nadenken over de onderlinge relaties, is een ontwerp snel te vinden door te starten met een wilde verzameling opgaven uit de eindtoets of de herhaling. Eerst breed oriënteren door daaraan te werken, dat nabespreken en dan inzoomen op een specifieke methode.

## 6.2 Oefeningen

**Oefening 6.2.a Een familie van grafieken/functies**

In de onderbouw heb je de grafieken van lineaire functies (lijnen) en van tweedegraads functies (parabolen) leren kennen. Je kunt die typen functies weer onderverdelen in families van functie die een kenmerk gemeen hebben. In deze oefening gaan we uit van hun grafieken.

a. Geef een formule van een lijn door het punt (2,3). En nog één, en nog één en nog één. Wat is de algemene formule van al die lijnen?
b. Geef een formule van een lijn die evenwijdig loopt aan de lijn met formule $y = 3x + 2$. En nog één, en nog één en nog één. Wat is de algemene formule van al die lijnen?
c. Geef een formule van een parabool met als top het punt (2,3). En nog één, en nog één en nog één. Wat is de algemene formule van al die parabolen?

d. Geef een formule van een parabool met als nulpunten (–2,0 ) en (3,0). En nog één, en nog één en nog één. Wat is de algemene formule van al die parabolen?

*Toelichting*
Deze oefening kan de start zijn van meer aandacht voor parameters. Als leerlingen daar al mee hebben gewerkt is het een oefening in een belangrijke vaardigheid.

*Parate vaardigheid*
Lineaire en kwadratische formules met hun grafieken.

*Werkwijze*
In groepjes van 2 leerlingen laten uitvoeren.

*Reflectie*
Recapituleren en laten noteren in hun spiekboekje.

*Plaats in de leerjaren*
Eind 3 havo-vwo, begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Vooraf aan eerste hoofdstuk algebra 4 havo-vwo of afsluiting algebra 3 havo-vwo.

### Oefening 6.2.b Altijd, soms of nooit waar?

Voor we verder gaan in de algebra, staan we even stil bij een wilde verzameling algebraïsche beweringen met de vraag:

*Altijd waar? Soms waar? Nooit waar? Geef een sluitende redenering!*

a. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ $\qquad$ $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $\qquad$ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\qquad$ $(4x)^2 = 4x^2$

$a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$

b. $\frac{a}{6} = b + 8$ $\qquad$ $4p - 8 = 12 - 2p$

$5 + 2n = 4n$ $\qquad$ $q + 3 = q + 8$

$\frac{16(n+6)}{2} = 48 + 8n$ $\qquad$ $\frac{8(a \cdot 2b)}{2} = 4ab$

*Toelichting*
In plaats van bij het begin van een algebrahoofdstuk eerst de voorkennis te herhalen, is dit type opgaven productief om leerlingen er zelf (weer) over na te laten denken.

*Parate vaardigheid*
Een basis aan algebra uit de onderbouw.

*Werkwijze*
In groepjes van 2 leerlingen laten uitvoeren.

*Reflectie*
Benadrukken dat je altijd even kunt/moet controleren of je bewerking wel klopt.

*Plaats in de leerjaren*
Eind 3 havo-vwo, begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Vooraf aan eerste hoofdstuk algebra 4 havo-vwo of afsluiting algebra 3 havo-vwo.

**Oefening 6.2.c abc-formule?**

Bekijk de volgende vergelijkingen en geef aan of het handig is om de abc-formule te gebruiken.

- $6b^2 = 24$
- $15n - n^2 = 0$
- $v^2 - 3v - 18 = 0$
- $6t - 7 = 3t + 14$
- $0{,}1t^2 = 0{,}2t + 0{,}3$
- $(20 - 5p)(3 - 2p) = 0$

*Toelichting*
Even laten nadenken, voordat ze gaan rekenen.

*Parate vaardigheid*
Tweedegraads vergelijkingen.

*Werkwijze*
In groepjes van 2 leerlingen laten uitvoeren.

*Reflectie*
Benadrukken dat je altijd even kunt/moet controleren of je bewerking wel klopt.

*Plaats in de leerjaren*
Eind 3 havo-vwo, begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Vooraf aan eerste hoofdstuk algebra 4 havo-vwo of afsluiting algebra 3 havo-vwo.

## 6.3 Opdrachten

**Opdracht 6.3.a Hoe lossen we deze tweedegraads vergelijking handig op?**

Probeer van de volgende tweedegraads vergelijkingen met maar enkele rekenstappen de oplossing(en) te vinden.
Maak achteraf een overzicht van de gebruikte methoden bij de verschillende opgaven.
Schrijf ook op bij welke opgaven het niet lukte.

- $3 + 2x + x^2 = x^2 - 4$
- $(x+1)(x-3) = 0$
- $x^2 - 6x = 0$
- $x(x+4) = 96$
- $x^2 + 4x + 3 = 0$
- $x^2 + 4x + 2 = 0$
- $x^2 + 7x = 10$
- $(2x-8)(x+1) = x(x+1)$

*Toelichting*
Deze opdracht kan al vanaf leerjaar 2 worden ingezet om het denken over typen tweedegraads vergelijkingen te activeren en vervolgens te oriënteren op wat er nog komt. Exploreren door getallen te substitueren en achteraf controleren door substitueren in de oorspronkelijke vergelijking versterken het begrip van wat een vergelijking is.

*Parate vaardigheid*
Het hangt van de plaats in het curriculum af welke parate vaardigheden gewenst zijn. Leerlingen kunnen aan de slag als zij hebben begrepen wat het oplossen van een vergelijking betekent en weten dat aan beide kanten van het gelijkteken dezelfde operaties mogen worden uitgevoerd.

*Werkwijze*
In tweetallen of groepjes werken de leerlingen aan de opdracht, waarna in de nabespreking de indeling in methoden wordt bediscussieerd en samengevat.

*Reflectie*
Na deze opdracht kan het oplossen van tweedegraads-vergelijkingen verder worden opgebouwd of herhaald, steeds met een link naar de bijbehorende grafische voorstellingen.

De algemene aanpak zou moeten zijn:
*Inspecteer eerst de vergelijking en beslis naar welke vorm je die wilt herleiden:*

A. $ax^2 + bx + c = 0$ *met daarna het vervolg*
$a(x+p)(x+q) = 0$ *of de* $abc$ *- formule*

B. $a(x+p)^2 = q$ *enzovoort*

C. $A \cdot B = A \cdot C \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \ \textit{of} \ \ B = C$ *met daarna het vervolg*

*Plaats in de leerjaren*
In 2/3 havo-vwo, begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Vooraf aan een hoofdstuk over tweedegraads vergelijkingen

## Opdracht 6.3.b Efficiënte oplossingsmethoden zoeken

Probeer van de volgende vergelijkingen met maar enkele rekenstappen de oplossing(en) te vinden.

$3\frac{1}{3}a - 2 = -2a + 6$

$b^2 = 11b$

$c^2 = 7c + 18$

$(d-6)(2d+7) = 0$

$\sqrt{e-8} = 6$

$\dfrac{6}{f-3} = 1\frac{1}{2}$

$(7-g)^2 = 9g^2$

$h^2 + 2h - 4 = 20 - 3h$

$(3j-1)^2 = 25$

$7 + \sqrt{k} = 6$

$10 - (l+3)^2 = 15$

$m^2 - 16 = (m+4)(m-4)$

$6n^2(n-2) = 30(n-2)$

$\dfrac{3p-5}{5-p} = \dfrac{p-1}{5-p}$

*Toelichting*
Vanaf leerjaar 1 wordt per paragraaf of hoofdstuk ingezoomd op specifieke technieken of oplossingsmethoden voor typen vergelijkingen, maar aan het uitzoomen om het overzicht te versterken op het gehele bouwwerk wordt weinig gewerkt. In elk leerjaar kunnen opdrachten worden gebruikt om het denken over wat je al over vergelijkingen weet te stimuleren, opdat leerlingen dat overzicht zelf gaan raadplegen in hun langetermijngeheugen.

*Parate vaardigheid*
De leerlingen weten wat een vergelijking is, ze weten dat ze op beide leden van een vergelijking dezelfde operatie (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) mogen toepassen zonder dat de oplossing wijzigt en ze kunnen de oplossing controleren.

*Werkwijze*
In duo's of groepjes laten werken, eventueel onder tijdsdruk of met een wedstrijdelement.

*Reflectie*
In de nabespreking kunnen de genoemde parate vaardigheden en het belang van een eerste inspectie aan de orde komen.

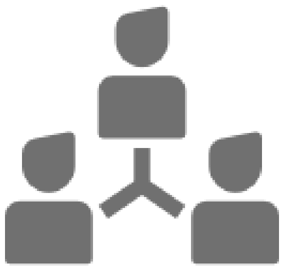
*Plaats in de leerjaren*
In 4/5 havo-vwo .

*Relatie met schoolboeken*
Vooraf aan hoofdstukken over vergelijkingen of tussendoor.

# 7. Versterken van de samenhang tussen wiskundige begrippen en methoden

## 7.1 Toelichting

In de syllabi bij de examenprogramma's wordt terecht de term *overzicht* gebruikt als een kwaliteit waar leerlingen over moeten beschikken om een niet-standaard opgave te kunnen aanpakken. Psychologisch onderzoek heeft al decennia lang uitgewezen dat experts (en 'goed' presterende leerlingen) in hun langetermijngeheugen beschikken over een samenhangend complex van begrippen en vaardigheden, waarmee zij nieuwe opgaven snel een plaats kunnen geven.
Bij veel leerlingen zien we dat hun kennis heel verbrokkeld is. Zij krijgen 'nieuwe' kennis aangeboden zonder dat (systematisch) de samenhang met andere brokjes kennis wordt versterkt. Hun zoeken in het langetermijngeheugen beperkt zich tot zo iets als *at random* een greep doen uit een grabbelton van losstaande feitjes en beelden. Op korte termijn, bij de eerstvolgende toets, valt dat niet op, maar op den duur (naarmate er veel meer brokjes zijn verwerkt) kan het geheugen al die brokjes niet meer uit elkaar houden. Natuurlijk zullen 'slimme' leerlingen op den duur wel zelf een overzicht opbouwen (een kenmerk van intelligentie), maar de modale en 'zwakke' leerlingen hebben aan alleen de schoolboeken te weinig steun.
Voor dit essentiële aspect van wiskunde leren is interactie noodzakelijk.



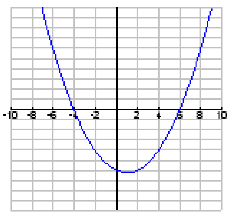
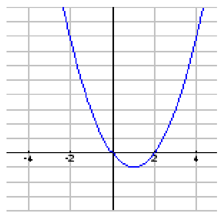
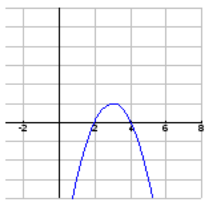
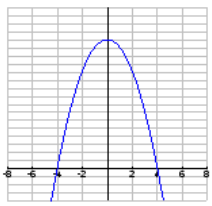
Het is daarom voor de wiskundedocent zaak om zeker op verschillende momenten in de opbouw van een hoofdstuk of subdomein enkele opdrachten te ontwerpen met de bedoeling het overzicht en de onderlinge samenhang te versterken. Dat vraagt van de docent een helicopterview op dat hoofdstuk of subdomein.

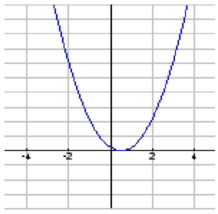
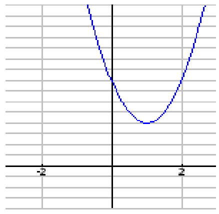
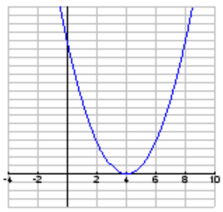
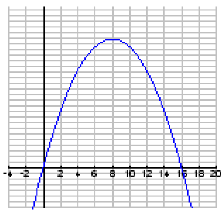
Soms is het naar voren halen van opgaven uit de eindtoets (!) voldoende, een andere keer is een systematische herhaling over verschillende samenhangende hoofdstukken gewenst of het toevoegen van een grote opdracht als denkkader voorafgaand aan een aantal hoofdstukken.

## 7.2 Oefeningen

**Oefening 7.2.a** **Grafieken bij tweedegraads functies**

Hieronder zie je van verschillende tweedegraadsfuncties steeds vier kaartjes.
Zoek de kaartjes bij elkaar die bij dezelfde tweedegraadsfuncties passen.

| | |
|---|---|
| $f(x) = x^2 - 2x - 24$ | $f(x) = 4(x - \frac{1}{2})^2$ |
| $f(x) = (x-1)^2 - 25$ | $f(x) = (2x-1)^2$ |
| $f(x) = x(4x-8)$ | $f(x) = 4x^2 - 8x + 8$ |
|  |  |
| $f(x) = -x^2 + 16$ | $f(x) = -x^2 + 16x$ |
| $f(x) = -(x-4)(x+4)$ | $f(x) = (4-x)(x+4)$ |
| $f(x) = 4x^2 - 32x + 64$ | $f(x) = 4(x-4)^2$ |
|  |  |

| | |
|---|---|
| $f(x)=4x^2-4x+1$ | $f(x)=2(x-1)^2+4$ |
| $f(x)=(x-6)(x+4)$ | $f(x)=4x^2-8x$ |
| $f(x)=4(x-1)^2-4$ | $f(x)=4x(x-2)+8$ |
|  |  |
| $f(x)=-(x-8)^2+64$ | $f(x)=(2x-8)^2$ |
| $f(x)=x(16-x)$ | $f(x)=-(x-2)(x-4)$ |
| $f(x)=-(x-3)^2+1$ | $f(x)=-x^2+6x-8$ |
|  |  |

*Toelichting*

Een type opdracht dat bij allerlei formules en functies kan worden ingezet, omdat het een natuurlijke manier is om het denken over de structuur van formules in relatie tot grafieken te bevorderen.

*Parate vaardigheid*

De leerlingen hebben de kwadratische formules en de parabolen al eerder in afzonderlijke hoofdstukken bestudeerd.

*Werkwijze*

In duo's of groepjes laten werken en laten rapporteren over de argumenten bij hun keuze.

*Reflectie*

De relatie tussen formules en parabolen samenvatten.

*Plaats in de leerjaren*

In 3 havo-vwo, 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*

Afsluiting 3 havo-vwo of start algebra 4 havo-vwo.

**Oefening 7.2.b    Gelijkwaardige formules**

Welke formules zijn niet gelijkwaardig met $y = 3x^{-2}$ , $x$ positief?

a. $y = \dfrac{3}{x^2}$

b. $y = \dfrac{3}{x} \cdot \dfrac{1}{x}$

c. $y = (3x^{-1})^2$

d. $y = 4x^{-2} - x^{-2}$

e. $y = \dfrac{6x}{2x^3}$

f. $y = 3\left(\dfrac{x^4}{x^5}\right)^2$

g. $y = 2x^{-1} + x^{-1}$

*Toelichting*
Een type opdracht dat in alle leerjaren met verschillende formules kan worden gebruikt om het gevoel voor symbolen (*symbol sense*) te versterken.

*Parate vaardigheid*
Rekenen met haakjes en exponenten.

*Werkwijze*
Nu en dan even snel individueel laten maken en kort nabespreken. Toetsen?

*Reflectie*
In de nabespreking recapituleren wat de basale regels zijn.

*Plaats in de leerjaren*
In 4/5 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Tussendoor even oefenen.

## 7.3 Opdrachten

**Opdracht 7.3.a    Van formules naar grafieken van tweedegraads functies**

Je ziet hieronder de functievoorschriften van een ongeordende verzameling tweedegraads functies.
Zoals je weet zijn de grafieken dal- of bergparabolen, met:
- een top waar de maximum- of minimumwaarde wordt bereikt
- een as van symmetrie door die top
- een snijpunt met de $y$-as
- soms snijpunten met de $x$-as (de nulpunten).

*Schets* voor elke functie de ligging van de parabool, nadat je zo eenvoudig en efficiënt mogelijk de hierboven genoemde eigenschappen van die grafiek hebt gevonden. Gebruik tabellen als je die kenmerken niet zo kunt zien.
Zet achteraf de functies bij elkaar die je met eenzelfde methode hebt onderzocht.

$f(x) = 5x^2 - 7x$

$g(x) = (x-2)(x-4)$

$h(x) = 3x^2 - 30$

$j(x) = 2x^2 - 5x - 7$

$k(x) = 2(x-3)^2 - 18$

$m(x) = (2x-1)(6-3x)$

$n(x) = 2x^2 - 12x + 10$

$o(x) = -x(x-2) + 1$

$p(x) = 16 - (x-5)^2$

$q(x) = 12 - 5x(x-5)$

$r(x) = -3x^2 + 2x - 1$

$s(x) = x^2 - 4$

*Toelichting*
Het eerste doel van deze opdracht is om aan de hand van kenmerken van een gegeven tweedegraads formule (functievoorschrift) enkele karakteristieken van de parabool af te leiden, zonder rekenwerk. Deze eerste stap in het interpreteren van een formule (eerst inspecteren wat je direct uit een formule kunt afleiden) versterkt het *overzicht* op het gebied van de formules van tweedegraads functies. Voordat in eventuele volgende paragrafen op detailkennis en specifieke technieken wordt ingegaan, moeten de leerlingen zelf nadenken over de formules en de eigenschappen die daar direct uit voortvloeien. Zo kunnen ze ontdekken dat ze ook door nadenken over de kenmerken van een formule tot goede conclusies kunnen komen.

*Parate vaardigheid*
Leerlingen kunnen met tabellen en eventueel het gebruik van een grafisch programma of de grafische rekenmachine een formule onderzoeken. Zij weten dat de grafiek van een tweedegraads functie een parabool is, ze kennen dus de vorm en de symmetrie met de top, de eventuele nulpunten enzovoort

*Werkwijze*
In tweetallen of groepjes werken de leerlingen aan deze opdracht, waarna in de nabespreking hun resultaten worden bediscussieerd en samengevat. Aansluitend kan de volgende opdracht worden gemaakt.

*Reflectie*
Nabespreking aan de hand van de grafieken en expliciteren. Afhankelijk van de manier van aanpak kan dat er als volgt uit zien.

- Uit $f(x) = 5x^2 - 7x = x(5x-7)$ volgen de nulpunten $(0,0)$ en $(\frac{7}{5},0)$, met de as $x = \frac{7}{10}$ en de top $(\frac{7}{10},-2\frac{9}{20})$ van de dalparabool.
- Uit $g(x) = (x-2)(x-4)$ volgen de nulpunten $(2,0)$ en $(4,0)$ met de as $x = 3$ en de top $(3,-1)$ van de dalparabool.
- Uit $m(x) = (2x-1)(6-3x)$ volgen de nulpunten $(\frac{1}{2},0)$ en $(2,0)$ met de as $x = 1\frac{1}{4}$ en de top $(1\frac{1}{4},3\frac{3}{8})$ van de bergparabool.
- Uit $n(x) = 2x^2 - 12x + 10 = 2(x^2 - 6x + 5) = 2(x-5)(x-1)$ volgen de nulpunten $(5,0)$ en $(1,0)$ met de as $x = 3$ en de top $(3,-8)$ van de dalparabool.
- Uit $h(x) = 3x^2 - 30$ volgt de top $(0,-30)$ van de dalparabool en uit $x^2 = 10$ de nulpunten $(-\sqrt{10},0)$ en $(\sqrt{10},0)$.

- Uit $k(x)=2(x-3)^2-18$ volgt de top $(3,-18)$ van de dalparabool en uit $(x-3)^2=9$ de nulpunten $(0,0)$ en $(6,0)$.
- Uit $s(x)=x^2-4$ volgt de top $(0,-4)$ van de dalparabool en uit $x^2=4$ de nulpunten $(-2,0)$ en $(2,0)$.

- Uit $o(x)=-x(x-2)+1$ volgt uit de symmetrie van de punten $(0,1)$ en $(2,1)$ de as $x=1$ en de top van de bergparabool $(1,2)$.
- Uit $q(x)=12-5x(x-5)$ volgt uit de symmetrie van de punten $(0,12)$ en $(5,12)$ de as $x=2\frac{1}{2}$ en de top van de bergparabool $(2\frac{1}{2},43\frac{1}{4})$.

- Uit $j(x)=2x^2-5x-7$ volgt direct het snijpunt met de $y$-as $(0,-7)$. Vanwege de symmetrie volgt uit $2x^2-5x=x(2x-5)=0$ het punt $(2\frac{1}{2},-7)$, enzovoort. Het kan ook anders.
- Uit $r(x)=-3x^2+2x-1$ volgt direct het snijpunt met de $y$-as $(0,-1)$.
  Vanwege de symmetrie volgt uit
  $-3x^2+2x=x(-3x+2)=0$ het punt $(\frac{2}{3},-1)$ enzovoort.
  Het kan ook anders.

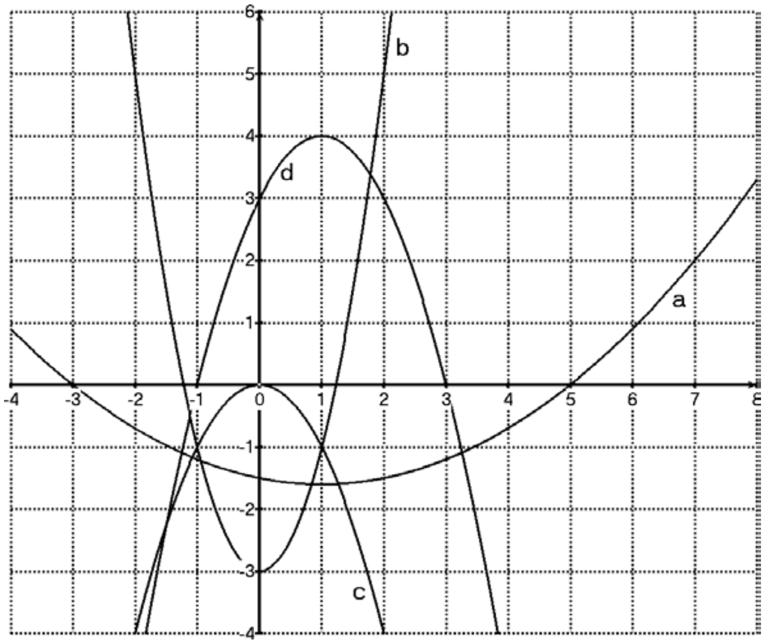

Het doel van deze activiteit overstijgt het recapituleren van eigenschappen van grafieken van tweedegraads functies. Het is een stap in het met verstand kijken naar formules en daar conclusies uit trekken over de grafieken, dus een aspect van wat "*symbol sense*" wordt genoemd.
Natuurlijk kunnen alle gevraagde eigenschappen ook worden gevonden met de $abc$-formule en zoiets als $x_{top}=-\frac{b}{2a}$, weer een geïsoleerd feitje dat moet en kan worden onthouden voor de volgende toets en daarna wordt vergeten. Als je dit werken aan "*symbol sense*" van belang vindt, dan moet het ook in een toets extra worden gewaardeerd.

*Plaats in de leerjaren*
In 2/3 havo-vwo, begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Afsluiting tweedegraads formules/functies in 3 havo-vwo, start 4 havo-vwo.

**Opdracht 7.3.b	Van grafieken naar formules van tweedegraads functies**

Bij de volgende grafieken van tweedegraads functies kun je de formule of het functievoorschrift vinden.




*Toelichting*
De weg terug, het opstellen van het functievoorschrift als de parabool is gegeven, is de tweede stap in het versterken van het kunnen interpreteren van zo'n formule. Uit de resultaten op de centrale examens wiskunde A en B blijkt telkens weer dat het opstellen van formules voor veel leerlingen lastig is. Dit is een eerste stap om aan de hand van grafieken van een bekende functie deze activiteit te leren beheersen.

*Parate vaardigheid*
Leerlingen hebben in de onderbouw en bijvoorbeeld in opdracht 6.3.a ruime ervaring opgedaan in de weg heen, van formule naar grafiek,

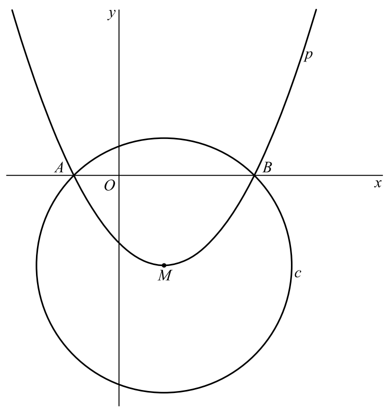
*Reflectie*
De weg terug, van grafiek naar formule, versterkt de vaardigheid om de kenmerken van een grafiek te kunnen koppelen aan die van de formule. Net als bij het vorige voorbeeld is een opbouw mogelijk van eerst eenvoudige formules naar later meer complexe.
In de nabespreking blijkt dat er meerdere manieren zijn om tot het functievoorschrift te komen en/of het op te schrijven. En met de grafische rekenmachine is controle van het gevonden functievoorschrift mogelijk.
Bijvoorbeeld: $d(x) = a(x-1)^2 + 4$ door het punt $(0,3)$ geeft $a = -1$ en
$d(x) = -(x-1)^2 + 4$.
Maar ook $d(x) = a(x+1)(x-3)$ door het punt $(0,3)$ geeft $a = -1$ en
$d(x) = -(x+1)(x-3)$.

Kansen om het denken over formules en wat ze voorstellen te bevorderen.
Na deze beide opdrachten, waarin het vooral gaat om het (opnieuw) bedenken van de relatie tussen een tweedegraads formule of functievoorschrift en de grafiek, kan die relatie worden geëxpliciteerd in een schrift of op een poster of…

*Plaats in de leerjaren*
Begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Start algebra 4 havo-vwo.

**Opdracht 7.3.c Parabool en cirkel**
CSE wiskunde B havo 2015 pilot vraag 16




Cirkel $c$ met middelpunt $M$ is gegeven door $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$.
De punten $A(-1,0)$ en $B(3,0)$ zijn de snijpunten van $c$ met de $x$-as.
Parabool $p$ heeft de top in $M$ en snijdt de $x$-as in $A$ en $B$. Zie de figuur.

Parabool $p$ is de grafiek van de functie $f$.
Stel op algebraïsche wijze een functievoorschrift van $f$ op.

*Toelichting*
Is dit nu wel een WDA-opdracht? Het berekenen van de coördinaten van $M$ is in dit programma een parate vaardigheid, dat geeft $M(1,-2)$.
En het opstellen van het functievoorschrift als de grafiek een parabool is, terwijl de coördinaten van de nulpunten en de top gegeven zijn, moet toch ook een parate vaardigheid zijn? En toch was de p'-waarde maar 39.
Ligt het aan het niet kunnen combineren van de analytische meetkunde met de analyse? Is die kennis opgesloten in aparte vakjes? Of wordt de parate vaardigheid niet beheerst? Die vraag is in het voorafgaand onderwijs gemakkelijk te toetsen en te beantwoorden.

*Parate vaardigheid*
De leerlingen kennen de vergelijkingen van een parabool en een cirkel met hun eigenschappen.

*Werkwijze*
In duo's nu en dan laten werken aan opdrachten die domeinen verbinden.

*Reflectie*
In de nabespreking achterhalen of de samenhang van beide gebieden wel wordt begrepen.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5 havo-vwo.

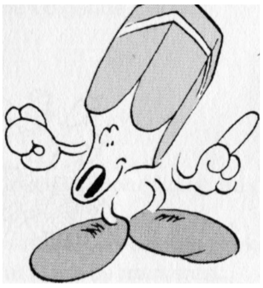
*Relatie met schoolboeken*
Gemengde opgaven over meerdere onderwerpen.

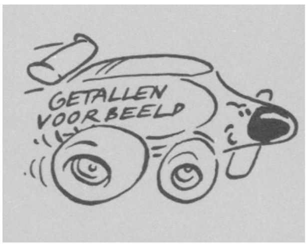
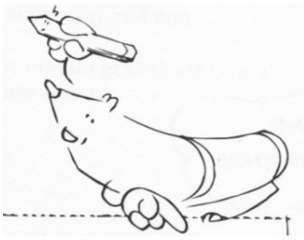
# 8. Leren een 'nieuw' probleem aan te pakken

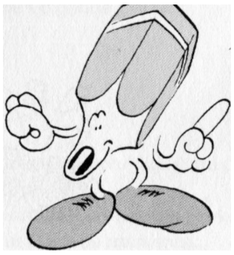
## 8.1 Toelichting

Een opgave doet zich in de beleving van iemand als een *probleem* voor als diegene *niet onmiddellijk* een oplossing(sweg) ziet. Of een opgave als een probleem wordt *ervaren,* is dus gebonden aan een persoon, aan een tijdstip. De wiskundedocent die tegen een leerling of een klas zegt: '*Dit mag geen probleem zijn'* hanteert impliciet een meer objectief criterium. Zoiets als: *'Gelet op het leerjaar en hoe vaak jullie dit al hebben gehad, moet dit toch echt voor jullie routine zijn.'*
In de dagelijkse lespraktijk blijken opgaven die de docent als standaardopgaven classificeert, voor leerlingen toch vaak problemen te zijn. En dus moeten die leerlingen ook voor dat type opgaven een aanpak ontwikkelen en heuristische omwegen kennen en kunnen uitvoeren, die hen tot een oplossing leiden of die alsnog leiden tot herkenning.

De voorbeelden uit dit hoofdstuk hebben tot doel leerlingen te laten ervaren hoe zij problemen kunnen leren aanpakken. Wat heel goed werkt, is dat leerlingen een *spiekboekje* bijhouden waarin ze opschrijven wat ze moeten onthouden over hun aanpak en de wiskunde die ze nog niet paraat hebben. De eerste pagina zou u kunnen aanleveren en er bijvoorbeeld als volgt uit kunnen zien:

| Waar gaat het over? | |
|---|---|
| *nog een keer goed lezen* |  |
| *de gegevens even opschrijven* |  |

| | |
|---|---|
| *een schets maken van de situatie of een grafiek* |   |
| *een voorbeeld bedenken of uitwerken* |   |
| Waar moet ik naartoe? | |
| *in eigen woorden opschrijven wat er wordt gevraagd* |   |
| *welke gegevens heb ik nodig* |  |
| Wat weet ik al | |
| · *welke eigenschappen volgen direct uit de gegevens*<br>· *welke wiskundige kennis kan ik gebruiken*<br>· *heb ik al eerder zo iets gezien* |  |

<table>
<tr><td>Aan de slag</td><td></td></tr>
<tr><td>· ik ga eerst dit doen, vervolgens dat en…<br>· plan uitvoeren<br>· oplossing controleren</td><td></td></tr>
<tr><td>Geen idee</td><td></td></tr>
<tr><td>· in eigen woorden bedenken waar het over gaat<br>· een plaatje of grafiek maken<br>· een getallenvoorbeeld doorrekenen<br>· een formule maken</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Vastgelopen</td><td></td></tr>
<tr><td>· waarom doe ik dit ook alweer<br>· kan dit wel kloppen<br>· wat was er ook al weer gevraagd</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Terugblik</td><td></td></tr>
<tr><td>· wat heb je eerst gedacht en waarom<br>· hoe ging het verder<br>· waar bleef je steken en waarom<br>· wat had je achteraf beter kunnen doen<br>· waar moet je een volgende keer om denken<br>· welke wiskunde moet je beter paraat hebben</td><td>
</td></tr>
</table>

## 8.2 Doel – middelen – analyse

### 8.2.1 Toelichting: Doel – middelen – analyse

De meest algemene strategie om een probleem aan te pakken wordt in de literatuur *doel-middelen-analyse* (means-end-analysis) genoemd. De strategie is zó algemeen algemeen dat zij op allerlei vakgebieden is uitgewerkt. Het komt neer op een systematisch onderzoek van de eerder genoemde vragen:

*Waar gaat het over? Waar moet ik naar toe? Wat weet ik al?*

In meetkundige problemen betekent dit veelal dat je heen en weer pendelt tussen de gegevens en het gevraagde, waarbij je systematisch de parate kennis over meetkundige eigenschappen (de middelen) naloopt op hun toepasbaarheid.
In het gebied van functies en vergelijkingen is een goed zicht op het repertoire aan parate kennis van regels en kenmerken van functies essentieel om doelgericht de gegeven situatie om te werken naar het gevraagde doel.

Over het algemeen zijn leerlingen (en andere mensen) geneigd direct op grond van een oppervlakkige inspectie te associëren (*iets met faculteiten?)* en te gaan rekenen, voordat ze eerst eens rustig bij de genoemde vragen hebben stil gestaan. In wiskundeonderwijs kunnen docenten in leergesprekken, klassendiscussie en individuele hulp uitstralen dat eerst nadenken (denkpauzes inlassen) over de genoemde vragen essentieel is voor een succesvolle aanpak.
We geven eerst twee eenvoudige klassieke voorbeelden om met een klas na te denken over een probleemaanpak. Ze zijn geschikt voor elk niveau en op elk moment in te zetten!

**Voorbeeld 8.2.1.a Aantal bladzijden**

Een drukker gebruikt 2989 cijfers om de bladzijden van een boek te nummeren.
Bladzijde 1185 heeft dus 4 cijfers. Hoeveel bladzijden heeft het boek?

*Reflectie op de probleemaanpak*
Een getallenvoorbeeld? Vooruit redeneren? Nee, terug redeneren, vanuit het doel.
Voor een boek van 99 bladzijden zijn 9 +180=189 cijfers nodig.
Voor een boek van 999 bladzijden worden dat 9+90x2+900x3=2889 cijfers.
Nog 25 bladzijden van 4 cijfers, dus het boek heeft in totaal 1024 bladzijden.

**Voorbeeld 8.2.1.b Deelbaar door 13?**

Bewijs dat elk getal van de vorm $abcabc$ deelbaar is door 13.

*Reactie op de probleemaanpak*
Hoe ziet zo'n getal eruit? Over welke situatie gaat het?
Een getallenvoorbeeld? 276276 ? Volgende 277277 en dan 278278. Een patroon?
Verschillen 1001. En 1001 is deelbaar door 13.
Algemeen, wat betekent $abcabc$ ? Dat is

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c =$$

$$a \cdot 10^2 \cdot (10^3 + 1) + b \cdot 10 \cdot (10^3 + 1) + c \cdot (10^3 + 1) = 1001 \cdot abc$$

## 8.2.2 Oefeningen

**Oefening 8.2.2.a Redeneren met kenmerken van een formule**
Variant CSE wiskunde B havo 2015 vraag 16

De functie $f$ is gegeven door $f(x) = 2^{\frac{1}{2}x^2 - x}$.
Beredeneer waar de functie stijgend en dalend is en bereken exact het minimum van $f$.

*Toelichting*
Deze oefening is een variatie op de examenvraag 16 van wiskunde B havo 2015 (pilotexamen vraag 15). Daarin werd alleen gevraagd naar het minimum en ook nog de volgende zin toegevoegd: *Als de exponent van 2 minimaal is, dan is ook $f$ minimaal.*

In dat geval toets je alleen of een leerling het minimum van een parabool kan berekenen, een leerdoel uit de onderbouw. Toch was het de slechtst scorende vraag, met een p'-waarde 9. De interpretatie moet wel zijn dat deze havo B leerlingen niet hebben geleerd om vragen te stellen aan een formule, maar alleen standaardtechnieken hebben gememoriseerd.
De bovenstaande enkelvoudige opgave heeft tot doel dat leerlingen leren vragen te stellen aan de formule en leren relevante kennis op te roepen om tot het doel te komen. Dus iets als:

*Waar gaat het over?*
Tja, het is een exponentiële functie met een vreemde exponent.
*Waar moet ik naar toe?*
Ze willen iets weten over dalen en stijgen van die functie.
*Wat weet ik al?*
Als de exponent van 2 toeneemt is de functie stijgend.
En als de exponent van 2 afneemt is de functie dalend.
*Waar moet ik naartoe?*
Wat doet die exponent? Als die exponent in waarde toeneemt, dan ook de functie. Maar…
*Wat weet ik al?*
Oh ja, dat is zo'n tweedegraads functie met een dalparabool als grafiek. Even een plaatje, nulpunten bij 0 en 2, dus een minimum voor $x=1$. Daar heeft $f$ dus ook een minimum en $f(1)=2$. En voor $x$ groter dan 1 neemt de exponent toe en dus ook de functie.
*Terugblik*
Nog even netjes opschrijven. Dus eerst goed kijken hoe de formule in elkaar zit.

*Parate vaardigheid*
Kennis van exponentiële en tweedegraads functies.

*Werkwijze*
Tijdens de les in duo's laten werken.

*Reflectie*
In de nabespreking de aanpak accentueren en nog wat voorbeelden geven.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 4/5 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Tussendoor.

**Oefening 8.2.2.b Combineren van twee gegevens**

De grafiek van de functie $f$ met $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ raakt de lijn $y=x$ in de oorsprong $(0,0)$. Bereken $a$ en $b$.

*Toelichting*

Het lijkt een eenvoudige opgave, maar voor veel leerlingen is dit een probleem. De moeilijkheid zit in het gebruiken van het gegeven dat de grafiek van $f$ door $(0,0)$ gaat én dat daar de afgeleide waarde 1 is. Dus:

*Waar gaat het over?*
Een raaklijn aan een grafiek, dus iets met de afgeleide.
*Waar moet ik naar toe?*
$a$ en $b$ berekenen.
*Wat weet ik al?*
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is de afgeleide $f'(0)=1$.
De afgeleide functie is $f'(x)=3x^2-6x+a$ en $f'(0)=a=1$.
*Waar moet ik naar toe?*
Hoe kom ik nu aan de waarde van $b$?
*Heb ik alle gegevens wel gebruikt?*
Nee, want $f(0)=0$ en dat geeft $b=0$.

*Parate vaardigheid*

Kennis van het differentiëren.

*Werkwijze*

Tijdens de les in duo's laten werken.

*Reflectie*

In de nabespreking de aandacht richten op het gebruik van alle gegevens. Nog wat voorbeelden geven.

*Plaats in de leerjaren*

Wiskunde B 4/5 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*

Gemengde problemen na het differentiëren.

### Oefening 8.2.2.c Combineren van drie gegevens

Een cirkel raakt aan de $x$-as, de $y$-as en gaat door het punt $(8,1)$.
Wat is de vergelijking van die cirkel?

*Toelichting*

Een voorbeeld van een aan te leren algemene probleemaanpak:

*Waar gaat het over?*
Een cirkel die aan drie voorwaarden moet voldoen.
*Waar moet ik naartoe?*
De vergelijking van die cirkel.
*Wat weet ik al?*
De algemene vergelijking van een cirkel is $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
*Geen idee?*
Ik zit vast. Even tekenen hoe die cirkel erbij ligt.

*Gegevens gebruiken.*

De afstand tot de $x$-as is gelijk aan de afstand tot de $y$-as, dus $M(a,a)$.

*Waar ben ik mee bezig?*

Even de vergelijking opschrijven: $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$.

*Alle gegevens gebruikt?*

Nee, door $(8,1)$, dus invullen: $(8-a)^2+(1-a)^2=r^2$.

*Ik zit vast.*

Even terug naar mijn tekening. Oh ja, de straal is ook $a$. Nu ben ik er:
$(8-a)^2+(1-a)^2=a^2$. Even rekenen geeft $a=5$ of $a=13$.

*Parate vaardigheid*

Kennis van de algemene vergelijking van een cirkel.

*Werkwijze*

Tijdens de les in duo's laten werken of huiswerk.

*Reflectie*

In de nabespreking de aandacht richten op het gebruik van alle gegevens en het maken van een plaatje.

*Plaats in de leerjaren*

Wiskunde B 4/5 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*

Gemengde problemen over analytische meetkunde.

**Oefening 8.2.2.d  Herleiden van een formule**

CSE havo wiskunde A 2015 vraag 10

De vriespuntdaling $V$ is het aantal graden dat het vriespunt van water lager wordt dan 0 ºC.

Met behulp van de volgende formule kan $V$ worden berekend: $V=3{,}72\cdot\dfrac{D}{58{,}5\cdot H}$

Hierin is $D$ de dosering van het zout in gram/m$^2$ en $H$ de hoeveelheid neerslag in de vorm van sneeuw, ijs of water) in kg/m$^2$.
Bij een vriespuntdaling van 4,5 ºC kan de formule zo worden herleid dat $D$ wordt uitgedrukt in $H$. Geef deze herleiding.

*Toelichting*

Op deze opgave scoorden de kandidaten een p'-waarde 29, terwijl driekwart 0 of 1 punt (van de vier) behaalde. Ongetwijfeld kennen deze leerlingen vanaf leerjaar 1 de regels dat je links en rechts van het =-teken met dezelfde termen mag optellen of aftrekken of met dezelfde factoren mag vermenigvuldigen of delen.

Wil je die 'middelen' gebruiken om tot het doel te komen, dan moet de vraag '*Waar wil ik naartoe?*' worden gesteld en beantwoord. Dus even uitzoomen, eerst de startformule of vergelijking opschrijven en dan eronder het doel.

$4{,}5=3{,}72\cdot\dfrac{D}{58{,}5\cdot H}$

............................

............................

$.....=D$

$D=.....$

Vanaf leerjaar 1 zou die strategie bij alle vergelijkingen en herleidingen tot het repertoire moeten behoren. Wordt dat ergens onderwezen?

*Parate vaardigheid*
Kennis van de regels voor het oplossen van een eerstegraads vergelijking.

*Werkwijze*
Leergesprek.

*Reflectie*
De strategie accentueren en meteen nog wat van die oefeningen laten maken.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde 3/4/5 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Op allerlei momenten waar formules worden gebruikt.

### 8.2.3 Opdrachten: Doel – middel – analyse

**Opdracht 8.2.3.a Number Rumba**

CSE wiskunde A vwo pilot 2015 vraag 21

Het spel Number Rumba kan gespeeld worden met één of twee spelers. Iedere speler heeft een standaard voor zich met vier staven. Verder heeft een speler 9 verschillende blokjes: 3 blauwe, 3 rode en 3 gele, waarbij de blokjes van elke kleur genummerd zijn van 1 tot en met 3.
Het doel van het spel is om de opstelling van de blokjes op de standaard vanuit een beginopstelling zo snel mogelijk te veranderen in de opstelling die op een opdrachtkaart staat. Hierbij wordt er steeds één blokje verplaatst en mogen niet meer dan drie blokjes tegelijk op een staaf staan.

**foto 1**

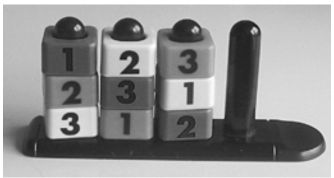
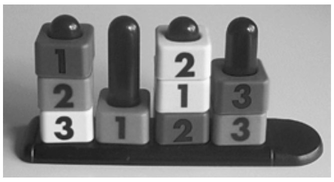



**foto 2**




Foto's 1 en 2 laten twee mogelijke opstellingen tijdens het spel zien.
Tijdens het spel kan iedere mogelijke opstelling met de negen blokjes op de vier staven ontstaan.
Onderzoek hoeveel opstellingen er in dit spel in totaal mogelijk zijn met de negen blokjes op de vier staven.

*Toelichting*
Dit is een opgave die een systematische probleemanalyse vereist, want de aanpak is niet onmiddellijk duidelijk. (Slechts 3% van de leerlingen behaalde de maximale score en 55% behaalde geen enkel punt.) Het is helder dat deze opdracht inderdaad een beroep doet op probleem oplossen en wel op een manier die regelmatig in het onderwijs aan de orde moet komen. Gebeurt dat niet, dan kunnen alleen "slimme" leerlingen, die dit elders hebben geleerd, bijvoorbeeld met computerspelen, dit goed aanpakken. Een mogelijke aanpak:

*Waar gaat het over?*

Kennelijk zijn er 9 verschillende blokjes die onderverdeeld zijn in drie kleuren.

*Waar moet ik naartoe?*

Die blokjes moeten worden verspreid over vier staafjes. Eens even kijken naar het doel, het gevraagde. Het gaat alleen maar over de verspreiding van die 9 verschillende blokjes over de vier staven. O.K. dus de kleuren zelf doen er kennelijk niet toe, maar wel de volgorde van die blokjes.

*Wat weet ik al?*

Over volgordes? Daar weet ik wel raad mee, gewoon een permutatie, op 9! manieren. Elke opstelling kan op 9! manieren worden verwisseld.

*Waar gaat het over?*

Terug naar de opstelling, de verdeling over vier staafjes.
Foto 1 is een mogelijkheid, maar dan op 9! manieren. En dat lege staafje kan op vier plaatsen staan, dus 4*9!. Dat hebben we.

*Hoe nu verder?*

Eens kijken naar foto 2, dat is zoiets als 3-1-3-2 en natuurlijk weer op 9! manieren.

*Wat weet ik al?*

Zoiets als twee gelijk (stapeltje van 3) en nog twee verschillend. Dat is hetzelfde als het aantal woorden abac. Een permutatie van 4, dus 4! en delen door 2 wegens aa, dat is 12 manieren, dus 12*9!.

*Heb ik alles?*

Het kan ook nog met 3-2-2-2, dat is gemakkelijk, 4*9!.
Meer mogelijkheden? Ik denk het niet. Opgeteld 20*9!=7257600.

*Parate vaardigheid*

Het kunnen oplossen van telproblemen.

*Werkwijze*

Tijdens een les in groepjes laten uitwerken.

*Reflectie*

In de nabespreking de aandacht richten op een systematische probleemaanpak. Nog wat voorbeelden geven.

*Plaats in de leerjaren*

Wiskunde A/C 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*

Na de hoofdstukken over telproblemen.

### Opdracht 8.2.3.b Cirkels en lijnstuk

CSE wiskunde B vwo pilot 2015 vraag 3

Over de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1 beweegt een punt *A* met

bewegingsvergelijkingen:
$$x(t) = \sin t$$
$$y(t) = \cos t$$
$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Over de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 2 beweegt een punt *B* met

bewegingsvergelijkingen: $$x(t)=2\sin(2t)$$ $$y(t)=2\cos(2t)$$ $$0\leq t\leq 2\pi$$

Op de tijdstippen waarop *B* zich op de $x$-as bevindt, bevindt *A* zich op de lijn met vergelijking $y=x$ of op de lijn met vergelijking $y=-x$.

Bewijs dit.

*Toelichting*

Behalve met veel rekenwerk is er ook een oplossing mogelijk door terug te redeneren vanuit het doel. Zoiets als:

*Waar gaat het over?*

Twee punten met hun bewegingsvergelijkingen.

*Waar moet ik naar toe?*

Punt B op de $x$-as dus $\cos(2t)=0$.

Wat kunnen we zeggen over de coördinaten van A? Dus iets over $\sin t$ en $\cos t$.

*Wat weet ik al?*

$$\cos(2t)=\cos^2 t-\sin^2 t=0$$
$$(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)=0$$

enzovoort.

*Terugblik*

Eerst bekijken of het vergelijken van de gegeven situatie en het doel wellicht een oplossingsweg aan de hand doet.

*Parate vaardigheid*

Het kunnen rekenen met bewegingsvergelijkingen.

*Werkwijze*

Tijdens een les klassikaal brainstormen en uitdagen tot een elegante oplossing.

*Reflectie*

Meer voorbeelden presenteren waarin eerst bekijken van het gehele probleem loont.

*Plaats in de leerjaren*

Wiskunde B 6 vwo.

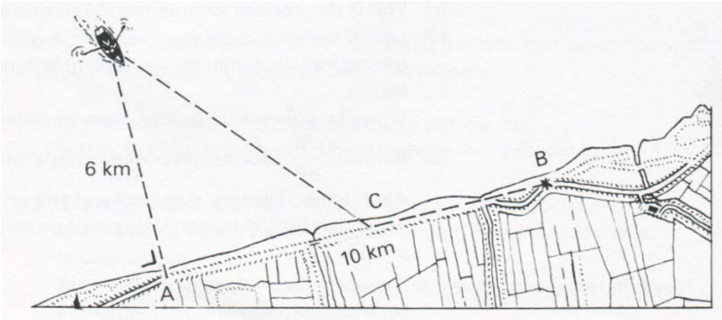
*Relatie met schoolboeken*

Gemengde problemen eind 6 vwo.

## Opdracht 8.2.3.c Het snelst

Iemand zit in een roeibootje op 6 km uit de kust. Hij wil zo snel mogelijk naar punt B. Als hij roeit, is zijn snelheid 3 km/uur, als hij gaat lopen 5 km/uur.

Zie de tekening. De afstand van A naar B is 10 km.




Hij wil zo snel mogelijk in B komen.
Zoek uit wat de meest gunstige plaats is om aan land te gaan.
Wat verandert er als de afstand AB gelijk aan 20 meter is?

*Toelichting*
Een klassiek probleem dat heel geschikt is om achteraf een systematische probleemaanpak over het voetlicht te brengen. Bijvoorbeeld:

- Geen idee. Eerst maar eens de uiterste gevallen doorrekenen. Het maakt uit.
- Een variabele invoeren, bijvoorbeeld AC = $x$.
- Een formule maken voor de tijd $T$ : $T = \frac{1}{3}\sqrt{36+x^2} + \frac{1}{5}(10-x)$.
- Nu kunnen we het wiskundig gereedschap benutten.

*Parate vaardigheid*
Het kunnen differentiëren met de kettingregel.

*Werkwijze*
In duo's.

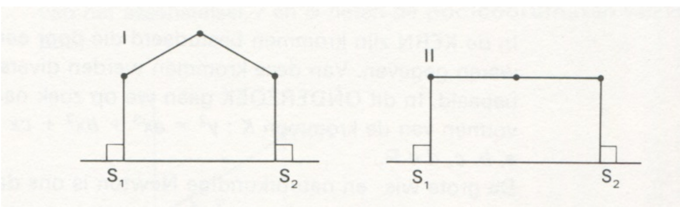
*Reflectie*
Waar werd je geblokkeerd?

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 4/5 havo, 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Gemengde problemen.

## Opdracht 8.2.3.d Speelplaats

Een fabrikant maakt tuinhekjes die bestaan uit koppelbare segmenten van 2 meter lengte. Bert koopt vier van deze segmenten en wil een speelplaats in zijn tuin maken, aansluitend bij een muur. In de tekening zie je twee mogelijke bovenaanzichten.



- Welke van deze twee situaties levert de grootste oppervlakte, denk je? Waarom?
- Bereken de maximale oppervlakte die in de eerste situatie kan worden bereikt.

*Toelichting*
Een variant op een bekend probleem, maar veel lastiger. Een mogelijke aanpak:
- Eerst maar even een paar keer tekenen. Hoe zit het in elkaar?
- Kennelijk speelt de breedte $a$ en de hoogte $h$ van het driehoekje een rol en die twee hangen samen met de hoek $\alpha$ .
- Nu de formule $Opp = 8 \cdot \cos\alpha + 4 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ .
- De oppervlakte is maximaal ongeveer 8,81 m$^2$ voor $\alpha \approx 0,37$ .

*Parate vaardigheid*
Kennis van de gonioformules.

*Werkwijze*
In duo’s.

*Reflectie*
Waar werd je geblokkeerd? Wat helpt om voortgang te maken?

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Na de goniometrie.

## 8.3 Heuristische methode: grafieken helpen vaak

### 8.3.1 Toelichting

In de curricula voor wiskunde A, B en C hebben de grafieken een belangrijke verbindende rol tussen algebraïsche representaties, contexten en numerieke gegevens. De volgende voorbeelden hebben tot doel leerlingen te doen beseffen dat de eerste stap om een probleem te kraken veelal bestaat uit het maken van een ‘plaatje’, een grafiek van de situatie. Het maken van een grafiek bij een situatie is zeker niet een triviale activiteit, omdat in die visualisatie veel gegevens worden gecomprimeerd. Grafieken kunnen leerlingen helpen betekenis te geven aan bijvoorbeeld algebraïsche operaties.

### 8.3.2 Oefeningen

**Oefening 8.3.2.a De berg op en af**

Carlos doet veel aan bergwandelen. Hij begon om 8 uur ‘s morgens de berg Alpico op te wandelen en bereikte om 4 uur ‘s middags de bergweide vlak onder de top. Daar zette hij zijn tentje op en bleef er die nacht. De volgende morgen om 8 uur begon hij aan de afdaling. Precies dezelfde route volgend kwam hij om 2 uur ‘s middags weer bij zijn vertrekpunt aan.

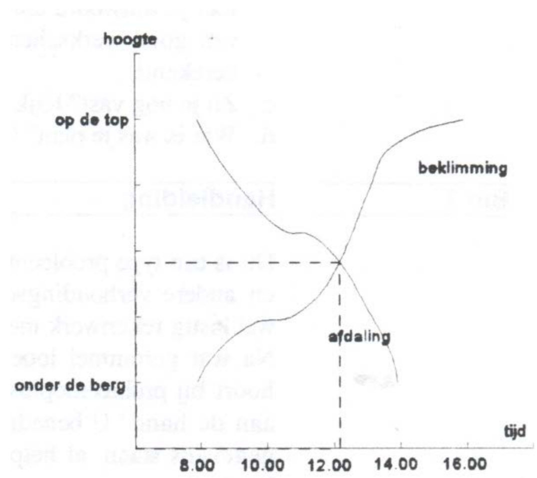
Is er een punt op zijn route dat hij op beide dagen op precies hetzelfde tijdstip passeerde? Licht je antwoord duidelijk toe met berekeningen, grafieken of redeneringen.

*Toelichting*

Een eenvoudige situatie, zonder formules en weinig gegevens als voorbeeld van een probleemaanpak met verschillende mogelijkheden. Stap 1 in deze WDA-leerlijn. Een realistische situatie die inzichtelijk kan worden gemaakt met grafieken en van leerlingen een zekere argumentatie vraagt.

*Parate vaardigheid*

Grafieken tekenen bij een toegepaste situatie.




*Werkwijze*

Even aan het begin of einde van een les voorleggen, in tweetallen aan laten werken en dan inventariseren wat er zoal is bedacht.

*Reflectie*

Naar aanleiding van deze opgave kunt u benadrukken dat een vage omschrijving van een situatie zonder kwantitatieve gegevens concreet kan worden gemaakt door zelf getallenvoorbeelden te bedenken en aannames te doen. Op grond van zo'n zelf bedachte tabel of grafiek kan een sluitende redenering worden gegeven. Een tabel kan er als volgt uitzien:

De berg op:

| tijdstip | 8.00 | 10.00 | 12.00 | 14.00 | 16.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| hoogte | 1500 | 2000 | 2200 | 2500 | 2600 |

De berg af:

| tijdstip | 8.00 | 10.00 | 12.00 | 14.00 | 16.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| hoogte | 2600 | 2400 | 2000 | 1800 | 1500 |

Uit de twee tabellen is op te maken dat er altijd een tijdstip is, waarop dezelfde hoogte wordt bereikt of dezelfde afstand is afgelegd. De grafiek laat dat onmiddellijk zien.

Kan het korter of mooier? Jawel, maar dan moet je het probleem even anders formuleren: 'Carlos vertrekt de eerste dag om 8.00 uur de berg op en Karel vertrekt op hetzelfde moment vanaf de top voor de wandeling de berg af. Het is glashelder dat zij elkaar tegenkomen!'
Hoe kom je daar nu op? Soms pas achteraf. Soms door direct een analoog probleem te formuleren, dat exact op hetzelfde neerkomt.

*Plaats in de leerjaren*
In 2/3 havo-vwo, begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Op elk moment, tussendoor.

### 8.3.3 Opdrachten

**Opdracht 8.3.3.a Titia's rechtszaak**

Titia is geverbaliseerd wegens te hard rijden op een weggedeelte waar 60 km/u de maximale snelheid is. Zij is het niet met de boete eens en haar zaak komt voor de rechter. De betrokken politieagent verklaart dat hij na een bocht 1,5 km met een snelheid van 120 km/u had moeten rijden om Titia te kunnen inhalen.
Titia baseert haar verdediging op drie punten:

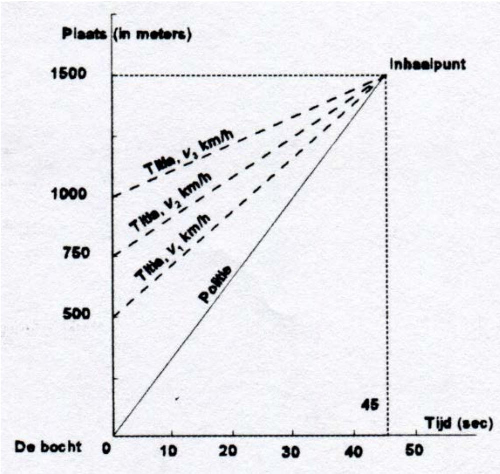
1. Ik reed precies 60 km/u.
2. De verklaring van de agent bewijst niets. Hoe ver was hij achter mij, toen hij besloot te gaan inhalen? Dat is alleen van belang.
3. Toen ik de politieauto in de spiegel de bocht om zag komen was ik 500 meter voorbij die bocht.

*Opdracht*
Bedenk wiskundige argumenten voor de aanklager en voor de verdediging.

*Mogelijke hints*
*Aanpak: Terrein verkennen*
In dit verhaal komen feiten en beweringen voor. Bedenk een manier om de situaties en de verschillende gegevens overzichtelijk weer te geven.
*Model 1*
Neem aan dat de gegevens van de agent kloppen. Wat volgt daaruit? Hoe stevig staat dan de verdediging van Titia?
*Model 2*
Bedenk een verdediging van Titia, die leidt tot een snelheid van 60 km/u.

*Terugblik*
Kijk nog eens terug en schrijf op wat voor jou het beste idee voor de aanpak was. Waar bleef je steken? Waarop of waarom?

*Toelichting*
Grafisch modelleren van een levensechte situatie en die opsplitsen in deelproblemen. Een verkeerssituatie modelleren op grond van aannames en dat grafisch weergeven. Een mooi voorbeeld waarin de kracht van een systematische probleemaanpak uit de verf komt.




*Parate vaardigheid*
Grafieken tekenen bij een toegepaste situatie.

*Werkwijze*
In groepjes als praktische opdracht uit voeren. Door het als een rechtszaak te laten presenteren met aanklagers en verdedigers, moeten leerlingen scherp argumenteren met wiskundige eigenschappen. (Zie het artikel *Wiskunde in een kort geding* van Ron Jansen, Nieuwe Wiskrant 5-1, 1985.)

*Reflectie*
De kracht van een grafische weergave, waarin allerlei varianten kunnen worden verwerkt, is hier evident. Daarnaast speelt het durven exploreren en aannames maken weer mee. Dat vereist de vaardigheid om goed grafieken te interpreteren en er flexibel mee te werken.
De tijd die de agent erover doet om Titia in te halen is:
$t = \frac{x}{v} = \frac{1500}{33,33} = 45$ sec

Dan is de snelheid van Titia $v_1 = \frac{1000}{45} \approx 22,22$ m/s of 80 km/u.

Als de afstand na de bocht 750 m was geweest, dan was $v_2 = 60$ km/u.

*Plaats in de leerjaren*
Begin 3/4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Als start van de WDA-lijn van het modelleren in 3/4 havo-vwo, in alle wiskundevakken.

## Opdracht 8.3.3.b Pech onderweg

Petra woont in Amersfoort en Harrie in Apeldoorn. Ze gaan samen op fietsvakantie en fietsen eerst elkaar tegemoet. Zwaar beladen vertrekt Petra om 8 uur ‘s morgens uit Amersfoort in de richting van Apeldoorn. Harrie heeft zich verslapen en begint pas om halftien aan zijn fietstocht richting Amersfoort. Petra houdt een gemiddelde snelheid van 15 km/u aan, Harrie haalt de 20 km/u wel. De fietsafstand tussen Amersfoort en Apeldoorn is 50 km.

*Startvraagje:* Hoe laat komen zij elkaar tegen? Waar ergens?

*Pech*

Ze fietsen samen verder richting Wageningen. Op een afstand van zo'n 30 km van Wageningen stort de fiets van Harrie in elkaar. Ze stallen Harries fiets in een schuur bij een boer. Alle bagage gaat nu op de fiets van Petra, maar Harrie kan er niet meer bij op.

Zij besluiten afwisselend te gaan fietsen en lopen. Petra begint te fietsen en Harrie gaat lopen. Petra zet haar fiets na een tijdje langs de kant van de weg en loopt verder. Harrie pikt de fiets op en fietst verder, totdat hij Petra heeft ingehaald. Dan ruilen ze weer. Petra fietst en Harrie loopt tot het volgende wisselpunt. Enzovoort. In de buurt van Wageningen wisselen ze wat sneller, zodat ze tegelijk in de jeugdherberg aankomen.

*Opdracht*

Gaat dit sneller dan alleen lopen? Maakt het uit hoe snel ze wisselen?

Onderbouw je conclusies met een berekening en een redenering.

Laat zien dat je conclusies algemeen gelden!

*Hints?*

Een fraai voorbeeld van de kracht van plaatjes en grafieken en tegelijk een oefening in het analyseren van een ingewikkelde, in woorden beschreven, situatie. Het gaat er hier om dat leerlingen ervaren dat ze toch iets kunnen ondernemen als ze vast zitten in de aanpak van een probleem. Met de volgende hints, bijvoorbeeld op afroep verkrijgbaar, kunt u dat stimuleren.

*Mogelijke hints*

*Plaatjes maken, grafieken tekenen.*

Bij verschillende tijdstippen kun je plaatjes maken van de plaats van Petra en Harrie. Waar zijn ze om 9 uur? En om half tien?

Je kunt ook tijd-plaatsgrafieken tekenen.

*Zit je vast? Je weet te weinig? Kies getallenvoorbeelden.*

Kies bijvoorbeeld de loopsnelheden en fietssnelheden van Petra en Harrie.

Maak daar plaatjes bij van hun positie op verschillende tijdstippen.

Of maak een tijd-plaatstabel of tijd-plaatsgrafieken.

| Tijd (min) | 10 | 20 | 30 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Petra | 3* | 4 | 5 | 6# | 12* | 14 | 16 | 18# | 27* | 30 | 33 | 36# |
| Harrie | 1 | 2 | 3# | 6* | 8 | 10 | 12# | 18* | 21 | 24 | 27# | 36* |

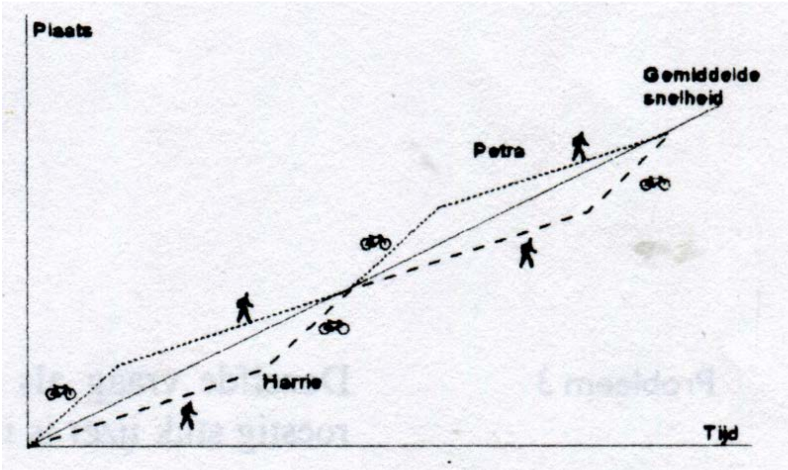
* betekent dat de fietser afstapt en verder loopt

\# betekent dat de loper opstapt en verder fietst

*Grafieken helpen vaak.*

Zonder getallenvoorbeelden ben je aangewezen op grafieken.

Zet verticaal de weg van 30 km af en horizontaal de tijd.




Teken beide tijd-plaatsgrafieken tot het eerste wisselpunt, daarna tot het punt dat Harrie Petra inhaalt, daarna tot het volgende wisselpunt, enzovoort.
Hoe ziet de grafiek van de gemiddelde snelheid er uit?

*Algemeen geldend*
Door getallenvoorbeelden krijg je een idee hoe het probleem in elkaar zit. Ga nu uit van het meest algemene geval met fietssnelheden $F_{Petra}$ en $F_{Harrie}$ en loopsnelheden $L_{Petra}$ en $L_{Harrie}$. Kun je nu met tijd-plaatsgrafieken beredeneren zien dat je conclusies niet afhangen van de getallenvoorbeelden?

*Toelichting*
Het gaat hier om een realistische situatie die met behulp van heuristische methoden kan worden onderzocht, waarna de aanpak kan worden gegeneraliseerd in de vorm van een strategie. (Zie de bespreking van het analoge probleem van *Heit en Kees* in het Handboek Wiskundedidactiek, §1.3.2. Of de eerder genoemde oratie *Het denken bevorderen.*)

*Parate vaardigheid*
Grafieken tekenen van (lineaire) verbanden, die in een toegepaste situatie voorkomen.

*Werkwijze*
In groepjes, bijvoorbeeld als praktische opdracht, eventueel met een gefaseerde probleemstelling. Veel werk maken van de reflectie op een aanpak met heuristische omwegen.

*Reflectie*
De boodschap van deze opdracht: als je vast zit bij de aanpak van een probleem, kun je altijd getallenvoorbeelden onderzoeken (zie ook § 7.2) en grafieken proberen. En achteraf zeg je hier, kijkend naar de grafieken: *Ze lopen elk de helft en fietsen elk de helft dus....*

*Plaats in de leerjaren*
In 3/4 havo-vwo

*Relatie met schoolboeken*
Als voorbeeld van het belang van een systematische probleemaanpak in de WDA-lijn van het probleemoplossen, uitvoerbaar in 3/4 havo-vwo, in alle wiskundevakken.

## 8.4 Heuristische methode: getallenvoorbeelden helpen vaak

### 8.4.1 Toelichting

Een belangrijke heuristische methode van Polya is het onderzoeken van een probleem met behulp van getallenvoorbeelden. Dankzij het doorrekenen met één of meer getallenvoorbeelden begin je door te krijgen hoe de probleemsituatie in elkaar zit en wat wellicht de algemene aanpak zou kunnen zijn.
Natuurlijk kun je door gebruik te maken van een systematisch opgebouwde tabel soms ook direct het probleem oplossen. Daarnaast is het bekijken van de rekenstappen in een getallenvoorbeeld vaak de aangewezen weg om een formule op te stellen die de probleemsituatie goed beschrijft. Met de algebraïsche technieken is dan het probleem op te lossen.
(Over het opstellen van een formule gaat het in de volgende paragraaf 8.5)

### 8.4.2 Oefeningen

**Oefening 8.4.2.a De duurloop**

Een hardloper vertrekt voor een duurloop van 10 kilometer ’s morgens om 9 uur. Hij houdt een constante snelheid van 120 meter per minuut aan. Een andere hardloper vertrekt van hetzelfde startpunt voor dezelfde duurloop om 9.15 uur. Hij houdt een constante snelheid van 200 meter per minuut aan.
Op welke afstand van het startpunt haalt de tweede hardloper de eerste in?

*Toelichting*
Een eenvoudig inhaalprobleem waarin de leerlingen de keuze hebben tussen het opstellen van twee lineaire formules en daarmee rekenen, het maken van een tabel of het geven van een directe redenering met verschillen in termen van de context. Uit een (oud) onderzoek (Van Streun, 1989) kwam naar voren dat leerlingen aan het einde van 3hv veelal getallenvoorbeelden gebruikten en aan het einde van 4 vwo op formules over waren gegaan.

*Parate vaardigheid*
Het kunnen opstellen van een lineaire formule, bijvoorbeeld door twee getallenvoorbeelden te nemen, is noodzakelijk gereedschap bij één van de oplossingsmethoden.

*Werkwijze*
Even in de les aan laten werken, daarna nabeschouwen over ieders aanpak.

*Reflectie*
Samen expliciteren wat de mogelijke methoden zijn. Attenderen op de analogie tussen de redenering met verschillen en de aanpak van de vergelijking. Dus:
Om 9.15 is de eerste 1800 meter onderweg. Het verschil in snelheden is 80 meter per minuut.
Na 1800:80 = 22,5 minuten ligt het inhaalpunt.
De gevraagde afstand is 200 x 22,5 = 4500 meter.
En:
$200t = 120t + 1800$ met $t = 0$ op het tijdstip 9.15 uur.
$80t = 1800$
$t = \frac{1800}{80} = 22{,}5$

De gevraagde afstand is 220x22,5 = 120x22,5 + 1800 = 4500 meter.

*Plaats in de leerjaren*
In 2/3/4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Afsluitend in 2/3 havo-vwo of start van een hoofdstuk in 4 havo-vwo.

### Oefening 8.4.2.b Gansdichtheid

CSE wiskunde B havo 2014 vraag 4

Onderzoek de grenswaarde van de gansdichtheid $G$ op de lange duur.

$$G(t) = \frac{80t - 1184}{4t - 61} \qquad \text{voor } t \geq 16$$

*Toelichting*
Eigenlijk zou dit geen probleem mogen zijn, maar deze vraag 4 uit het CSE 2014 wiskunde B havo werd slecht gemaakt, de helft van de leerlingen scoorde 0 punten. Alle leerlingen van havo en vwo, in welk wiskundevak ook, moeten toch snel op het idee komen om getallenvoorbeelden door te rekenen en daarmee verder te argumenteren.

*Parate vaardigheid*
Getallen substitueren in een formule.

*Werkwijze*
Bij deze formule en veel andere even aan de klas vragen hoe je het gedrag van zo'n grootheid kunt onderzoeken ook zonder dat een grafiek is gegeven, wat in die examenopgave overigens wel het geval was.

*Reflectie*
Het is wel een goed idee om bijvoorbeeld op een poster of digitaal een wilde partij formules op te slaan en nu en dan te vragen wat je zoal over die grootheid of de grafiek te weten kunt komen, zonder veel rekenwerk.

*Plaats in de leerjaren*
In 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Rondom hoofdstukken met formules of in gemengde opgaven.

### Oefening 8.4.2.c Aantal gebruikers Facebook

CSE wiskunde A havo pilot 2015 vraag 16

Het aantal gebruikers $A$ van Facebook kan worden beschreven door de volgende formule $A = \dfrac{4500}{5 + 310 \cdot 0{,}926^t}$ met $A$ het aantal actieve gebruikers in miljoenen en $t$ de tijd in maanden, met $t = 0$ op 1 december 2005.

Beredeneer dat het aantal gebruikers blijft stijgen en een grenswaarde zal benaderen. Bepaal die grenswaarde.

*Toelichting*
Een leerling die deze heuristische methode in het repertoire heeft, redeneert als volgt.
De tijd $t$ wordt groot, zeg 1000, even invullen suggereert dat de noemer steeds kleiner wordt en naar 5 gaat, terwijl *A* steeds groter wordt en naar 900 gaat. Nog even controleren met de waarde $t = 10000$, ja het klopt.
*Parate vaardigheid*
Getallen substitueren in een formule.

*Werkwijze*
Bij deze formule en veel andere even aan de klas vragen hoe je het gedrag van zo'n grootheid kunt onderzoeken ook zonder dat een grafiek is gegeven, wat in die examenopgave overigens wel het geval was.

*Reflectie*
Het is wel een goed idee om bijvoorbeeld op een poster of digitaal een wilde partij formules op te slaan en nu en dan te vragen wat je zoal over die grootheid of de grafiek te weten kunt komen, zonder veel rekenwerk.

*Plaats in de leerjaren*
In 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Rondom hoofdstukken met formules of in gemengde opgaven.

**Oefening 8.4.2.d Lengte snoek**
Variant CSE wiskunde A havo 2015 pilot vraag 18

Een vuistregel waarmee de lengte van een mannetjessnoek kan worden berekend is $L = 87{,}0 - 87{,}0 \cdot e^{-0{,}188(t+0{,}357)}$, waarbij $L$ de lengte in cm is $t$ de leeftijd in jaren.
Beredeneer wat de grenswaarde is voor de lengte van een snoek.

*Toelichting*
In de examenvraag was de grenswaarde gegeven. Ook hier werkt het onderzoeken met behulp van getallenvoorbeelden prima.
Nu is $L$ gemakkelijk te meten en wil je voor onderzoek wellicht weten hoe oud de vis daar wordt. Dan is het relevant om $t$ uit te drukken in $L$ en wordt het een heel andere vraag, die een algebraïsche vaardigheid toetst.

*Parate vaardigheid*
Getallen substitueren in een formule.

*Werkwijze*
Bij deze formule en veel andere even aan de klas vragen hoe je het gedrag van zo'n grootheid kunt onderzoeken ook zonder dat een grafiek is gegeven.

*Reflectie*
Het is wel een goed idee om bijvoorbeeld op een poster of digitaal een wilde partij formules op te slaan en nu en dan te vragen wat je zoal over die grootheid of de grafiek te weten kunt komen, zonder veel rekenwerk.

*Plaats in de leerjaren*
In 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Rondom hoofdstukken met formules of in gemengde opgaven.

## 8.5 Formules maken helpt vaak

### 8.5.1 Toelichting: formules maken helpt vaak

Tot en met het eindexamen hebben leerlingen moeite met het maken van formules bij een gegeven wiskundige of toegepaste situatie. Een ander deel van de leerlingen heeft ontdekt dat het wel heel snel werkt en handig is om een probleem met een formule en wat algebra op te lossen (zie bijvoorbeeld Van Streun 1989 of Roorda 2012). In de gangbare schoolboeken ontbreekt het aan het systematisch onderwijzen van het opstellen van formules of wiskundige modellen bij wiskundige of toegepaste situaties. Natuurlijk moet een klein deel parate vaardigheid zijn, met name het opstellen van lineaire en exponentiële formules, maar voor een veel groter deel wordt een zekere probleemaanpak vereist.

### 8.5.2 Oefeningen: formules maken helpt vaak

**Oefening 8.5.2.a Inhalen**
Variant CSE wiskunde A havo 2015 pilot vraag 11

Een motorrijder rijdt met een constante snelheid van 110 km/u en passeert om 6:00 uur het hectometerpaaltje 0,4 op de N227. Twee minuten eerder passeert een auto hetzelfde hectometerpaaltje. De plaats $P_{auto}$ van die auto op deze weg is te beschrijven door de formule
$P_{auto} = 1{,}33 \cdot (t+2) + 0{,}4$ met de tijd $t$ in minuten en $t = 0$ om 6:00 uur.
Op welk tijdstip haalt de motorrijder de auto in?

*Toelichting*
In alle wiskundevakken hoort het opstellen van een lineaire formule tot de parate vaardigheden, ongeacht of er twee getallenparen, een grafiek of een context is gegeven. Vervolgens kunnen met die formules problemen worden opgelost.
De bovenstaande variant op de examenvraag 11 nodigt uit tot het opstellen van de formule voor de plaats van de motorrijder, waarna het oplossen van de vergelijking tot het gevraagde antwoord kan leiden. (In de examenvraag waren beide formules wel gegeven.)
Een analoge vraag in de woorden van de context zonder gegeven formules zal door veel leerlingen met een tabel of een redenering worden beantwoord. (Zie oefening 8.3.2.a.) Als beide vergelijkingen zijn gegeven, ligt het oplossen met een vergelijking wel meer voor de hand. De *betekenis* van dit type lineaire formules (bijvoorbeeld met vaste en variabele kosten of tijd-afstand) in een context zal toch tot het repertoire van leerlingen moeten gaan behoren. Dan is deze oefening ook geen denkopgave meer.

*Parate vaardigheid*
Lineaire problemen oplossen met tabellen of formules. Lineaire formules maken.

*Werkwijze*
Leergesprek, als blijkt dat de leerlingen de formules niet kunnen interpreteren.

*Reflectie*
Het is wel een goed idee om bijvoorbeeld op een poster of digitaal een wilde partij formules op te slaan en nu en dan te vragen wat je zoal over die grootheid of de grafiek te weten kunt komen, zonder veel rekenwerk.

*Plaats in de leerjaren*
In 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Rondom hoofdstukken met formules of in gemengde opgaven.

**Oefening 8.5.2.b Verschilformule**

CSE wiskunde A havo 2015 pilot vraag 12

Een motorrijder rijdt met een constante snelheid van 110 km/u en passeert om 6:00 uur het hectometerpaaltje 0,4 op de N227.
Er geldt bij benadering $P_{motor} = 1{,}83 \cdot t + 0{,}4$.
Hierin is $P_{motor}$ de plaats van de motorrijder op de N227 in km en $t$ de tijd in minuten, met $t = 0$ om 06:00 uur precies.
Twee minuten eerder passeert een auto hetzelfde hectometerpaaltje. De plaats $P$ van die auto op deze weg is te beschrijven door de formule $P_{auto} = 1{,}33 \cdot (t+2) + 0{,}4$ met de tijd $t$ in minuten en $t = 0$ om 06:00 uur precies.
Neem aan dat de motorrijder en de automobilist nog een tijd met dezelfde constante snelheden verder rijden. Nadat de motorrijder de automobilist is gepasseerd, geldt voor de afstand $D$ in kilometer tussen de motorrijder en de automobilist een formule van de vorm $D = a \cdot t + b$, met $t$ de tijd in minuten en $t = 0$ om 06:00 uur precies.
Geef de herleiding van deze formule voor D uit de twee gegeven formules.

*Toelichting*
Deze laatste examenvraag uit dezelfde examencontext als hiervoor is heel slecht gemaakt, met een p'-waarde 5. Blijkbaar wist geen enkele kandidaat hoe dit probleem moest worden aangepakt. De conclusie is dat deze leerlingen zich geen voorstelling kunnen maken van wat zo'n formule betekent in termen van deze context. Niet de beheersing van de algebra in het herleiden van de formule $D = P_{motor} - P_{auto}$ maar het begrijpen van de betekenis van (de variabelen in) een formule. Toch wel een heel belangrijk signaal in de richting van het onderwijs. Vanaf leerjaar 1 zullen deze leerlingen toch onderwijs in het interpreteren van formules gehad moeten hebben.

*Parate vaardigheid*
Begrijpen wat formules voorstellen.

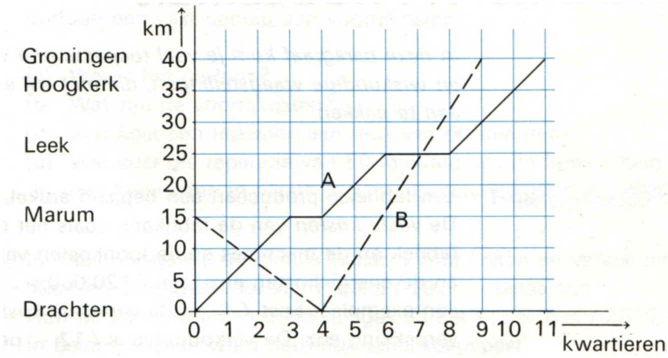
*Werkwijze*
In duo's laten werken aan veel oefenopgaven met een grote variatie aan contexten, waarin de formules moeten worden geïnterpreteerd.

*Reflectie*
Het is wel een goed idee om bijvoorbeeld op een poster of digitaal een wilde partij formules in contexten op te slaan met de *betekenis* van de variabelen en de parameters.

*Plaats in de leerjaren*
In 3/4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Rondom hoofdstukken met formules of in gemengde opgaven.

**Oefening 8.5.2.c Twee fietstochtjes**




Bereken de tijdstippen en plaatsen waarop de fietser B de fietser A tegen komt en inhaalt.

*Toelichting*
Bij gegeven lineaire grafieken moeten de lineaire formules worden gemaakt om de vraag te kunnen beantwoorden. Wellicht zou dit een parate vaardigheid moeten zijn. Dit is niet echt een probleem, maar wel vaak voor leerlingen…

*Parate vaardigheid*
Het opstellen van een lineaire formule bij twee gegeven punten van de grafiek.

*Werkwijze*
Individueel of in tweetallen laten uitwerken en inleveren om te kunnen bekijken in hoeverre deze vaardigheid wordt beheerst en wat de blokkades zijn.

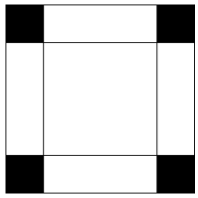
*Reflectie*
Afhankelijk van de opbrengst verschillende aspecten belichten, zoals de noodzakelijke parate vaardigheid, de informatie die je uit een grafiek kunt halen, het interpreteren van de parameters in dit type formule e.d.

*Plaats in de leerjaren*
In 2/3 havo-vwo, begin wiskunde A 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Afsluiting lineaire formules, start formules wiskunde A 4hv.

## 8.5.3 Opdrachten: formules maken helpt vaak

**Opdracht 8.5.3.a Bakje vouwen**



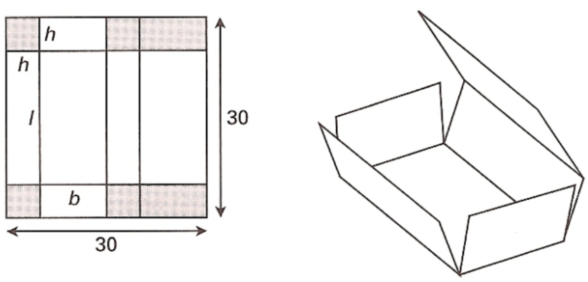
Van een vierkant stuk karton gaan we een van boven open bakje vouwen door uit de hoeken vierkantjes te knippen, zoals in de figuur is aangegeven.

a. Maakt het voor de inhoud van het bakje wat uit hoe groot die vierkantjes zijn? Doe het maar eens.
b. Om te kunnen berekenen bij welke verhoudingen het volume van het bakje maximaal is maken we eerst een formule. Neem voor de lengten van de zijden van het stuk karton $p$ cm en voor die van de vierkantjes $x$ cm.
Wat is de formule voor het volume $V$ uitgedrukt in $p$ en $x$?
Bij welke waarde van $x$ uitgedrukt in $p$ is het volume $V$ maximaal?

*Hint 1*
*Lukt het niet? Schrijf dan eerst een getallenvoorbeeld uit!*
Neem bijvoorbeeld $p=16$ en $x=3$ cm. De hoogte van het bakje is dan $3$ cm en de lengte van de zijden van het grondvlak wordt $(16-2\text{x}3)$ cm.
Dat geeft $V=3\cdot(16-2\text{x}3)\cdot(16-2\text{x}3)$ cm$^3$. (Let op: niet uitrekenen maar uitschrijven.)

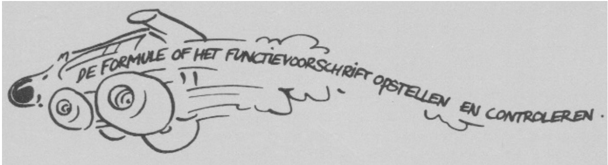
*Hint 2*
Als je de formule voor $V$ in het concrete voorbeeld hebt gevonden, kun je met de GR of met differentiëren vinden bij welk $x$-waarde het volume maximaal is. Met differentiëren kun je ook de oplossing voor het algemene geval vinden. Je kunt ook een tabel maken door voor $p$ meer getallenvoorbeelden te berekenen en daaruit een redelijke conclusie te trekken.

c. Een van boven open rechthoekige tank moet worden geconstrueerd met een buitenoppervlakte van A m$^2$ en een zo groot mogelijke inhoud. Bij welke hoogte, uitgedrukt in de lengte van de zijde van het grondvlak is de inhoud maximaal?
d. Bedenk zelf de vraag bij de volgende schets en bereken het antwoord.




e. Maak een verslag van de manier waarop je deze vragen hebt aangepakt. Vermeld je blokkades ('ik zit vast') en wat je hebt geleerd over de aanpak.

*Toelichting*




Aan de hand van een concrete situatie laten ervaren hoe een formule kan worden gemaakt door een getallenvoorbeeld te generaliseren. Het gaat hier om de eerste fase van het oplossen van een probleem, namelijk het maken van een bijpassende formule waarmee met bijvoorbeeld differentiëren of de GR het eigenlijke probleem kan worden opgelost.

*Parate vaardigheid*
Voor het opstellen van de formule is geen specifieke parate vaardigheid nodig, maar wel een door de jaren heen ontwikkeld begrip van variabelen en formules.

*Werkwijze*
In groepjes laten uitwerken en inleveren, mét een reflectie op de eigen aanpak. Wel even melden dat oplossingen gevonden op internet een onvoldoende opleveren, omdat het niet gaat om het antwoord maar om de aanpak!

*Reflectie*
Ervaring leert dat het opstellen van zo’n formule moet en kan worden geleerd. Goed kijken naar het getallenvoorbeeld, die berekening uitschrijven (niet uitrekenen) en dan generaliseren is een goede strategie. In een klas met wiskunde B kan het oplossen met differentiëren worden voorgeschreven.

*Plaats in de leerjaren*
In 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Gemengde problemen.

**Opdracht 8.5.3.b Vouwlijnen**

Vouw een lang rechthoekige strip papier door het rechteruiteinde op het linkeruiteinde te leggen. Nu heb je 1 vouwlijn in de strip papier. Vouw deze strip op dezelfde manier nog eens twee keer. Hoeveel vouwlijnen heb je nu gekregen?
Vouw in gedachten deze strip papier tien keer. Hoeveel vouwlijnen heb je dan?
En na 100 keer vouwen?

*Toelichting*
Van een concrete activiteit het wiskundig patroon laten uitzoeken. In dit voorbeeld gaat het om een exponentieel toenemende verschilrij, die met een formule moet worden beschreven.

*Werkwijze*
Even in tweetallen laten uitzoeken en dan de aanpak inventariseren.

*Reflectie*
Leerlingen kunnen een tabel maken en zo de formule $2^n - 1$ vinden:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| aantal keren vouwen | 1 x | 2 x | 3 x | 4 x | 5 x | 6 x | 7 x |
| aantal vouwlijnen | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 |

Ze kunnen dat ook beredeneren, bijvoorbeeld
1 keer vouwen geeft 1 vouwlijn met 2 lagen papier
2 keer vouwen dan komt er in 2 lagen papier een nieuwe vouwlijn bij, dus plus 2
3 keer vouwen dan komt er in 4 lagen papier een nieuwe vouwlijn bij, dus plus 4
4 keer vouwen dan komt er in 8 lagen papier een nieuwe vouwlijn bij, dus plus 8
Enzovoort: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + …

*Plaats in de leerjaren*
In 3 havo-vwo, begin 4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Start van een hoofdstuk over exponentiële groei (4 havo-vwo) of afsluitend (3 havo-vwo).

## Opdracht 8.5.3.c Conservenblik

De oppervlakte van het stuk blik dat nodig is om een conservenblik te maken hangt af van de hoogte $h$ cm en van de straal $r$ cm van het boven- of ondervlak.
Het is een economisch belang van de fabrikant om bij een gewenst volume $V$ cm$^3$ zo weinig mogelijk blik te gebruiken.

*Welke waarden voor $h$ en $r$ geven de minimale oppervlakte van het stuk blik dat nodig is om een conservenblik met een inhoud van $V$ cm$^3$ te maken?*
*Tot welke eenvoudige relatie tussen $h$ en $r$ leidt dat?*

*Toelichting*
Een simpel te formuleren probleem, dat toch aardig wat denkwerk vereist om het op te lossen.

*Parate vaardigheid*
Voor het opstellen van de formule is geen specifieke parate vaardigheid nodig, maar wel een door de jaren heen ontwikkeld begrip van variabelen en formules. Om vervolgens het probleem op te lossen moet de leerling gebroken functies kunnen differentiëren.

*Werkwijze*
In tweetallen of groepje oplossen en nabespreken over de aanpak.

*Reflectie*
Zit je vast? Schrijf eerst stap voor stap een getallenvoorbeeld uit.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 4/5 havo en wiskunde A en B 4/5 vwo.

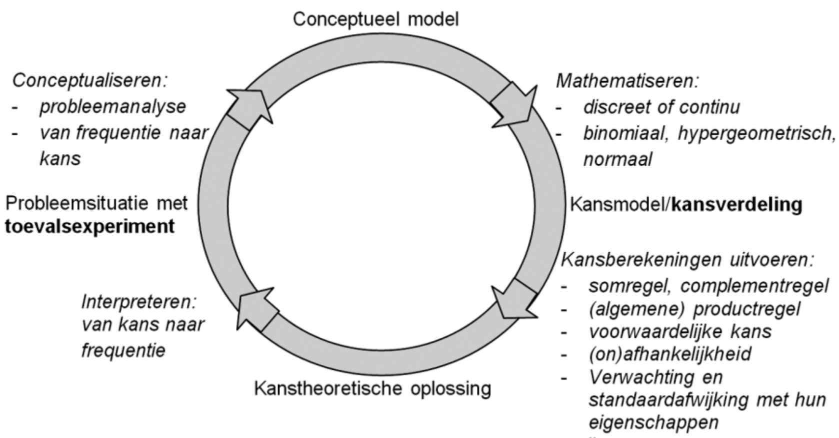
*Relatie met schoolboeken*
Gemengde problemen.

# 9. Modelleren

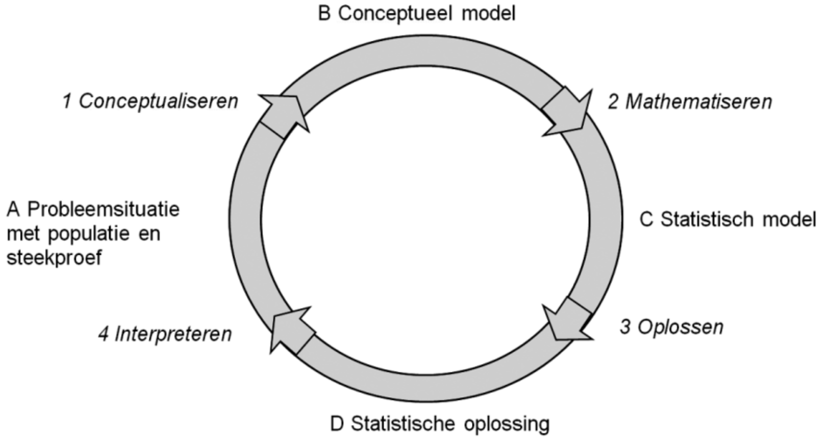
## 9.1 Toelichting

Het *Modelleren* is onder te verdelen in een aantal stappen, zie bijvoorbeeld de syllabi bij de examenprogramma's sinds 2000 en het *Handboek Wiskundedidactiek.* In een probleemsituatie of een set vragen naar aanleiding van een context hoeven natuurlijk niet alle aspecten van modelleren naar voren te komen. Dat is wel het geval bij een praktische opdracht of profielwerkstuk, waarin in een optimale omgeving verschillende wiskundige activiteiten kunnen worden gemobiliseerd. In het kader van deze publicatie is er geen ruimte om veel voorbeelden te geven van uitgewerkte modelleeropdrachten. Zie daarvoor de opdrachten van de wiskunde Alympiade en de wiskunde B-dagen.
Hoewel in de schoolwiskunde bij een wiskundig model vaak wordt gedacht aan een algebraïsch model, valt ook het opstellen van kansmodellen of statistische modellen onder het modelleren. In het *Handboek Wiskundedidactiek* worden de volgende cycli besproken, achtereenvolgens voor de kansrekening, de statistiek en het modelleren.

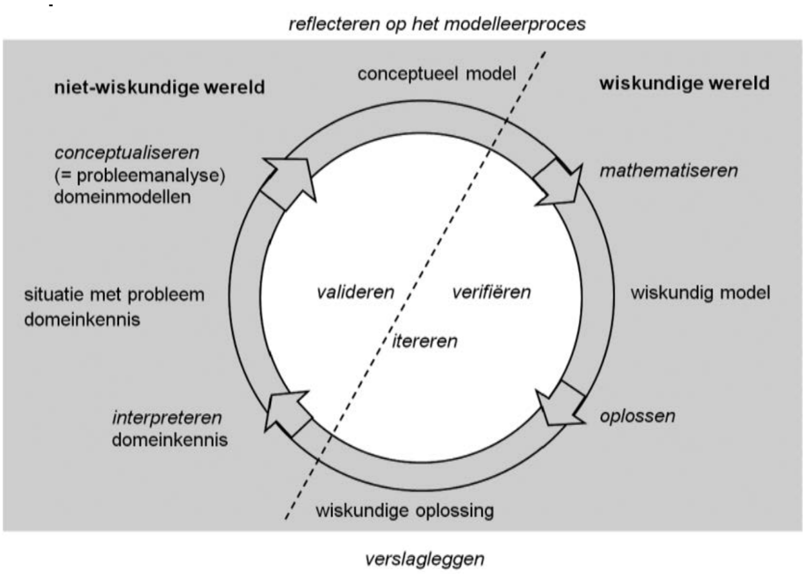
Kansrekening



Statistiek




Modelleren




In de publicatie van *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* (Van Streun, 2014) worden de volgende fasen onderscheiden:

* Waar komt het model vandaan? Zijn er data of andere gegevens om aan het model betekenis te geven?
* Een wiskundig model opstellen.
* De relevantie van het model testen.
* Het model aanpassen.
* Modellen vergelijken.
* Resultaten beoordelen in het licht van de context.

## 9.2 Oefeningen

**Oefening 9.2.a Lichaamsoppervlak**

Variant CSE wiskunde A vwo 2015 vraag 16

Voor de oppervlakte van het lichaam van kinderen worden twee wiskundige modellen gebruikt.

$S_{Mosteller} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M}$ en $S_{Haycock} = 0{,}024265 \cdot L^{0{,}3964} \cdot M^{0{,}5378}$.

$S$ is de lichaamsoppervlakte in m $^2$, $L$ de lichaamslengte in cm en $M$ het lichaamsgewicht in kg.

In het ene model weegt het gewicht zwaarder en in het andere model de lengte.

Laat zien hoe dat in elkaar zit.

*Toelichting*

Modellen vergelijken is een aspect van modelleren. de impliciete keuzes die verborgen zitten in een model worden zichtbaar.

*Parate vaardigheid*

Het rekenen met gebroken exponenten.

*Werkwijze*

Individueel.

*Reflectie*

Afhankelijk van de resultaten.

*Plaats in de leerjaren*

Wiskunde B havo, wiskunde A en B vwo.

*Relatie met schoolboeken*

Toepassing gebroken exponenten.

**Oefening 9.2.b Tornado's**

Variant CSE wiskunde B havo 2013 vragen 1-3

Om de zwaarte van tornado's te kunnen meten worden twee wiskundige modellen gebruikt:

de Fujita-schaal: $F = \left[\frac{v}{6{,}3}\right]^{\frac{2}{3}} - 2$ en de Torro-schaal ( $T$ ): $v = 2{,}39 \cdot (T+4)^{\frac{3}{2}}$

In deze formules is $v$ de maximale windsnelheid in m/s.

Vooral in Europa, waar niet vaak heel zware tornado's voorkomen, was er onvrede met de oudste schaal, die van Fujita. Men wilde wat beter de lichtere tornado's onderling kunnen onderscheiden en aan hun intensiteit een waarde toekennen.

*Laat zien dat de Torro-schaal aan die Europese wens voldoet.*

*Toelichting*
Het gaat in deze vraag alleen om het vergelijken van twee modellen.
Zie voor het doorlopen van een volledige modelleercyclus bij deze context de publicatie *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* (SLO 2014). Het vergelijken kan door tabellen te maken, maar ook door eerst de formule te maken die $F$ in $T$ uitdrukt.

*Parate vaardigheid*
Het rekenen met gebroken exponenten.

*Werkwijze*
In groepjes.

*Reflectie*
De verschillende oplossingsmethoden vergelijken en wat achtergrondinformatie verschaffen.
*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B havo, wiskunde A en B vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Toepassing gebroken exponenten.

**Oefening 9.2.c Zuurstofgehalte**
CSE wiskunde A vwo 1984

Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte tijdelijk af. De technische staf werkt voor het verloop van het zuurstofgehalte met het volgende wiskundige model:

$$Z = 200\left(1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ voor } t \geq 0$$

Hierin is $t$ de tijd in minuten, gerekend vanaf het moment dat de storing begon, en $Z$ is het aantal $cm^3$ zuurstof per liter lucht op het tijdstip $t$.
Op het tijdstip $t = 0$ is het zuurstofniveau normaal.

a. Leg op basis van het model uit dat na verloop van tijd het zuurstofgehalte weer het normale niveau bereikt.
b. Toon aan dat, volgens het model, het zuurstofgehalte op het moment $t = 0$ begint te dalen.
c. Bereken in het model het tijdstip waarop het zuurstofgehalte minimaal is.
d. Iemand beweert dat het zuurstofgehalte 1 uur na het begin van de storing op 90% van het normale niveau is. Onderzoek of dat klopt met het model.
e. De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau nog net toelaatbaar. Hoeveel minuten is dat volgens het model het geval geweest?

*Toelichting*
In de centrale examens is na invoering van het vak wiskunde A de nodige aandacht besteed aan het modelleren, niet alleen in de analyse maar juist ook in allerlei ander onderwerpen die nu niet meer in het programma zijn opgenomen. Denk aan grafen en matrices en lineair programmeren. Deze opgave is een voorbeeld dat niet alleen een beroep doet op de parate vaardigheid van het differentiëren, maar ook op het interpreteren van formules in het licht van een context.

*Parate vaardigheid*
Het differentiëren van gebroken functies.

*Werkwijze*
Individueel of tweetallen.

*Reflectie*
Afhankelijk van de ervaren moeilijkheden.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B havo, wiskunde A en B vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Gemengde problemen, toepassing differentiëren.

## Oefening 9.2.d Economisch modelleren

Variant CSE Economische Wetenschappen 1, vwo 1978

Economen gebruiken verschillende wiskundige modellen om tot goede voorspellingen of beslissingen te komen. De aannames bij die modellen worden op economische gronden genomen. Zoals in het volgende voorbeeld.

Een fabrikant heeft de alleenverkoop van een bepaalde machine, die hij voor een vaste prijs moet verkopen. Jaarlijks zet hij 8000 machines af.
Voor de productie van de machines heeft hij kapitaal $K$ nodig en menselijke arbeid $A$. Hij kan kiezen voor een sterk geautomatiseerd productieproces ($K$ groot en $A$ klein), een heel ambachtelijk productieproces ($K$ klein en $A$ groot) of iets daartussen.
Het verband tussen $A$ en $K$ is: $8 = \sqrt{A \cdot K}$ met $A, K > 0$ en 8 het aantal te leveren machines in duizendtallen, $A$ het aantal tientallen arbeidskrachten en $K$ in miljoenen euro's.
De totale kostenfunctie is: $C = 1 \cdot A + 4 \cdot K$ met $A, K > 0$ en $C$ de totale kosten in miljoenen euro's.

a. Reken wat getallenvoorbeelden door en maak wat plaatjes om een idee te krijgen hoe de variabelen van elkaar afhangen.
b. Bereken voor welke waarden van $A$ en $K$ de fabrikant de totale kosten zo klein mogelijk kan houden.

*Toelichting*
In economische modellen is het wiskundig model afgeleid uit de modelveronderstellingen. Hier gaat het over een monopolist.

*Parate vaardigheid*
Het differentiëren van gebroken functies.

*Werkwijze*
Individueel of tweetallen.

*Reflectie*
Afhankelijk van de ervaren moeilijkheden.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B havo, wiskunde A en B vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Gemengde problemen, toepassing differentiëren.

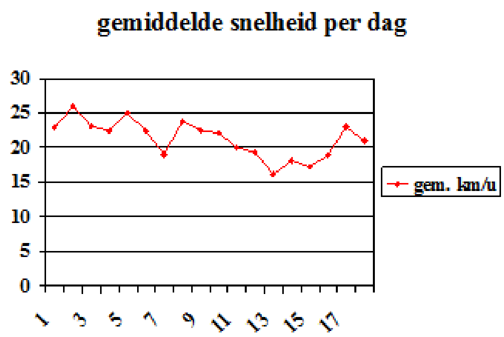
## 9.3 Opdrachten

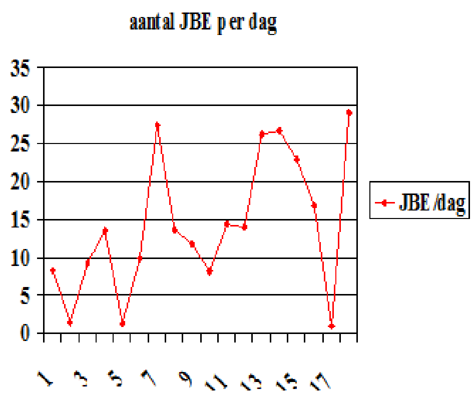
**Opdracht 9.3.a De zwaarte van een col**

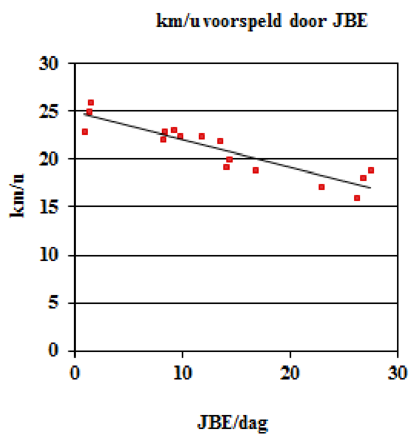
Bron: Euclides 2003, nr. 4, pagina's 163-166.

In de wielerwereld is het wiskundig model van Jan Bijma om de zwaarte van een col (een berg waar je op en af fietst) te meten heel bekend. Hij heeft dat model voor het eerst ontwikkeld aan de hand van de Tour de France. Later heeft hij een wielertocht voor amateurs ontworpen, de *Honderd Cols Tocht*. Op internet vind je prachtige verhalen van deelnemers. In deze opdracht volgen we stap voor stap het modelleren, zoals Jan Bijma die eens in het blad *Fiets* heeft beschreven.

a. Bedenk en schrijf op wat in de zwaarte een rol speelt als je deze zomer een berg of heuvel op wilt fietsen.
b. Sommige factoren die van invloed zijn op de zwaarte van een fietstocht zijn variabel (zoals wind of temperatuur). Die kun je niet meewegen in een wiskundig model, waarin je de zwaarte van cols onderling wilt vergelijken.
Wat houd je dan wel over?
c. Hoe komen we nu aan een realistisch wiskundig model?
Maak zelf een formule voor de zwaarte van een col.
d. Pas jullie formule eens toe op de volgende drie cols en bekijk of de uitkomsten redelijk kloppen met de verwachting.
Mont Ventoux (30 km weg en 1915 m hoog), de Alpe d'Huez (34 km weg en 1780 m hoog), de Vaalserberg (1500 m weg en 110 m hoog).
e. De zwaarte volgens de formule van Jan Bijma wordt JBE (Jan Bijma Eenheden) genoemd. Een wiskundig model moet worden getoetst aan de werkelijkheid, de echte data. Jarich Renema heeft de al genoemde *Honderd Cols Tocht* over 4000 km gemaakt. Hij fietste ongeveer 10 uur per dag en heeft al zijn gegevens opgeschreven in een logboek.
In de grafieken op de volgende pagina bladzijde kun je die gegevens terugvinden. In de eerste grafiek vind je zijn gemiddelde snelheid per dag en in de tweede grafiek is de zwaarte van alle cols per dag weergegeven. In de derde grafiek zijn de twee eerste grafieken gecombineerd en is de voorspelde zwaarte in JBE/dag langs de horizontale as afgezet en de werkelijke gemiddelde snelheden van Jarich Renema langs de verticale as.
    - Onderzoek nu of het wiskundig model van Jan Bijma redelijk overeenkomt met de werkelijkheid.
    - Geef argumenten op grond van je onderzoek.




*Hint, eventueel weg te geven.*

f. De steilheid (hoogte gedeeld door weglengte) zal een rol spelen. Je kunt aannemen dat een twee maal zo grote steilheid de col ook tweemaal zo zwaar maakt.
En als het hoogteverschil drie maal zo groot is dan zal die col ook wel drie maal zo zwaar zijn.

*Toelichting*
Leerlingen kunnen ervaren wat er komt kijken bij het opstellen en toetsen van een wiskundig model. De index van Jan Bijma is:

$i = h \cdot \dfrac{h}{10000 \cdot W}$ met die 10000 om de getallen wat mooier te maken.

Bij de laatste vraag moeten leerlingen bedenken dat ze een grafiek kunnen tekenen en een trendlijn schatten.

*Parate vaardigheid*
Eenvoudige formules maken en grafieken interpreteren.

*Werkwijze*
In groepjes laten uitwerken.

*Reflectie*
Posters laten maken en presenteren.

*Plaats in de leerjaren*
In 3/4/5 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Eventueel als praktische opdracht.

**Opdracht 9.3.b Een stuiterend balletje**
Bron: Euclides 2003, nr. 4, pagina’s 128-129.

We gaan experimenteren met stuiterballetjes, bijvoorbeeld de bekende rubberen of plastic balletjes, maar ook met een tafeltennisballetje, een tennisbal enzovoort. Als je zo’n balletje bijvoorbeeld van twee meter hoogte laat vallen dan neemt de maximale hoogte af totdat het stuiteren voorbij is. Er zijn natuurlijk verschillen tussen de balletjes, de ondergrond speelt een rol, enzovoort. We onderzoeken of we van dat stuiteren een wiskundig model kunnen maken en vragen ons van alles af. Bijvoorbeeld:

- Wat is de hoogte na een keer stuiteren?
- Hoe vaak stuitert het balletje?
- Wat is de stuitertijd?
- Hoeveel meter legt het balletje in totaal af?

Eerst moeten we natuurlijk experimentele gegevens verzamelen door de hoogtes en de stuitertijd te meten. Dat kan met de hand, maar ook met apparatuur die allicht op school aanwezig is. En soms levert die apparatuur direct de tabellen en grafieken die we nodig hebben.

a. Maak een plan voor de metingen aan verschillende balletjes, voer die experimenten uit en verzamel de gegevens in tabellen.
b. Probeer nu een aantal van de genoemde vragen te beantwoorden, bedenk er nog een paar bij en vergelijk de uitkomsten van je wiskundig model met de experimentele gegevens.

Camiel Janssen kwam in zijn vwo-profielwerkstuk tot de conclusie dat de hoogte exponentieel afnam met een stuiterfactor $k$. Na $n$ keer stuiteren vanaf de hoogte van 2 meter is de maximale hoogte dan $H(n) = 2 \cdot k^n$. Hij leidde met behulp van een aantal natuurkundige wetten de volgende wiskundige formule af voor de totale stuitertijd $t_{totaal} = \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

waarin $k$ de stuiterfactor is, $h_0$ de beginhoogte in meters, $g$ de versnelling van de zwaartekracht 9,8 m/sec$^2$ en $t$ de tijd in seconden.
De berekende totale stuitertijd op basis van het wiskundig model vergeleek hij met de gemeten totale stuitertijd, bijvoorbeeld voor een golfbal.

| beginhoogte 1 meter | Stuiterfactor | berekende totale stuitertijd | gemeten totale stuitertijd |
|---|---|---|---|
| golfbal | 0,77 | 6,9 | 7,0 |

c. Vergelijk jouw gemeten totale stuitertijd met de door jou berekende waarde volgens het model van Camiel Janssen. Bespreek de resultaten in een verslag.

*Toelichting*
Er is een wereld te winnen door in het wiskundeonderwijs experimenten en modelleren te koppelen. Samenwerking met collega's van andere vakken ligt voor het grijpen.
Voor B-leerlingen kunnen aanvullende vragen worden gesteld. Bijvoorbeeld naar een formule voor de totaal afgelegde afstand $\sum 2 \cdot k^n$ . Met zijn natuurkundige kennis van de wetten over botsingsenergie en behoud van energie leidde Camiel de formule voor de totale stuitertijd af.

*Parate vaardigheid*
Kennis van exponentiële groei, met de formules.

*Werkwijze*
In groepjes voor een praktische opdracht of een profielwerkstuk met natuurkunde.

*Reflectie*
Laten presenteren en discussiëren over het proces en de producten.

*Plaats in de leerjaren*
In 4/5 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Exponentiële groei is al bestudeerd.

### Opdracht 9.3.c Zelf een statistisch onderzoek uitvoeren

Je gereedschapskist voor het zelf opzetten en uitvoeren van een statistisch onderzoek is in de afgelopen jaren steeds meer gevuld. Houd daarbij rekening met het volgende stappenschema.

Je kunt de volgende stappen onderscheiden:

- probleemstelling
- vraag formuleren
- variabelen benoemen
- het verzamelen van data:
  - welke populatie ondervragen?
  - welke data verzamelen?
  - hoe data verzamelen?
  - hoeveel data verzamelen?
  - welk meetbaarheid?
  - hoe data weergeven?
- verwachtingen uitspreken
- Analyse van de data:
  - datatabel beoordelen;
  - diagrammen en grafieken, visualisaties beoordelen;
  - beschrijven van waarneming (patronen, regelmaat, …);
  - relaties tussen variabelen beschrijven;
  - kwantificatie middels geschikte centrummaten en spreidingsmaten;
  - oorzaken van fouten;
    - nauwkeurigheid van metingen;
    - representativiteit steekproef
    - systematische fout gemaakt
    - te beperkte vraagstelling
    - te grote non-response (bij enquêtes)
  - conclusies trekken (ook verwachtingen bijstellen)
- voorstellen voor nader onderzoek.

*Toelichting*
Voor leerlingen met wiskunde A is de afsluiting van het statistiekprogramma door het uitvoeren in groepjes van een eigen statistisch onderzoek passend, zo niet noodzakelijk. Hierboven staat een stappenschema ontleend aan het lesmateriaal van cTWO voor wiskunde A havo. Voor wiskunde A vwo kunnen nog andere stappen (eisen) worden toegevoegd.

### Opdracht 9.3.d Zieke zeehonden

In 2010 studeerde de biologe Anne H. af op een onderzoek onder de zieke zeehonden die in de zeehondenopvang van Pietersburen werden verzorgd. Ze was op zoek naar een onderliggende oorzaak van hun ziekte. Zij vertelde in de Universiteitskrant over de resultaten van haar onderzoek, dat zich toespitste op de vraag of in het DNA van de onderzochte zeehonden een verklaring voor het aantal zieken was te vinden.
Nu is het DNA in de zeehondenpopulatie rondom Alaska al eens onderzocht en Anne H. vergeleek dat met haar proefzeehonden in Pietersburen. Zij trok de conclusie dat in haar zeehonden de variatie in de DNA veel minder groot was, waardoor ze meer ziektegevoelig waren. Haar aanbeveling was dat uit een gezonde zeehondenpopulatie elders in de wereld

zeehonden in de Waddenzee zouden moeten worden geïmporteerd om de variatie van de DNA in de zeehondenpopulatie van de Waddenzee te vergroten.

*Schrijf een verhaaltje voor de schoolkrant waarin je dit onderzoek uitlegt.*
*Leg in ieder geval uit hoe statistici uit een steekproef conclusies trekken over een populatie.*

*Toelichting*
Als je er op gaat letten, vind je iedere week in de pers en andere media wel uitspraken over een populatie (hier alle zeehonden in de Waddenzee) op basis van een steekproef (hier de al zieke zeehonden in Pietersburen). Wellicht is het een goede opdracht om de leerlingen aansluitend een paar weken lang op de media dit type onderzoek te laten verzamelen en die in een brainstormsessie op dit aspect door te lichten.

*Parate vaardigheid*
Een eerste kennismaking met de steekproef-populatie redeneringen.

*Werkwijze*
In duo's of groepjes.

*Reflectie*
Wat kun je wel zeggen na dit onderzoek en wat niet?

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde A havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Na een eerste paragraaf over steekproef en populatie.

### Opdracht 9.3.e Trends met oorzaak en gevolg?

Een sterke samenhang in het verband tussen twee verschijnselen wil nog niet zeggen dat het ene verschijnsel verandert *als gevolg* van het andere verschijnsel.

∗ *Bedenk bij de volgende trends een mogelijke andere oorzaak dan de oorzaak die de trend suggereert.*

a. Bij hogere wiskundecijfers stijgen de cijfers voor natuurkunde.
b. Bij hogere salarissen van leraren (in de Verenigde Staten) worden de studieresultaten van de leerlingen beter.
c. Een onderzoek van een huisarts in 1987 onder zijn patiënten wees uit dat het aantal stofdeeltjes in de longen van volièrehouders de kans op longkanker sterk vergrootte.
d. Voordat er een vaccin tegen kinderverlamming was ontwikkeld bleek in de Verenigde Staten dat het aantal poliogevallen sterk toenam in de periode dat er veel frisdranken werden verkocht.
e. Naarmate het inkomen van mannen in Nederland toeneemt, stijgt het percentage mannen met te hoge bloeddruk.

∗ *Zoek zelf in de media naar een bericht over een onderzoek waarin door een sterke samenhang tussen twee grootheden een oorzaak-gevolg conclusie wordt getrokken.*

*Toelichting*
Als je er op gaat letten, vind je iedere week in de pers en andere media wel uitspraken over een correlatie/trend waar een oorzaak-gevolg reactie aan wordt gekoppeld.

a. Aanleg? Interesse?
b. Particuliere scholen!
c. In de steekproef bleken die vogelliefhebbers ook verstokte rokers te zijn.
d. De polio brak vooral uit bij warm weer.
e. De leeftijd is de verklarende factor.

*Parate vaardigheid*
Geen.

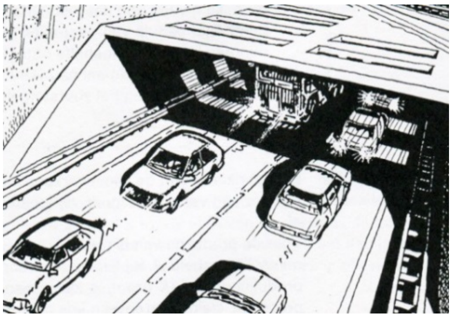
*Werkwijze*
Klassendiscussie. Gevolgd door het zelf zoeken naar dergelijke onderzoeken.

*Reflectie*
Blijf kritisch nadenken?

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde A havo-vwo

*Relatie met schoolboeken*
Op elk moment in lessen over trends of statistiek.

## Opdracht 9.3.f De snelste file



Deze tunnel heeft twee rijbanen, in elke richting één. De vraag is nu welke adviessnelheid in de piekuren is aan te bevelen voor een snelle en veilige doorkomst.
Voor dit probleem gaan we een aantal wiskundige modellen opstellen en uitproberen.

a. Bedenk enkele factoren die van invloed kunnen zijn op de adviessnelheid.

We kijken eerst naar de remweg. In een test bleek de langste remweg $r$ van personenauto's volgens de onderstaande tabel af te hangen van de snelheid $v$ met $r$ in meters en $v$ in meters per seconde.

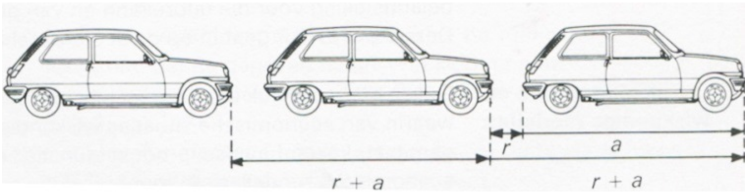
| snelheid *v* in m/s | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| remweg *r* in m | 8 | 32 | 72 | 128 | 200 |

b. Stel op basis van deze tabel een formule op die de remweg $r$ uitdrukt in $v$.

*Een eerste model.*
We beginnen eenvoudig en nemen aan dat alle auto's de maximale remweg volgens de tabel en de gevonden formule aanhouden.

c. Bereken bij de verschillende snelheden hoeveel auto's per minuut de tunnel uitkomen. Wat wordt nu de adviessnelheid? Lijkt dat redelijk?

*Een tweede model.*




Natuurlijk speelt de lengte van de auto's $a$ ook mee. Als een auto de tunnel verlaat, is de volgende auto volgens onze modelaanname een afstand $r+a$ van de uitgang verwijderd.

d. Neem voor $a$ eerst maar 5 meter en ga dan in op de volgende vragen:
- Hoeveel auto's komen er nu per minuut de tunnel uit?
- Bij welke snelheid is dat aantal maximaal?
- Hoeveel gaan er nu per minuut door?
- Wat is dan de onderlinge afstand van de auto's?

*Aanpassingen van het model.*
Het wiskundig model is nog erg ruw. De uitkomst voor de adviessnelheid wellicht niet erg realistisch. Wat kun je nog meer laten meewegen?

e. Denk bijvoorbeeld aan:
- Generaliseer de uitkomsten bij d door de gemiddelde lengte van de auto's op $a$ meter te stellen.
- De reactietijd van elke automobilist, bijvoorbeeld 5 seconden. Reken je die mee, dan zal de onderlinge afstand worden vergroot.
- Waarschijnlijk zal een chauffeur niet de hele remweg voor de onderlinge afstand meerekenen, maar bijvoorbeeld de helft of een kwart. Wat krijg je dan?

Bonus *Op internet circuleren meer ingewikkelde wiskundige modellen voor de snelheden van files. Een werkstuk?*

*Toelichting*
Met deze opdracht kunnen de leerlingen hun kennis van differentiëren toepassen en een indruk krijgen van wat wiskundig modelleren is. Wiskundig ligt deze probleemstelling binnen het bereik van leerlingen die gebroken functies kunnen differentiëren.
Als een auto in de file de tunnel is binnengereden (of uitgereden), zal de volgende auto na een tijd $T$ langs komen met $T=\frac{a+r}{v}$ en $r=\frac{v^2}{8}$ dus $T=\frac{8a+v^2}{8v}$. Het aantal auto's dat passeert is de frequentie $f$ met $f=\frac{8v}{8a+v^2}$.
Het maximum ligt bij $v=4\sqrt{\frac{a}{2}}$ waarbij $f=\sqrt{\frac{2}{a}}$. De adviesafstand bij de vlotste doorstroming zou dan $r=\frac{v^2}{8}=\frac{1}{8}\cdot 16\cdot\frac{1}{2}a=a$ zijn.
Bij $a=5$ is de adviessnelheid dan 22,7 km/u en het advies om dan de wagenlengte als onderlinge afstand aan te houden.
Niet erg realistisch. Een reden om te gaan sleutelen aan de aannames.
Op internet zijn verschillende andere wiskundige modellen terug te vinden.

*Parate vaardigheid*
Kennis van differentiëren van gebroken functies.

*Werkwijze*
In groepjes, eventueel met de bonusvraag voor een praktische opdracht.

*Reflectie*
Laten presenteren en discussiëren over het proces en de producten.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 4/5 havo en wiskunde A en B 4/5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Als de parate vaardigheid wordt beheerst.

# 10. Abstraheren

## 10.1 Toelichting

Om te bevorderen dat leerlingen een breed begrip gaan ontwikkelen is het werken aan een breed startprobleem, zonder de ruis van technieken, de eerste stap in het proces van abstraheren, ofwel het betekenis geven aan de achterliggende wiskundige begrippen (zie hoofdstuk 5). In het vervolg op die start moeten telkens oefeningen en opdrachten voorkomen die dat proces van abstraheren gaande houden. Daar staan voorbeelden van in dit hoofdstuk.

Gerrit Roorda heeft in zijn proefschrift *Ontwikkeling in verandering* (2012) beschreven hoe dat proces van abstraheren van het begrip ‘afgeleide’ bij tien vwo-leerlingen in het vak wiskunde B is voltooid of vastgelopen. Bijvoorbeeld dat het begrip ‘afgeleide’ het onderliggende begrip is in een natuurkundige context (snelheid), in een economische context (marginale kosten), in een grafisch beschreven situatie (helling), in een formule of een tabel.
Sonia Palha heeft in haar proefschrift *Shift-problem lessons* (2013*)* beschreven hoe leerlingen in onderlinge discussie aan de hand van geschikte problemen greep kregen op het begrip integraal.
In de volgende Oefeningen en Opdrachten komen voorbeelden uit hun werk op het gebied van differentiëren en integreren voor.

## 10.2 Oefeningen

**Oefening 10.2.a Lineaire formule**

Voor een reparatie aan huis brengt mijn loodgieter voorrijkosten en uurloon in rekening. Dit jaar kwam hij twee keer langs. De eerste keer was hij 30 minuten bezig en rekende hij € 80, - , de tweede keer kostte het mij € 125, - met een reparatietijd van 60 minuten.

*Geef de lineaire formule* $R = v + u \cdot T$ *met* $R$ *de hoogte van de rekening in euro's,* $v$ *de voorrijkosten,* $u$ *de kosten per uur en* $T$ *de reparatietijd in uren.*

*Toelichting*
Eigenlijk hoort deze vaardigheid paraat te zijn, maar op examens blijkt dat, met name in de wiskunde A groepen, behoorlijk tegen te vallen. Een verklaring kan zijn dat er, ondanks alle training op deelvaardigheden, toch sprake is van een onvolledige abstractie van de kenmerken van alle mogelijke representaties van lineaire verbanden.
Verschillende methoden, zoals twee keer substitueren, een tabel naar $T = 0$ uitbreiden, een vergelijking van de lijn maken, een doel-middelen redenering (30 minuten langer kost € 45, - meer dus per minuut anderhalve euro) kunnen tot de formule leiden.

*Parate vaardigheid*
Op een of andere manier een lineaire formule maken.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

*Reflectie*
Inventariseren en aanvullen van de oplossingsmethoden. Afhankelijk van de resultaten meer van dit soort oefeningen geven, in contexten of alleen met tabellen of grafieken.

*Plaats in de leerjaren*
In 3/4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
In het bijzonder nodig bij wiskunde A havo (en vwo?).

### Oefening 10.2.b Exponentiële formule

Bij het inschenken van een glas bier ontstaat er op het bier een schuimkraag. Na verloop van tijd neemt de hoogte van deze laag af. De volgende tabel geeft de hoogte van de schuimkraag afhankelijk van de tijd in minuten.

| tijd $t$ in minuten | 0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| hoogte $H$ in cm | 2,8 | 2,4 | 2,0 | 1,7 | 1,4 | 1,2 | 1,0 |

*Geef een formule voor de hoogte $H$ in cm met $t$ in minuten.*

*Toelichting*
Eigenlijk hoort deze vaardigheid paraat te zijn, maar op examens blijkt dat, met name in de wiskunde A groepen, behoorlijk tegen te vallen.

*Parate vaardigheid*
Op een of andere manier een exponentiële formule maken.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

*Reflectie*
Inventariseren. Afhankelijk van de resultaten meer van dit soort oefeningen geven, ook zonder dat de startwaarde is gegeven, in contexten of alleen met tabellen of grafieken.

*Plaats in de leerjaren*
In 3/4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
In het bijzonder nodig bij wiskunde A havo (en vwo?).

## Oefening 10.2.c De koelwet van Newton

Variant CSE wiskunde A vwo 2014 pilot vraag 12

| tijdstip $t$ na het uitzetten van de oven | 0 uur | 4 uur | 8 uur |
|---|---|---|---|
| oventemperatuur $T$ (in $^0$C) | 650 | 225 | 90 |
| verschil $V$ tussen omgevingstemperatuur en oventemperatuur (in $^0$C) | 630 | 205 | 70 |

Het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur $V$ neemt bij benadering exponentieel af.
*Stel een formule op voor de oventemperatuur $T$ in $^0$C uitgedrukt in $t$, het aantal uren dat is verlopen na het uitzetten van de oven.*

*Toelichting*
In de examenopgave werd de structuur van de formule weggegeven, geen WDA-oefening.

*Parate vaardigheid*
Op een of andere manier een exponentiële formule maken.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

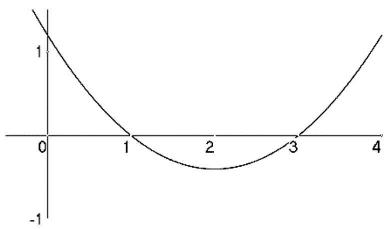
*Reflectie*
Inventariseren waar de moeilijkheid zit. Een aanpak vastleggen.

*Plaats in de leerjaren*
In 3/4 havo-vwo.

*Relatie met schoolboeken*
In het bijzonder nodig bij wiskunde A havo en vwo.

## Oefening 10.2.d Hoort $f$ bij $f\,'$?

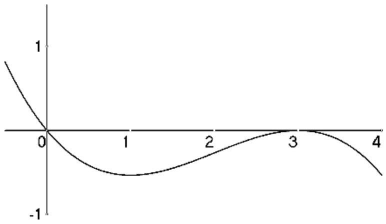
Palha 2013



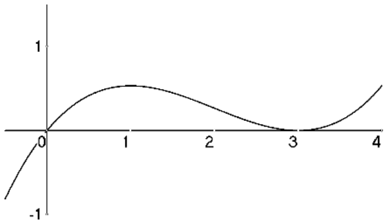

In de eerste figuur is de grafiek van $f\,'$ getekend.

*Welke van de volgende grafieken (I, II, III) kan de grafiek van de functie $f$ zijn? Leg uit waarom je dat denkt.*

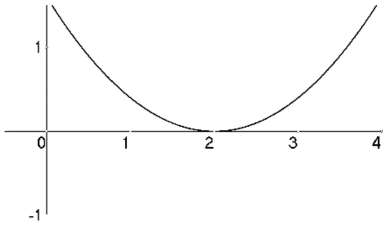
*I*




*II*




*III*




*Toelichting*
Er wordt in de schoolboeken veel geoefend met de relatie van de functie naar de afgeleide functie. Het verwoorden van de informatie die de afgeleide functie levert over de oorspronkelijke functie is ook essentieel in het proces van abstraheren.

*Parate vaardigheid*
Bekendheid met de eigenschappen van de afgeleide functie.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

*Reflectie*
Inventariseren van de argumenten.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5 havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
In hoofdstukken over differentiëren en start integreren.

**Oefening 10.2.e Als $f'$ gegeven is, wat weet je dan van $f$ ?**

Van de functie $f$ is de afgeleide functie $f'(x) = x(x-1)(x+2)$.
*Voor welke waarde(n) van $x$ heeft $f$ een maximum?*

*Toelichting*
Ook hier geldt weer dat een omkeervraag het proces van wiskundig denken en abstraheren bevordert.

*Parate vaardigheid*
Bekendheid met de eigenschappen van de afgeleide functie.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

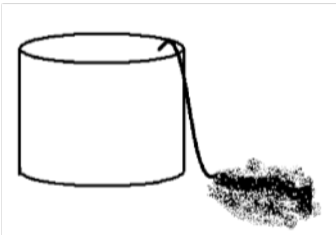
*Reflectie*
Inventariseren van de argumenten.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5 havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

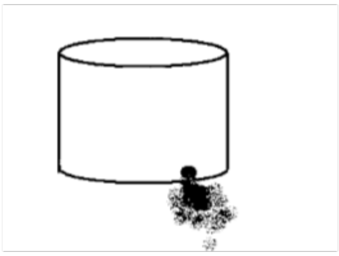
*Relatie met schoolboeken*
In hoofdstukken over differentiëren en start integreren.

## Oefening 10.2.f Watertanks

Roorda 2012



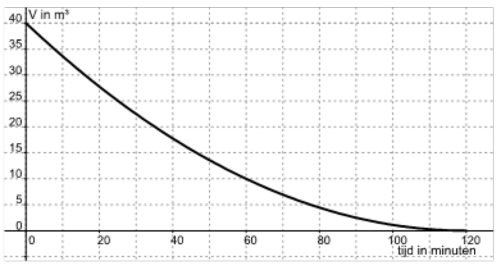
*figuur 1: Tank leegpompen*



*figuur 2: Tank leeg laten lopen*

Een grote tank wordt leeggepompt (zie figuur 1). De tank heeft een inhoud van 40 $m^3$, dat is 40.000 liter. Voor het volume van het water in de tank geldt de formule $V = 40 - \frac{1}{3}t$.
Hierin is $V$ het volume in $m^3$, en $t$ de tijd in minuten.
a. Met welke snelheid (liter/minuut) wordt deze tank (figuur 1) leeggemaakt?

Een andere manier om deze tank leeg te maken is door aan de onderkant van de tank een opening te maken (figuur 2). Met behulp van de wet van Torriceli kun je een formule afleiden voor de hoeveelheid vloeistof in de tank.
De snelheid van leeglopen hangt namelijk af van de hoeveelheid water die op een bepaald moment nog aanwezig is in de tank. Als er minder water in de tank zit is de waterdruk bij de opening ook lager. Een passende formule bij deze tank is: $V = 10(2 - \frac{1}{60}t)^2$.
Hierin is $V$ het volume van het water in de tank in $m^3$ en $t$ de tijd in minuten.
In figuur 3 zie je de grafiek waarin $V$ is uitgezet tegen $t$.




*Figuur 3: grafiek van het leeglopen van een tank waar onderin een gat is gemaakt*

b. Met welke snelheid (liter/minuut) stroomt de tank leeg op $t$ = 40 minuten?
c. Beide tanks (figuur 1 en figuur 2) zijn na 2 uur leeg. Onderzoek op welk moment de uitstroomsnelheid in beide tanks gelijk is.

*Toelichting*
Dit is een opdracht uit het promotieonderzoek van Gerrit Roorda. De tien leerlingen beantwoordden de vragen met een verscheidenheid aan methoden.
Bijvoorbeeld bij vraag b:

- de *intervalmethode*, bijvoorbeeld interval [40, 41]
- de *klein-intervalmethode*, bijvoorbeeld interval [40, 40,001]
- de *koordenmethode*, bijvoorbeeld van $t = 35$ tot $t = 45$
- de *raaklijnmethode*, bijvoorbeeld richtingscoëfficiënt $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{35}{80} = 0,4375$
- de *rekenmachine-optie dy/dx* na invoeren van de formule
- de *rekenmachine-optie Tangent*
- *symbolisch differentiëren* met $V'(t) = 20(2 - \frac{1}{60}t) \cdot -\frac{1}{60} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{180}t$

Ook hier geldt weer dat op de duur dit soort opgaven voor (veel) leerlingen reproductie kan worden in plaats van WDA.

*Parate vaardigheid*
Bekendheid met enkele beginselen van het differentiëren.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

*Reflectie*
De verschillende oplossingsmethoden inventariseren en waarderen.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5 havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Afsluiting van hoofdstukken over differentiëren.

**Oefening 10.2.g Monopolie**
Roorda 2012

> Wanneer een firma de alleenverkoop (het monopolie) bezit van een bepaald product, dan moeten alle consumenten bij die ene firma kopen. Als het product volgens de consumenten te duur wordt, dan neemt het aantal verkochte eenheden van dat product af.
> Een bedrijf produceert een bepaald product. Door een marktonderzoek is vastgesteld dat voor het verband tussen de prijs en de verkochte hoeveelheid geldt $p = -0{,}5q + 12$, hierin is $q$ het aantal verkochte eenheden in duizendtallen en $p$ de prijs in euro per stuk. Voor de totale opbrengst in duizenden euro's geldt dan $TO = -0{,}5q^2 + 12q$.
>
> Als het bedrijf meer produceert zullen de kosten voor de productie ook toenemen. Het wiskundig model dat het bedrijf voor de totale kosten heeft opgesteld is $TK = 0{,}03q^3 - 0{,}5q^2 + 4q + 15$. Hierin is $q$ in duizendtallen en $TK$ in duizenden euro's.
> a. Als het bedrijf meer gaat produceren is er geen constante toename van de totale kosten. Bij welke productieomvang is de toename van de totale kosten het laagst?
> b. Onderzoek bij welke productie de kosten en de opbrengst even snel toenemen.

*Toelichting*
Dit is een opdracht uit het promotieonderzoek van Gerrit Roorda. De vraagstelling is zo geformuleerd dat leerlingen die het vak economie niet volgen de opdracht kunnen maken. De tien leerlingen beantwoordden de vragen met een verscheidenheid aan methoden.

Bij vraag a als volgt:

- *intervalmethode*, tabel met stapgrootte 0,1 geeft minimale toename bij $q = 5,5$ en $q = 5,6$ .
- *rekenmachine-optie dy/dx*, de helling van de grafiek laten berekenen.
- *symbolisch differentiëren,* met $TK''(q) = 0,18q - 1$ .
- *symbolisch differentiëren en hellinggrafiek*, met $TK'(q) = 0,09q^2 - q + 4$ en de grafiek.

Ook hier geldt weer dat op de duur dit soort opgaven voor (veel) leerlingen reproductie kan worden in plaats van WDA.

*Parate vaardigheid*
Bekendheid met enkele beginselen van het differentiëren.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

*Reflectie*
De verschillende oplossingsmethoden inventariseren en waarderen.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5 havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Afsluiting van hoofdstukken over differentiëren.

## 10.3 Opdrachten

**Opdracht 10.3.a Welke primitieve functie?**
Palha 2013

Gegeven is de afgeleide functie $h'(x) = x^2 - 4x$ .
Er zijn twee mogelijke primitieve functies $h$ met de $x$-as als raaklijn.
Welke twee functies $h$ zijn dat?

*Toelichting*
Deze combinatie van eigenschappen van integreren en differentiëren vereist zeker ook een probleemanalyse.

*Parate vaardigheid*
Bekendheid met de kenmerken van differentiëren en integreren.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

*Reflectie*
Inventariseren van de aanpak. Zie paragraaf 8.1.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5/6 vwo.

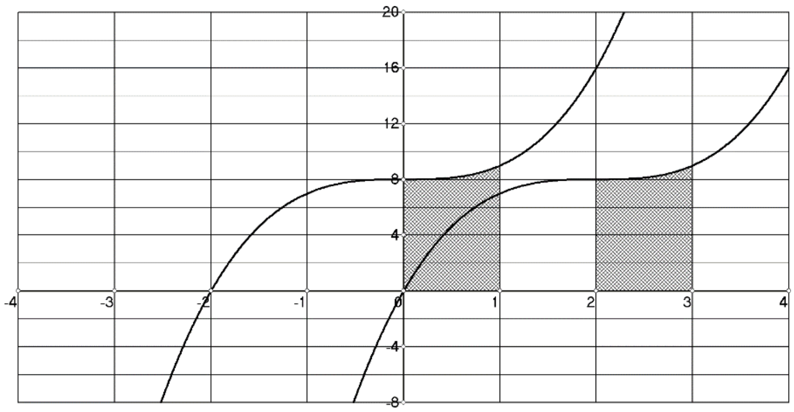
*Relatie met schoolboeken*
Na het integreren.

**Opdracht 10.3.b Redeneren met integralen**
Palha 2013

*Is* $\int_a^b f(x)dx$ *gelijk aan* $\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx$ *?*

*Geef een sluitende algemene redenering. Illustreer je redenering met grafieken.*

*Toelichting*




Leerlingen die een goede redenering kunnen geven, hebben de abstractie wel bereikt. Deze vraag doet een beroep op het begrip integraal en op het begrip van een verschoven functie.
Een leerling kan ook simpelweg opschrijven:
$F(b)-F(a)=F(b+k-k)-F(a+k-k)$ ...

*Parate vaardigheid*
Bekendheid met de eigenschappen van integreren.

*Werkwijze*
In duo's laten uitwerken.

*Reflectie*
Inventariseren van de argumenten. Er zijn meerdere redeneringen mogelijk.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Na hoofdstukken over integreren.

## Opdracht 10.3.c Remweg

Roorda 2012

De remweg $R(v)$ van een auto is de afstand die een auto nog rijdt, nadat de bestuurder begint te remmen. Deze remweg $R$ in meter, is een functie van de snelheid $v$ in km/u.
Ga er van uit dat de maximumsnelheid van een auto 200 km/uur is.
Wat betekenen de volgende formules in termen van remweg en snelheid?

a) $R(100) = 80$
b) $R'(80) = 1{,}15$
c) $R''(v) > 0$

*Toelichting*

Dit is een opdracht uit het promotieonderzoek van Gerrit Roorda. Het is een goed voorbeeld van een vraag die toetst of de leerlingen de abstractie hebben bereikt. In het onderzoek van Roorda leidde het proces van abstraheren in het vak wiskunde B over de leerjaren 4, 5 en 6 vwo ertoe dat steeds meer leerlingen betere uitspraken deden over het limietproces en andere aspecten van het begrip afgeleide. Hier geldt dat dit soort opgaven voor (veel) leerlingen abstractie op een hoog niveau toetsen.

In het onderzoek komt Nico na het tekenen van de raaklijn aan de schets van een grafiek met redeneringen als:

*"Voor iedere kilometer dat hij harder zou rijden, neemt de remweg toe met 1,15 meter op dat moment [….] voor elke kilometer per uur dat er bij komt hoeveel meter je remweg wordt; dat zou op dit moment 1.15 zijn.*
*$R''$ is de hoeveelheid waarmee $R/v$ toeneemt [….] hoe harder de auto rijdt, hoe meer de remweg toeneemt per kilometer per uur."*

Een andere leerling heeft het over:

*"Wat is dat accent ook al weer? Als je een formule hebt $f(x) = x^2 + 3x + 20$ of zo, dan haal je dus alle exponenten één naar beneden, zodat $2x + 3$ en $20$ vervalt, $x$ is dus dan is de afgeleide is gelijk aan dat."*

*Parate vaardigheid*

Bekendheid met de beginselen van het differentiëren.

*Werkwijze*

In duo's laten uitwerken of in groepjes over laten discussiëren.

*Reflectie*

Formuleringen bespreken en woorden toekennen aan de betekenissen in de context en in de wiskunde. Roorda benadrukt dat in de les heel vaak de verschillende aspecten van de afgeleide met elkaar in verband moeten worden gebracht en worden verwoord door de leerlingen.

*Plaats in de leerjaren*

Wiskunde B 5 havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*

Afsluiting van hoofdstukken over differentiëren.

## Opdracht 10.3.d Benzineverbruik

Roorda 2012

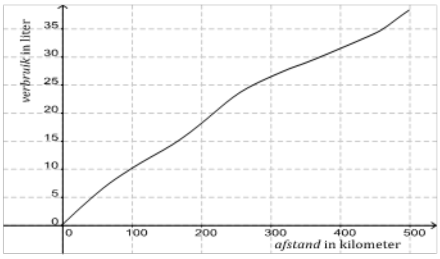
In een auto is een meetsysteem aangebracht, waarmee elke 10 kilometer, gemeten wordt hoeveel benzine de auto heeft verbruikt. Tijdens een rit van 500 kilometer zijn de metingen genoteerd.
In de tabel zie je enkele metingen die tijdens deze rit zijn gemaakt.

De gereden afstand is $a$ (in km) en de hoeveelheid verbruikte benzine is $V$ (in liter)

| $a$(km) | 10 | 20 | 30 | 50 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ (liter) | 1,3 | 2,7 | 4,0 | 6,4 | 10,3 | 18,3 | 26,6 | 31,2 | 39,7 |

$V(a)$ is het verbruik na $a$ km.

Alle metingen zijn in een grafiek gezet en daarna is een vloeiende grafiek getrokken door de punten.




Wat betekent in deze situatie $\frac{V(a+h)-V(a)}{h}$? (In deze formule is $h$ een waarde die je zelf mag kiezen.)

*Toelichting*
Dit is een opdracht uit het promotieonderzoek van Gerrit Roorda. Het is een goed voorbeeld van een vraag die toetst of de leerlingen de abstractie hebben bereikt.
In het onderzoek van Roorda leidde het proces van abstraheren in het vak wiskunde B over de leerjaren 4, 5 en 6 vwo er toe dat steeds meer leerlingen betere uitspraken deden over het limietproces en andere aspecten van het begrip afgeleide. De tien leerlingen beantwoordden de vragen met een verscheidenheid aan methoden:

- *gemiddeld verbruik*, redeneren in termen als verbruik per kilometer in de situatie.
- *limietproces*, redeneren in termen van *h* laten naderen naar 0.
- *aspecten van het begrip afgeleide,* redeneren met richtingscoëfficiënt, gemiddelde toename.

Hier geldt dat dit soort opgaven voor (veel) leerlingen abstractie op een hoog niveau toetsen.

*Parate vaardigheid*
Bekendheid met de beginselen van het differentiëren.

*Werkwijze*
In duo’s laten uitwerken of in groepjes over laten discussiëren.

*Reflectie*
Formuleringen bespreken en woorden toekennen aan de betekenissen in de context en in de wiskunde.

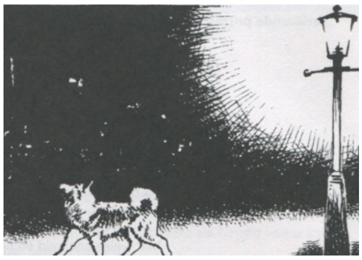
*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5 havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Afsluiting van hoofdstukken over differentiëren.

**Opdracht 10.3.e De snelheid van de schaduw**

Een hond loopt met een snelheid van 90 cm per seconde weg van een 3 meter hoge lantaarnpaal.
Zijn neuspunt is op dit moment 350 cm van die paal verwijderd en 60 cm boven de grond.

*Hoe snel beweegt dan de schaduw van zijn neuspunt?*



*Toelichting*
Abstraheren heeft alles te maken met het kunnen gebruiken van het geleerde begrip in een nieuwe situatie. In dit voorbeeld doet het ook een beroep op het kunnen algebraïseren van de situatie. Een tekening maken, afstand $x$ tot de paal, de schaduw is nu op afstand $y$. Met enig rekenen aan verhoudingen komen we tot $y = \frac{5}{4}x$. Maar dan?
Begrijpen wat een samengestelde functie is en de kettingregel en een afgeleide geeft:
$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{5}{4} \cdot 90 = 112\frac{1}{2}$ cm/sec.

*Parate vaardigheid*
Het kunnen differentiëren van een samengestelde functie.

*Werkwijze*
In duo’s of groepjes.

*Reflectie*
Waarschijnlijk is het goed nog eens te reflecteren op de betekenissen die hier spelen.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5 havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Gemengde problemen, afsluiting van hoofdstukken over differentiëren.

**Opdracht 10.3.f Luchtweerstand**

De luchtweerstand is een kracht $W$ die de beweging van bijvoorbeeld een auto tegenwerkt. Die kracht $W$ is evenredig met het kwadraat van de snelheid $v$, dus $W = k \cdot v^2$. De coëfficiënt $k$ hangt af van de vorm van de auto en van de gebruikte eenheden. Neem $W$ in Newton, $k = 1{,}3$ en $v$ in km/uur.

*Met welke snelheid in Newton per seconde neemt de luchtweerstand toe, als een auto die 55 km/uur rijdt, gaat versnellen met 3 km/uur per seconde?*

*Toelichting*
Een kwalitatieve vraag om te werken aan het abstraheren van het begrip samengestelde functie en de kettingregel.
De relatie tussen snelheid van verandering en de afgeleide leidt tot de productregel:

$$W'(t) = W'(v) \cdot v'(t) = 143\left(\frac{Newton}{\frac{km}{uur}}\right) \cdot 3\left(\frac{\frac{km}{uur}}{\text{sec}}\right) = 429\ {}^{N}\!/\!_{\text{sec}}$$

*Parate vaardigheid*
Het kunnen differentiëren van een samengestelde functie.

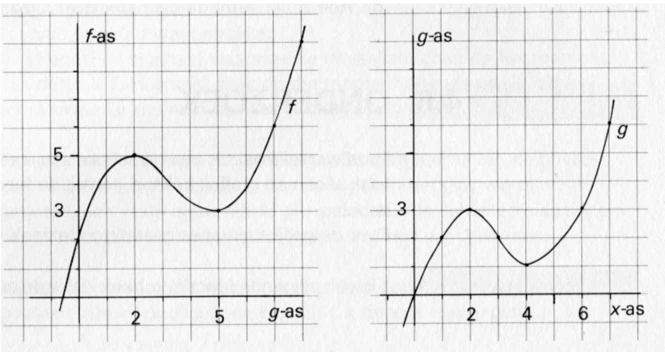
*Werkwijze*
In duo's of groepjes.

*Reflectie*
Waarschijnlijk is het goed om nog eens te reflecteren op de betekenissen die hier spelen.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5 havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Afsluiting van hoofdstukken over differentiëren.

**Opdracht 10.3.g Samengestelde functies en grafieken**




De grafieken van $f$ en $g$ hebben dalende en stijgende delen.
We willen iets meer te weten komen over de grafiek van de functie $f(g(x))$.
Uit het teken van een afgeleide functie (positief, negatief) kunnen we het dalen en stijgen van de oorspronkelijke functie afleiden.

- *Stel het tekenverloop van $f'(g(x))$ samen uit die van $f'(g)$ en $g'(x)$.*
- *Voor welke waarden van $x$ heeft $f(g(x))$ maxima-minima?*
- *Schets het verloop van de grafiek van $f(g(x))$ voor $0 \le x \le 7$.*

*Toelichting*
Zonder afleidend rekenwerk moeten de leerlingen nadenken over het samenstellen van functies en wat dat te maken heeft met de kettingregel die ze klakkeloos kunnen uitvoeren. Echt abstraheren.

*Parate vaardigheid*
Het kunnen differentiëren van een samengestelde functie.

*Werkwijze*
In duo's of groepjes.

*Reflectie*
Waarschijnlijk is het goed nog eens te reflecteren op de betekenissen die hier spelen. En eventueel aanvullen met ook een oefening waarin de functievoorschriften van de samengestelde functies zijn gegeven en eerst de grafieken van de samen te stellen functies worden getekend en daaruit die van de samengestelde functie. Daarna met de kettingregel berekenen.

*Plaats in de leerjaren*
Wiskunde B 5havo, wiskunde A en B 5/6 vwo.

*Relatie met schoolboeken*
Gemengde problemen, afsluiting van hoofdstukken over differentiëren.

# 11. Diverse ontwerpideeën

## 11.1 Toelichting

In het voorjaar van 2015 hebben tientallen wiskundedocenten op de WDA-doe-dag samengewerkt om WDA-activiteiten te ontwerpen. Vervolgens hebben ze hun ontwerpen uitgevoerd en hun evaluatie naar SLO opgestuurd. In dit hoofdstuk hebben hun ontwerpen en evaluaties een plaats gekregen, aangevuld met feedback en licht commentaar door andere wiskundedocenten, die aan deze publicatie hebben meegewerkt. Licht commentaar, want het kenmerk van een onderwijsontwerp is natuurlijk dat alleen de wiskundedocenten, die zichzelf en hun klassen kennen, kunnen beoordelen wat in hun situatie een goed ontwerp is. Die rijkdom aan ontwerpideeën is dan ook bedoeld als inspiratie voor de collega's wiskundedocenten. Soms denkt u wellicht dat het ontwerp kan worden aangepast voor uw situatie en verwacht u een mooie onderwijsactiviteit. Een andere keer gaat u het beschreven ontwerp integraal uitvoeren of vindt u het helemaal niets.
Met het volgende overzicht, gerelateerd aan de voorgaande hoofdstukken, kunt u zich oriënteren op de inhoud van de diverse ontwerpideeën.

*H5 Startprobleem "nieuw" wiskundig begrip*
- Periodieke functies
- Wat is een normale verdeling?
- Logaritmen
- Verbanden zoeken
- Hellinggrafieken

Zoals in hoofdstuk 5 is toegelicht, zet een brede startvraag of een goed startprobleem de leerlingen meteen aan het denken over het "nieuwe" begrip, zodat ze kunnen abstraheren waar het in het vervolg om gaat.
- In *Periodieke functies* gaan de leerlingen van 4 vwo aan de slag met de cirkelbeweging van een windmolen, waarna zij verschillende grafieken van de hoogte van wiekpunt moeten tekenen. De drie collega's zijn enthousiast en geven nog wat tips voor de coaching.
- In *Wat is een normale verdeling?* mogen leerlingen op allerlei manieren data verzamelen, grafieken tekenen en vervolgens onderzoeken of de verkregen data van metingen en tellingen normaal verdeeld zijn. Het ordenen en structureren onderbouwt het nieuwe begrip *normale verdeling.*
- In *Logaritmen* worden leerlingen in een aantal vragen uitgedaagd om van allerlei functies de inverse te zoeken, wat uitloopt op een onderzoek naar de inverse van functie $f(x) = g^x$. Via tabellen en grafieken komt het begrip *logaritme* in het vizier.
- In *Exponentieel verband* onderzoeken leerlingen een mogelijk verband tussen hoogte en luchtdruk, waarna de brug wordt geslagen naar een exponentieel verband.
- In *Hellinggrafieken* wordt gependeld tussen functie, afgeleide functie en primitieve functie.

*H6 Startprobleem “nieuwe” wiskundige methode*

- Gemiddelde en standaardafwijking met de GR
- Vuistregels
- Toenamediagrammen
- Racecircuit

In hoofdstuk 6 is met veel voorbeelden geïllustreerd dat het een groot verschil maakt of leerlingen meteen een nieuwe methode of regel wordt voorgedaan, waarna ze die moeten onthouden, of dat ze eerst over het hoe en waarom kunnen nadenken.

- In *Gemiddelde en standaardafwijking met de GR* is van een normale verdeling de standaardafwijking gegeven, terwijl de leerlingen het gemiddelde moeten bepalen. In de derde deelvraag lukt dat niet meer met de vuistregels en moeten de leerlingen een andere methode zoeken.
- In *Vuistregels* wordt hetzelfde doel als hiervoor nagestreefd met een ander startprobleem.
- In *Toenamediagrammen* zoeken leerlingen diverse grafieken en diagrammen, die ze moeten analyseren op het verloop van de verbanden o.a. door de toename/afname in tabellen vast te leggen.
- In *Racecircuit* wordt hetzelfde doel nagestreefd, maar nu aan de hand van een probleemstelling in de context van snelheden in een racecircuit.

*H7 Versterken samenhang wiskundige begrippen en methoden*

- Regels recapituleren
- Transformaties sinusoïden
- Een sinusoïde
- Analyseprobleem
- Betekenis afgeleide

Hoofdstuk 7 gaat dieper in op de noodzaak dat leerlingen in hun brokjes kennis een samenhang zien. Dat is goed voor het beter onthouden en het beter begrijpen. Aan het versterken van de samenhang tussen wiskundige begrippen en methoden kan worden gewerkt door een gestructureerde oefening, door leerlingen zelf te laten ordenen en structureren of door hun een geschikt groot probleem voor te leggen.

- In de gestructureerde oefening *Regels recapituleren* moeten leerlingen rekenregels met getallenvoorbeelden illustreren. Vervolgens moeten ze bij een tabel van een exponentieel verband vragen bedenken als bruggetje naar de introductie van logaritmische functies.
- In *Transformaties sinusoïden* krijgen de leerlingen uitdagende vragen voorgelegd om bij een gegeven grafiek met formule een assenstelsel te bedenken. Eerst met parabolen, daarna met sinusoïden. Dergelijke ‘omkeervragen’ helpen bij het abstraheren.
- In *Een sinusoïde* wordt eenzelfde leerdoel als hiervoor nagestreefd door leerlingen een sinusoïde voor te leggen met het functievoorschrift en weer de vraag de assenverdeling te bedenken.
- In *Analyseprobleem* moeten leerlingen een groot en complex analyseprobleem oplossen waarin de kennis van differentiëren en integreren moet worden toegepast. Een afsluitende opdracht.
- In *Betekenis afgeleide* beoordelen leerlingen een stelling ter afsluiting van het eerste hoofdstuk over differentiëren met waar/soms/niet-waar, waarbij voorbeelden en non-voorbeelden moeten worden bedacht.

*H8 Leren een "nieuw" probleem aan te pakken*

- Economische formules
- Optimale oppervlakte
- Samengestelde rente met periodieke storting
- Combineren kennis van differentiëren
- Kritisch beoordelen van conclusies uit data

Hoofdstuk 8 gaat over de manier waarop leerlingen kunnen leren bewust en systematisch een probleem aan te pakken. Die problemen kunnen een rol spelen in de opbouw van een wiskundig begrip (H5) of een wiskundige methode (H6) of bedoeld zijn om de samenhang in brokjes kennis te versterken (H7). In deze ontwerpen gaat het vooral om het kunnen toepassen van wiskundige kennis op niet-standaard vraagstellingen, een bekende vorm van probleemoplossen.

- In *Economische formules* wordt de leerlingen gevraagd in een economische context hun kennis van de afgeleide te gebruiken en ook 'out of the box' die kennis uit te breiden. Voor leerlingen met economie in het vakkenpakket blijkt dat routine te zijn.
- In *Optimale oppervlakte* werken de leerlingen aan het bekende probleem van de optimale oppervlakte van een rechthoek bij een gegeven omtrek.
- In *Samengestelde rente met periodieke storting* worstelen de leerlingen met deze bekende context.
- In *Toepassing differentiëren* moet alle kennis over differentiëren worden gecombineerd, om de voorgelegde vragen te kunnen beantwoorden.
- In *Kritisch beoordelen van conclusies uit data* wordt een beroep gedaan op het met verstand kijken van conclusies uit verzamelde data.

## 11.2 Ontwerpideeën

**Periodieke functies**

**Startprobleem**

Willy van Bunningen, Marianne van Dijke, Liesbeth van Reesa

Moderne Wiskunde deel 4 vwo, hoofdstuk 7

**WDA Modelleren Abstraheren**

**Context**
Deze opdracht is bedoeld om de relatie te leggen tussen de cirkel en de goniometrische functies.

**Vraag**
Zie bijlage.

**Verwachtingen**
Mijn verwachtingen waren niet hoog gespannen. Ik had bijvoorbeeld verwacht dat de leerlingen direct grote problemen zouden hebben bij opdracht 1. “Welke tijdstippen moet ik nemen?” Dit ging juist heel soepel.
En ik verwachtte dat de leerlingen door zelf te proberen een idee van de grafiek zouden krijgen, en dat ze de hoogte zouden gaan berekenen i.p.v. opmeten.

**Reacties van leerlingen**
De leerlingen vonden dit twee plezierige lessen. Ze hadden het gevoel echt iets zelf ‘ontdekt’ te hebben. Leuk eens iets anders, duidelijk wat de bedoeling was. De leerlingen hebben intensief met elkaar overlegd. Hierbij hebben ze diverse aanpakken gecombineerd, bijgestuurd, verwoord, elkaar overtuigd, etc. De leerlingen waren actief en zeer betrokken bij de opdracht.

**Leereffect bij leerlingen**
De leerlingen hebben zelfstandig aan een opdracht gewerkt over een onderwerp dat niet kort geleden aan de orde is geweest. Ze hebben een model uit de werkelijkheid omgezet naar een wiskundig model en hebben ermee geredeneerd. Het slagen voor zo’n uitdagende opdracht is sowieso altijd goed voor hun zelfvertrouwen.
Ze hebben – ten opzichte van de groep van vorig jaar – beter door hoe de eenheidscirkel werkt vanwege de windmolen. Toen ze vanmorgen de volgende paragrafen aan de leerlingen die vorige week op uitwisseling waren uitlegden, grepen ze terug naar de windmolen.

**Evaluatie**
Ik heb me (zoals vaker) in moeten houden om geen uitleg/antwoorden te geven, maar te volstaan met slechts summiere aanwijzingen. Ik sta er weer versteld van hoeveel ze dan kunnen en hoeveel meerwaarde het heeft als leerlingen het aan elkaar uitleggen!
Geef de leerlingen eerst opdracht om 5 minuten zelf in het probleem te duiken, zonder meteen te gaan overleggen met buurman/buurvrouw. Als je daarna overleg toestaat, is iedereen het probleem echt eigen. Deze WDA leverde twee zinvolle lessen op, de leerlingen hebben met plezier gewerkt en veel (zelf) geleerd! Leuk om te doen en te zien.
Geef leerlingen de ruimte (nadat ze individueel de opdracht doorgenomen hebben) om met elkaar te discussiëren en elkaar te overtuigen van de juiste aanpak. Stimuleer leerlingen berekeningen te noteren waarmee ze anderen kunnen overtuigen. Observeer en coach de leerlingen door ze goede denkvragen te stellen. Laat de leerlingen zelf tot een oplossing komen! Grijp tijdig in als een groepje op een dwaalspoor zit (dit voorkomt frustratie).

Aan het einde van de les had elke groep een goede sinusoïde van de eerste wiek op papier. Eén groepje begon met de tangens en liep vervolgens vast, zij hadden wat hulp nodig bij de toepassing van de sinus. Een groepje excellente leerlingen was ruim voor de tijd klaar. Zij hadden de sinusfunctie al snel ontdekt en zijn die vervolgens gaan plotten in hun rekenmachine.

Voor hen zouden nog meer verdiepende opdrachten toegevoegd kunnen worden. Zij hebben vervolgens zelf wat extra opdrachten bedacht:

- Wat gebeurt er als de wiek in tegengestelde richting draait?
- Waar komen wiek 1 van windmolen A en wiek 2 van windmolen B elkaar tegen als ze in tegengestelde richting draaien?
- Waar komen ze elkaar tegen als windmolen A 2 keer zo snel draait als windmolen B?

**Feedback referent**

- Het leerdoel is duidelijk; en dat jullie modelleren als specifiek WDA doel hadden bij deze opdrachten lijkt mij juist.
- Opdracht 3 is een goeie. Structureren en abstraheren.
- In plaats van Opdracht 5: Schets een grafiek met periode …, amplitude … en evenwichtsstand …. De omkering van wat ze in het kader bij opdracht 3 doen.

**Werkblad: Periodieke functies**


Hiernaast zie je de afbeelding van een windmolen. De hoogte van de mast: 100 m. De lengte van de wieken: 50 m. Deze windmolen maakt op een rustige dag één volledige cirkelbeweging in 36 seconden.

**Opdracht 1**

In deze opgave maak je een grafiek waarin je de hoogte van wiekpunt 1 uitzet tegen de tijd. Wiekpunt 1 bevindt zich op $t = 0$ in horizontale stand (zie afbeelding). Wiekpunt 1 draait vanuit deze stand eerst naar boven.

a. Bereken bij 10 tijdstippen op interval $[0,36>$ de hoogte van wiektop 1. Bereken in elk geval de maximale en de minimale hoogte.

b. Maak nu een grafiek waarin je de hoogte van wiekpunt 1 uitzet tegen de tijd. verwerk hierin de 10 berekende punten uit opgave 1a en teken vervolgens een vloeiende lijn. Laat wiekpunt 1 precies 1 volledige cirkelbeweging doorlopen.

c. Beredeneer wat er gebeurt met de grafiek van wiekpunt 1 als de mast van de windmolen 20 m. korter is.

**Opdracht 2**

Wiek 1 wordt verlengd met 10 m. De wind neemt toe waardoor de snelheid precies verdubbelt. Maak nu een grafiek van wiekpunt 2. Bereken opnieuw 10 tijdstippen op het interval $[0,36>$ waarbij in elk geval de starthoogte, de maximum- en de minimumhoogte.

**Opdracht 3** Noteer van beide grafieken de volgende eigenschappen:

| | Grafiek 1 | Grafiek 2 |
|---|---|---|
| Evenwichtstand | | |
| Periode | | |
| Amplitude | | |
| Beginpunt | | |
| Symmetrieassen | | |

**Opdracht 4**

a. Na hoeveel seconde heeft wiekpunt 2 de positie van wiekpunt 1 bij $t = 0$ bereikt?

b. In één cirkelbeweging bereikt wiekpunt 2 al eerder precies deze hoogte. Bereken op welk tijdstip dit gebeurt.

**Opdracht 5**

a. Na hoeveel seconden heeft wiekpunt 1 de positie van wiekpunt 2 bij $t = 0$ bereikt?

b. In één cirkelbeweging bereikt wiekpunt 1 al eerder precies dezelfde hoogte. Bereken op welk tijdstip dit gebeurt.

## Wat is een normale verdeling?

**Startprobleem**

Ron Wierikx, Marielle Deckers-Schols, Marc Jacobs

Getal en Ruimte H8, de normale verdeling (A)

**WDA Modelleren Ordenen Structureren**

**Context**
Het introduceren van het begrip normale verdeling. Het verband tussen verschillende onderzoeken laten leggen. Het vastleggen van verbanden.

**Vraag**
Leerlingen hebben grootheden moeten zoeken die normaal verdeeld zouden kunnen zijn. Een leerling gaf als voorbeeld de lengte. Zij mocht in verschillende klassen van hetzelfde leerjaar de lengte van de leerlingen gaan opvragen en onderzoeken of dit normaal verdeeld was. Enz.
Daarna hebben we de uitkomsten van de onderzoeken vergeleken en gediscussieerd of de onderwerpen wel of niet goed gekozen waren en waarom iets nu wel normaal verdeeld was en waarom niet.

**Verwachtingen**
Dat de leerlingen het leuk zouden vinden om zelf opdrachten te verzinnen en uit te voeren, en dat de leerstof zo beter beklijft.

**Reacties van leerlingen**
Zij vonden het heel leuk. Zeker omdat ze ook uit de klas mochten om data te verzamelen. Het verwerken en de discussie erna waren ook leuk. Leerlingen hadden ook het gevoel te begrijpen wat een normale verdeling nu inhield.

**Leereffect bij leerlingen**
Het begrip dat er onder de kromme alle waarnemingen waren. Dat je ook kon berekenen hoeveel de oppervlakte links of rechts van een grens was of, als je de oppervlakte wist, dat je dan ook de grens kon berekenen zonder dit al daadwerkelijk gedaan te hebben.

**Evaluatie**
Het is ontzettend leuk leerlingen actief met wiskunde aan het werk te zien. Je moet alleen opletten dat het niet te veel tijd kost. Maar je kan de opdrachten natuurlijk ook kleiner maken. In elke les zou een kleine WDA moeten zitten en eens om de zoveel tijd een grote.
Gewoon doen.

**Feedback referent**
* Het verzamelen van data bij de start van een statistisch onderwerp doet het leven.
* De discussie over de vraag of een dataverzameling normaal is verdeeld is de WDA modelleren.
* Het samen bespreken van de inbreng van de leerlingen verankert het begrip.

## Logaritmen

**Startprobleem** Marlies Zonneveld

Getal en Ruimte, Hoofdstuk 5 paragraaf 5.4

**WDA Ordenen en structureren Abstraheren-generaliseren**

**Vraag**
Neem eens een lineaire functie. Maak er de grafiek bij, en maak er zelfs een tabel bij. De terugweg – je weet de $y$-waarde, je wilt de $x$-waarde die erbij hoort, dat geeft de inverse. De waarde 'in' noem je weer $x$, de waarde 'uit' weer $y$. Welke functie is zo de inverse van je lineaire functie? Uitwisselen.
Nu neem je zelf een functie van de vorm $f(x) = a\sqrt{x} + b$. Ga weer tekenen aan de hand van een tabel. Teken ook de inverse. Beschrijf de eigenschappen en bedenk wat de formule van de inverse kan zijn. Uitwisselen.
Herhaal het nu met $f(x) = g^x$. Nu raak je vast bij de formule.
Bekijk de tabel, en zie hoe je nu toch van een aantal logaritmen al de uitkomst kunt weten – generaliseer dit.

**Verwachtingen**
Dat ze vlot zouden zien hoe de functie en zijn inverse met een spiegeling te vinden zijn. Dat de grafiek van de logaritmische functie duidelijk is, en het begrip goed aan de exponentiële functie wordt verbonden. Dat de leerlingen zelf al wat eigenschappen van logaritme kunnen oppikken en deze generaliseren.

**Reacties van leerlingen**
De leerlingen gingen prima aan de gang, boeken dicht en met elkaar aan de slag.
Het duurde langer dan verwacht om zelfs de lineaire functie er netjes uit te krijgen. Het woord spiegeling bleef lang weg. Toch even een hoop weer opgehaald, nuttig. Het echt zelf de eigenschappen zien kwam niet ver genoeg, daarin heb ik toen toch weer de leiding genomen.

**Leereffect bij leerlingen**
Er is een hoop oud werk even opgehaald over lineaire functies, over kwadratische functies, het begrip logaritme moet de volgende les nog verder diepgang krijgen bij een van de twee klassen. De andere klas begon het toch al wat te snappen.

**Evaluatie**
Ze bereikten trager dan gedacht (en gewenst) het punt waar de logaritme een plek krijgt. Toch vond ik het een nuttige bezigheid en fijn dat ook niemand in zijn boek bleef hangen, om op eigen tempo zijn eigen sommetjes door te nemen.
Er werd toch echt geordend, de structuur was nog rommelig. Het generaliseren werkte lekker bij de deelopdrachten.
Of het begrip logaritme nu makkelijker wordt zal de toekomst moeten uitwijzen.
Doe het boek inderdaad eens lekker dicht en geeft de klas een leuke opdracht. De leerlingen zijn actiever bij de les dan regulier en je kunt dus makkelijker wat diepgang bereiken bij een groter publiek. Nu nog even leren hoe je een vraag vlot ombouwt tot een WDA…

**Feedback van referent**

* Het is mij niet zo duidelijk waar de WDA zit. Welke vraag zette de leerlingen aan het denken?
* Het lijkt zo een onderwijsleergesprek waarbij de docent de richting aangeeft. Of zijn ze eerst in groepjes aan het discussiëren en komt alles samen in een inventarisatie van wat er zoal is gevonden?

## Verbanden zoeken

**Startprobleem** Mariken Barents

Getal & Ruimte 3vwo 10 ed., Hoofdstuk 8, de eerste les

**WDA Attitude ontwikkelen Abstraheren**

**Context**
Verband vinden, schatten, controleren.
**Vraag**

| Hoogte *h* in meters | 0 | 1000 | 2000 | 3000 |
|---|---|---|---|---|
| **Luchtdruk in hPa** | 1018 | 901 | 797 | 624 |

*Ellen loopt op de Himalaya op en een hoogte van 5000 meter. Wat is de luchtdruk daar?*

**Verwachtingen**
Ik verwachtte dat er verschillende oplossingen zouden komen. Dat de meeste leerlingen het niet zouden doen volgens een exponentieel verband, maar dat staat ook niet aangegeven, dus ze zijn vrij te proberen.

**Reacties van leerlingen**
Sommige leerlingen gingen meteen aan de slag. Anderen gingen wat om zich heen kijken en waren verrast.

**Leereffect bij leerlingen**
Door de bespreking, waarbij verschillende oplossingen en reacties van leerlingen los kwamen, hebben we verschillende aspecten kunnen bekijken.
Alles was goed in dit stadium. Een meisje kwam op een luchtdruk groter dan die op 3000 meter, maar vertelde dat ze zeker wist dat het fout was, omdat het lager moest zijn. Dat is dus ook goed.
De laatste methode was exponentieel: die creëerde een bruggetje naar de stof.

**Evaluatie**
Open vraagstelling, alles mag. Ook verrast (naar de leerlingen) door de verschillende manieren. Ook het evaluerende dat opkwam.
Alles wat ik in gedachten had te bereiken, werd bereikt. En ik heb het WDA-principe besproken: een attitude ontwikkelen. Durf dit aan: alles mag. Alles is goed. Dat is veilig voor leerlingen en ook voor jezelf bij het bespreken. De brug maken moet veilig zijn: leerlingen die het anders hadden, kunnen het idee krijgen het niet goed te doen. Echter doordat hier geen verband gegeven is, zijn veel manieren plausibel. Geef ze de ruimte te verkennen en proberen. Deze is ontstaan op de Doe-Dag, waarbij de leider en groep deze opdracht niet goed vonden. Er moest meer structuur bij. Ik heb het toch gedaan, omdat ik erin geloofde. Het bespreken waarom zulke opdrachten nuttig zijn, vond ik ook heel fijn. Leerlingen die afhaakten, kon ik nu aanspreken, namelijk dat ik graag zou zien dat zij door dit vaker te doen, het de volgende keer wel serieus gaan proberen.

**Feedback referent**
* Mooi dat je er zelf in bleef geloven en het toch zo hebt gedaan!

## Hellinggrafieken

**Startprobleem** Ina Stellingwerf

Moderne Wiskunde 9e ed, H7 paragrafen 4 en 5

**WDA Abstraheren en generaliseren**

**Vraag**

1. Schets onder de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ de bijbehorende hellinggrafiek, schets boven de grafiek van $f(x)$ een grafiek waarvan $f(x)$ een hellinggrafiek zou kunnen zijn.
   Doe hetzelfde bij de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ .
2. Welke functievoorschriften zouden er bij de geschetste grafieken kunnen horen?
3. Controleer je vermoedens met de GR.
4. Bepaal nu de afgeleide en een primitieve functie van …….

**Verwachtingen**

Een hellinggrafiek schetsen zou vrij snel moeten kunnen, een grafiek van een primitieve zal wat meer tijd kosten. Ik denk dat ze er wel vlot en fanatiek mee bezig gaan.

**Reacties van leerlingen**

Leuk om iets anders-dan-anders te doen. Lastig om een hellinggrafiek te schetsen, hoe zat dat ook alweer. Grafiek van een primitieve functie? Niet te doen. O, de hellinggrafiek? Dat is de afgeleide van de sinus, de cosinus dus!

**Leereffect bij leerlingen**

Ze ontdekken dat ze vergeten zijn hoe je uit een grafiek de hellinggrafiek kunt halen.

**Evaluatie**

Teleurstellend hoeveel moeite het kost om een hellinggrafiek te schetsen! Blijft lastig om een echte WDA te ontwerpen!

**Feedback referent**

* Uitbreiden van een bekend concept (hellinggrafiek) = generaliseren = abstraheren.
* In groepjes product maken (bijvoorbeeld poster) waarop de grafieken en conclusies staan afgebeeld.
* Het onderdeel 'Controleer je vermoedens met de GR' is niet duidelijk. Want de GR kan geen grafieken van afgeleiden of primitieven produceren.
* Alternatief:

  maak gebruik van het differentiequotiënt $f'(x) \approx \dfrac{\sin(x+0{,}001)-\sin(x)}{0{,}001}$ .

** Hints voor leerlingen*

· Bij het primitiveren: maak een tabel met punten die je kent.

· Differentiequotiënt niet letterlijk weggeven, maar attenderen op de mogelijkheid van een benadering.

· Als er posters zijn gemaakt, dan ook de groepjes met elkaar laten discussiëren, onder leiding van de docent. Maak hierbij gebruik van de 'aannemelijke fouten' (bijvoorbeeld een primitieve van $\sin(x)$ is $\cos(x)$ )

* * *Aanvullende vragen*

- Wat is de 23e afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ ?
- Wat is de afgeleide van $f(x) = \sin(x) + 10$ ?
- Geef vijf primitieven van $g(x) = \cos(x)$ .

## Gemiddelde en standaardafwijking met de GR

**Startprobleem** Hetty Luder

Getal en Ruimte ed 9 Wiskunde A Havo, Paragraaf 8.3

**WDA Probleemoplossen**

**Context**
Leerlingen weten hoe ze de oppervlakte en grenzen kunnen bepalen met de GR. Maar ze weten nog niet hoe ze het gemiddelde en de standaardafwijking kunnen berekenen met de GR. Deze opdracht is de inleiding op het leren hoe leerlingen de GR in kunnen zetten om het gemiddelde en de standaardafwijking te berekenen.

**Vraag**
Een vulmachine vult literpakken karnemelk. De inhoud is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 5 ml.

a. Uit onderzoek van vorig jaar bleek dat 2,5% van de pakken minder dan 993 ml bevat. Bereken de gemiddelde inhoud in gehele milliliters nauwkeurig.
b. Uit een ander onderzoek, vorige week, blijkt dat 16% van de pakken meer dan 1007 ml bevat.
   Bereken de gemiddelde inhoud in gehele milliliters nauwkeurig.
c. Onderzoeksbureau het Koetje heeft vandaag een onderzoek uitgevoerd. Uit dat onderzoek blijkt dat 10% van de pakken te weinig karnemelk bevat.
   Bereken de gemiddelde inhoud in gehele milliliters nauwkeurig.

Zijn de leerlingen aan de slag zijn gegaan en lopen ze bij c vast, geef ze dan de tip dat ze hun GR misschien in kunnen zetten, om uit te proberen.

**Verwachtingen**
De leerlingen kunnen zien dat a en b wel met de vuistregels kunnen en c niet. Ik denk dat ze het moeilijk vinden om een schatting te maken. De stap naar de rekenmachine zal even wennen zijn, ze hebben al even geen ”calc intersect” gehad…

**Reacties van leerlingen**
De leerlingen konden inderdaad a en b wel; het ging niet altijd goed. De leerlingen zagen wel in dat c niet met de vuistregel kon, maar het schatten ging slecht. De antwoorden van a en b (1002 en 1003) werden wel geprobeerd, dat was dus niet goed, maar tot een betere schatting kwamen ze niet.

**Leereffect bij leerlingen**
Wanneer en hoe gebruik ik de vuistregels of de GR en wanneer niet.

**Evaluatie**
In het leergesprek samen met de docent lukte de schatting van vraag c wel. Namelijk dat het gemiddelde tussen 1005 en 1010 moest zitten. De stap naar de GR ging bij veel leerlingen goed. Het instellen van het window om het snijpunt in beeld te krijgen lukte goed omdat we al een schatting hadden. Of de leerlingen over twee weken nog weten hoe het moet….

**Feedback referent**

* Een WDA zoals jullie deze bedacht hadden is een lastige, namelijk om leerlingen een oplossing te laten bedenken voor een nieuw probleem. Je kunt het je wat gemakkelijker maken door eerst WDA's te ontwerpen waarbij leerlingen het gereedschap al hebben leren gebruiken maar door de aard van probleem/vraagstelling ze moeten nadenken over welk gereedschap.
* Bijvoorbeeld (om bij jullie context te blijven):
  Uit onderzoek blijkt dat 2,5 % meer dan 1004 ml bevat en 16 % minder dan 998 ml bevat.
  Onderzoek hoe groot gemiddelde en standaardafwijking zijn.

## Vuistregels normale verdeling

**Startprobleem** Xanne van Buren

Getal en Ruimte A 8.1, Vuistregels bij de normale verdeling

**Context**

Ik merk dat leerlingen vaak, nadat ze de vuistregels hebben geleerd, het hele hoofdstuk over de normale verdeling met deze vuistregels proberen te blijven werken.

**Vraag**

In een meubelfabriek worden kastplanken gemaakt. De zaagmachine produceert planken waarvan de lengte normaal verdeeld is met een gemiddelde van 800 mm en een standaarddeviatie van 4 mm. De planken horen 800 mm te lang te zijn. Planken die langer dan 808 mm zijn, zijn wel bruikbaar, maar moeten met de hand op maat gemaakt worden. Planken die korter zijn dan 798 mm zijn onbruikbaar.
Welk van onderstaande vragen kun je met behulp van de vuistregels uitrekenen? Leg uit waarom. Als je een vraag niet kunt berekenen met de vuistregels, kun je dan een schatting maken van het antwoord? Leg ook uit hoe je dit dan doet.

1. Hoeveel procent van de planken heeft een lengte tussen de 800 en 808 mm?
2. Hoeveel procent van de planken is onbruikbaar?
3. Wat is de kans dat een plank een lengte heeft van minstens 804 mm?
4. Op een vrijdagochtend heeft de fabriek 200 planken gemaakt. Hoeveel van deze planken moeten met de hand op maat gemaakt worden?
5. Hoeveel planken moet de zaagmachine naar verwachting produceren om 1000 bruikbare planken over te houden?

**Verwachtingen**

Ik verwacht dat de leerlingen bij opgaven 2 en 5 ook met de vuistregels proberen te werken en de oppervlakte van het derde ‘deelgebied’ (volgens de vuistregels 34%) van de normale verdeling door de helft delen. Dus dat ze gaan rekenen met 17%.

**Reacties van leerlingen**

De meeste leerlingen gingen de opgaven uitrekenen in plaats van dat ze een uitleg gaven waarom en hoe je iets zou kunnen oplossen. Hier heb ik elk groepje wel mee aan de slag moeten zetten.

**Leereffect bij leerlingen**

Het leereffect was dat leerlingen goed wisten aan te geven waarom ze de opgaven 2 en 5 niet met de vuistregels op konden lossen. Een aantal wist zelfs een goede schatting (15% versus 19%) te maken van de percentages bij een bepaalde grenswaarde, precies tussen mu en mu+sigma. De leerlingen realiseerden zich dat ze niet zo maar uit kunnen gaan van de vuistregels en dat ze veel informatie uit een schets van de normale verdeling kunnen halen.

**Evaluatie**

Ik vond het leuk om deze opgave in mijn havo 4 klas te laten maken. Wel merkte ik dat leerlingen dit soort opgaven niet gewend zijn om te maken. Als je een dergelijke opgave kiest om leerlingen aan te laten werken, is het wel belangrijk dat je goed in de gaten houdt wat leerlingen doen (zijn ze de opgaven aan het maken, of zijn ze echt aan het uitleggen waarom wel of niets kan).

**Feedback referent**

* Bedenk dat dit een goede opdracht was maar met een erg beperkt doel.
* Leg-uit vragen zijn een goed middel en “Omdraai-vragen”, bijvoorbeeld:
  Onderzoek hoe groot gemiddelde en SD zijn als je weet dat 2,5 % van langer is dan … en 16 % korter is dan …

## Toenamediagrammen

**Startprobleem** Anneke Veenstra

Getal en Ruimte Klas 4 VWO A, H7: toenamediagrammen

**WDA Ordenen en structureren**

**Context**
Leerlingen hebben de theorie nog niet gehad. Wat kunnen ze zelf te weten komen?

**Vraag**
Leerlingen zoeken plaatjes van grafieken die op internet makkelijk te vinden zijn, of ik maak er zelf een paar. Zorg ervoor dat er een staafdiagram is met zowel staafjes in het positieve gedeelte als staafjes in het negatieve gedeelte. Stel vragen als: wat is er in het jaar …. gebeurd met de omzet? Of in welk kwartaal daalde de omzet? Vervolgens aan het einde van de les de grafiek weer terugpakken en de leerlingen er een tabel bij laten maken.

**Evaluatie**
Ik heb deze opdracht wegens andere lesactiviteiten nog niet uitgevoerd, aangezien ze deze week toetsweek hebben.
Er staan ook genoeg geschikte opdrachten in het boek, als je de a-, b-, c-vragen weglaat.

**Feedback referent**
- In potentie is dit een goed idee dat verder moet worden uitgewerkt.
- Het maakt voor het bevorderen van het denken van de leerlingen bij dit onderwerp een groot verschil als ze zelf op zoek mogen gaan naar grafieken en diagrammen en tabellen of dat ze weer een sommetje uit het boek moeten maken. Bijvoorbeeld als volgt.

*** Vraag voor groepswerk**
Verzamel op internet een tiental heel verschillende grafieken/diagrammen waarin data over een verband tussen twee grootheden uit een economisch of maatschappelijk probleem/onderzoek zijn weergegeven.
Maak bij elk van die figuren een tabel waarin je de toename of afname van de afhankelijke variabele (afgezet tegen de verticale as) per eenheid van de onafhankelijke variabele (afgezet op de horizontale as) vastlegt.
Beschrijf in woorden hoe het verloop van het verband is en welke conclusies er zijn te trekken.

*** Verwachtingen**
Leerlingen zullen enthousiast met hun mobiel grafieken/diagrammen opzoeken en worstelen met de manier waarop ze zo’n tabel met toenamen/afnamen moeten maken. De docent wandelt wat rond bij de groepjes.

*** Leereffect bij leerlingen**
Leerlingen leren de chaos van al die grafieken/diagrammen te ordenen en structureren en de goede vragen te stellen aan die visualisaties.

**Evaluatie**
Op het digibord of internet komen de verzamelde grafische weergaven met de bewerkingen door de groepjes. In de bespreking vallen termen als trend en kunnen aansluitend uit de tabellen de toenamediagrammen worden opgebouwd.
De sommetjes uit het boek slaan we nu maar over.

## Racecircuit

**Startprobleem** Rob Wieleman

Getal en Ruimte Havo Wiskunde A deel 2, Paragraaf 5.3 Toenamendiagrammen

**WDA Modelleren**

**Context**
Het modelleren van een situatie in een grafiek en vanuit de grafiek ze een toenamendiagram laten tekenen.

**Vraag**
Ik heb een racecircuit getekend met vier bochten en een startpunt (en rijrichting). Ik heb gevraagd of ze een grafiek van de snelheid uitgezet tegen de tijd wilden tekenen. Deze op het bord laten zetten (groepjes van vier leerlingen; 6 groepen in totaal).
Daarna de grafieken vergeleken en daaronder een grafiek van acceleratie tegen de tijd[interval]. "Wanneer rem je en wanneer gas je" / "Wanneer gaat de auto sneller".

**Verwachtingen**
Dat ze een grafiek zouden tekenen met een argumentatie en dat ze nadachten over wanneer de snelheid toenam en afnam.

**Reacties van leerlingen**
In het begin onwennig, want erg weinig informatie (snelheid, tijd, hoe lang de baan was, etc.). Daarna allerlei discussies over auto's, versnellingsbakken, wanneer op topsnelheid etc.

**Leereffect bij leerlingen**
Het beklijven en het door hebben wat toenamediagrammen zeggen en voorstellen moet ik nog afwachten. Ik hoop dat ze de rest van de paragraaf nu snel door hebben en het principe inzien.

**Evaluatie**
Ik vond het leuk, maar het duurde de hele les (45 min) inclusief de vertaalslag naar de wiskunde. De leerlingen zijn niet gewend om in groepjes te werken en samen tot een eensgezinde conclusie/grafiek te komen.
Ik vond het dus leuk dit met de leerlingen te doen. Ik zal het de volgende keer korter doen, meer docentcentraal zodat het maximaal maar 15 minuten duurt. Dit hangt echter mede van het onderwerp af. Ik vond hier de begripsvorming wel erg belangrijk. Ik merk dat sommigen geen clou hebben van wat toenamediagrammen zijn. Ik hoop dat dat nu beter gaat/is.

**Feedback referent**
- Een aardige WDA om toenamediagrammen aan een praktische situatie te koppelen. Grijp niet te snel in en laat de leerlingen het werk doen. Dat kost tijd!
- Leerlingen mogen hier zelf een grafiek bij verzinnen? Of waren er meer gegevens bekend?
- Overeenkomsten gezocht in de zin van ‘lagere snelheden in de bochten’, ‘remmen voor de bocht’ en dergelijke?
- Waar komt het tekenen van een toenamediagram om de hoek kijken?
- Ik adviseer je dringend om het niet korter te doen. Het effect van de WDA, het denken van leerlingen bevorderen, zal daardoor grotendeels verdwijnen.

## Regels recapituleren

**Samenhang versterken** Hanneke Bakkum

Moderne Wiskunde 5 VWO wiA, Voorkennis van hoofdstuk over logaritmische functies

**WDA Formules manipuleren**

**Context**
Voorkennis recapituleren, voorafgaand aan logaritmische functies.

**Vraag**
- De leerlingen moesten zelf bij iedere rekenregel een getallenvoorbeeld geven.
- Daarna moesten ze een rijtje opgaven (overgenomen uit het boek) maken, waarbij ze ook moesten aangeven welke rekenregel ze gebruikt hadden (ik had ze genummerd).
- Tot slot moesten ze zelf vijf mogelijke vragen bedenken bij een gegeven tabel van een exponentieel verband en deze vragen door de buurman/buurvrouw laten oplossen.

**Verwachtingen**
Dat de leerlingen de rekenregels beter zouden leren (en begrijpen/doorzien) en zelf nog eens goed hun kennis van het exponentieel verband op een rijtje zouden zetten

**Reacties van leerlingen**
Het werk moest ingeleverd worden en de leerlingen hebben goed hun best gedaan.

**Leereffect bij leerlingen**
Ik heb de indruk dat ze de rekenregels nu beter kennen en kunnen toepassen.

**Evaluatie**
Het is prettig om niet alleen maar uit het boek te werken, of daar in ieder geval een geheel eigen draai aan te geven. Het is ook een gemakkelijk toepasbare manier van activerende didactiek.

**Feedback referent**
* Veel hangt af van de kwaliteit van de opgaven.
* Opgaven waarbij de rekenregels wel of niet goed zijn toegepast?
* Leg uit waarom die regel klopt.
* Zie ook Opdracht 6.2.b *Gelijkwaardige formules.*

## Transformaties sinusoïden

**Samenhang formule-grafiek versterken** Rogier Boers

Getal en Ruimte vwo B deel 2, hoofdstuk 6 (goniometrische formules) paragrafen 3 en 4 (transformaties bij sinusoïden & sinusoïden tekenen)

**WDA Abstraheren Probleemoplossen**

**Context**

Beter begrip ontwikkelen van het concept *transformatie*; de relatie tussen formule en grafiek bij goniometrische functies.

**Vraag**

De vraag luidde: teken bij de gegeven grafieken, waarbij formules gegeven waren, een correct assenstelsel met schaalverdeling. (Een omkeervraag.)
Als 'opwarmer' waren er twee parabolen gegeven; één met formule in de vorm
$y = a(x-b)^2 + c$ .
De opdracht werd in groepjes van 2, 3 of 4 leerlingen gedaan.

**Verwachtingen**

Ik verwachtte dat de leerlingen het 'eens wat anders' zouden vinden. Ik hoopte dat de leerlingen er voldoende van op zouden steken, omdat het een wat meer tijdrovende aanpak is.

**Reacties van leerlingen**

De leerlingen vonden het aanvankelijk best moeilijk, maar er werd goed gepraat over het probleem. Ik heb aan het eind van het uur enkele leerlingen gevraagd wat hun bevindingen waren. Ze waren enthousiast: het was wel moeilijk, maar wel leuk en ook leerzaam.
Ook een paar jongens die aanvankelijk in hun luie houding zaten, gingen best snel echt aan de slag en vonden het wel leuk.

**Leereffect bij leerlingen**

Goed. Ze vonden het erg nuttig en zeiden translaties nu beter te snappen.

**Evaluatie**

Ik was blij te zien dat de leerlingen echt in gesprek gingen met elkaar en er veel van op staken. Er werd actief meegedaan en dat was mooi om te zien. De leerlingen waren er langer mee bezig dan ik aanvankelijk had verwacht.
Wees zelf enthousiast, dat werkt door.

**Feedback referent**

* "Omkeervragen" zijn geschikt om het abstraheren te bevorderen, wegens de andere invalshoek.
* De parabolen zijn als *hint* bedoeld, want daaraan kunnen ze het principe zelf ontdekken.
* "Tijdrovend" is het als je iets telkens weer moet herhalen, omdat ze het niet snappen maar proberen te memoriseren.
* Een wat uitdagende opdracht waar ze toch samen mee aan de slag kunnen en over kunnen praten heeft echt een ander effect dan het direct uitleggen.

## Een sinusoïde

**Samenhang formule-grafiek versterken** Henk de Waal

Moderne Wiskunde V4WB 10e editie, Hoofdstuk 7-5

**WDA Abstraheren Probleemoplossen**

**Context**
Inzicht versterken in transformaties/translaties.

**Vraag**
Gegeven op digibord het functievoorschrift en de grafiek van de functie
$f(x) = 2\sin(0,5(x - 0,5\pi)) + 1$
Geen assen, wel rooster met als verdeling horizontaal elk "hokje" $0,5\pi$ en verticaal elk "hokje" 1.
De opdracht aan de leerlingen is: Neem de grafiek over en teken de bijbehorende assenverdeling.

**Verwachtingen**
Zien wat het wordt.

**Reacties van leerlingen**
Leerlingen zijn enthousiast aan het werk geweest om deze puzzel op te lossen.

**Leereffect bij leerlingen**
Beter inzicht in translaties/transformaties.

**Evaluatie**
Leuk om leerlingen enthousiast bezig te zien. Nuttige oefening.

**Feedback referent**
* "Omkeervragen" zijn vaak geschikt om het abstraheren te bevorderen, wegens de andere invalshoek.
* Hebben ze er in groepjes aan gewerkt? Samen over praten helpt met het abstraheren.
* Een enkele activiteit alleen zal niet blijvend tot beter inzicht leiden.

## Analyseprobleem

**Samenhang versterken** Wout van Dijk

Getal en Ruimte wiskunde B 6 vwo

**WDA Probleemoplossen**

**Context**
Goniometrie: herhaling integreren, differentiëren, vergelijking raaklijn, vergelijking oplossen met GR. Leerlingen werken aan een groot probleem in tweetallen.

**Vraag**
Gegeven $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0, \pi]$.

Op $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ kiezen we op de grafiek van $f(x)$ een punt $P$ met $x_P = p$. De loodlijn vanuit $P$ op de $x$-as snijdt de $x$-as in $Q$. De raaklijn aan de grafiek van $f$ door $P$ snijdt de $x$-as in $R$.
$V$ is het oppervlak tussen de grafiek van $f$ en de lijn $OP$.
Bereken voor welke waarde van $p$ geldt: $O_V = oppervlakte\,\Delta(PQR)$.

**Verwachtingen**
- Ingewikkeld probleem, gepresenteerd zonder tekening
- De tekening zou de eerste benodigde hint zijn.
- Een groepje vraagt om een hint indien nodig.
- Verwachting is dat het probleem te ingewikkeld is.

**Reacties van leerlingen**
Iedere groep begon met het maken van een tekening.
De eerste weg te geven hint was: hoe kom ik aan $b$ in $y = \cos(p) + b$.
- Na afloop: nuttige oefening.
- Leuk bedacht.
- Na 1 fout was ik te ontmoedigd om verder te gaan.

**Leereffect bij leerlingen**
Bedoeld was het hele scala te herhalen, zoals boven benoemd t/m vergelijking oplossen per GR. In een enkele groep zijn ze gegeven de tijd zover gekomen.

**Evaluatie**
Fijn dat iedereen meteen op gang kwam. Iedereen had de tekening zelf bedacht.
Een aantal werkstukken heb ik mee naar huis genomen om op mijn gemak de rekenfouten eruit te halen.
Goede V6- opdracht.

**Feedback referent**
* Zo'n groot probleem is uitstekend geschikt om de samenhang in de kennis van leerlingen te versterken.
* In het algemeen is het door alle leerjaren heen goed om nu en dan, bijvoorbeeld per twee maanden, een groot probleem te laten maken dat een beroep doet op gevarieerde wiskundige kennis.
* Aan de hand van zo'n groot probleem kan ook de probleemaanpak worden nabesproken en waar nodig verbeterd.

## Betekenis afgeleide

**Samenhang versterken** Afke van Theije

Getal en ruimte VWO 4$^e$ klas, B1-H3 of AC2-H7, laatste paragraaf: afgeleide

**WDA Abstraheren**

**Context**
Recapitulatie begrippen eerste hoofdstuk over afgeleide door open vraagstelling.

**Vraag**
Stelling waarbij ze moesten kiezen:
Altijd waar (bewijs!) / soms waar (wanneer wel/niet) / nooit waar (bewijs).
Stelling: als de afgeleide nul is, dan heb je te maken met een top.

**Verwachtingen**
Dat ze op het begrip buigpunten uit zouden komen.

**Reacties van leerlingen**
Leuk, ze gingen aan de slag en kwamen met heel veel originele functies.

**Leereffect bij leerlingen**
Het beoogde effect.

**Evaluatie**
Enthousiast over alle goede en foute antwoorden, die ik dan ook weer leuk kon toelichten. Ik heb het gehad over absoluutstrepen, differentieerbaarheid, echt hogere wiskunde. Collega's, deze doen!

**Feedback referent**
* Heel goed om na een hoofdstuk met nieuwe begrippen en regels even terug te kijken.
* Een goede opdracht werkt beter dan een opsomming van wat ze hebben moeten leren.
* Dit type opdracht is vaak te gebruiken, dus een bewering die met voorbeelden, non-voorbeelden en redeneringen moet worden onderzocht.
* De eigen productie van functies leidt tot verdieping (abstraheren) omdat er geen simpele regel bekend is en bereidt meteen voor op een vervolg.

## Economische formules

**Gemengde problemen** Klaas de Wit

Getal en Ruimte, Ed 2007 VWO A, Hoofdstuk 12, paragraaf 4 Formules in de economie

**WDA Probleemoplossen Abstraheren**

**Context**
De leerling moet het verband tussen een afgeleide en de oorspronkelijke formule/grafiek opzoeken. Voor deze leerlingen is dat abstraheren tot over de grens van hun repertoire.

**Vraag**
Er zijn twee opdrachten:
Bij opdracht 1 krijgt de leerling een grafiek van de marginale opbrengst, met de opdracht om een formule te maken voor de opbrengst. Vervolgens moet daaruit de prijs-afzetfunctie worden bepaald. Als laatste moet de prijs-afzetlijn worden getekend.
Opdracht 2 is precies andersom: de prijs-afzetlijn is gegeven, R moet worden bepaald en daarna MR. Daarvan moet de grafiek worden getekend.
Vervolgens worden de leerlingen gekoppeld in tweetallen en vergelijken ze elkaars uitkomsten.

**Verwachtingen**
Mijn verwachting is dat opdracht 1 iets moeilijker zal zijn voor de leerlingen, daar moeten zijn gaan primitiveren, wat zij nog nooit gedaan hebben.

**Reacties van leerlingen**
Tot mijn vreugde gingen de leerlingen direct aan de slag. Maar… de opdracht: van MR naar R bleek echt een probleem. Ook voorkennis die ik bekend veronderstelde (formule opstellen bij een lijn) bleek niet paraat. Dat maakte het erg lastig.

**Leereffect bij leerlingen**
Het was meer een schokeffect dan een leereffect. Sommige leerlingen hadden het bij economie al min of meer behandeld, zij snapten niet wat anderen moeilijk vonden. Anderen vonden het zo vaag dat zij de koetjes en kalfjes boeiender vonden…
Hierdoor werd later uitwisselen in tweetallen lastig…

**Evaluatie**
Een aardig experiment. Maar op deze wijze met leerlingen nadenken vraagt ook opvoeding van de leerling (en van de docent). Halverwege V5 dit plotsklaps introduceren is niet echt aan te bevelen.
Ben ik dan verloren voor WDA? Welnee, maar ik besef wel dat er nog een lange en boeiende weg voor mij ligt.
Bezint eer ge begint. Maak kleine stapjes, dan zullen leerlingen wellicht beter meegaan. Maar ook: durf gewoon eens een les in de soep te laten lopen. Je leert er veel van!

**Feedback referent**
- Wellicht beter haalbaar voor deze leerlingen als ze de grafiek van R uit MR moeten tekenen? Zeker ook WDA.
- De leerlingen met economie in de tweetallen koppelen aan de andere leerlingen?
- De opdracht moet zowel uitdagend als haalbaar zijn. Dan kun je op elk moment beginnen.
- Vooraf controleren of de benodigde parate vaardigheid (hier het opstellen van de vergelijking van een lijn) wordt beheerst, anders blokkeert dat de voortgang van de WDA.

## Optimale oppervlakte

**Gemengde problemen** Harrie van Dieren

Getal & ruimte, editie 10, havo-4 wiskunde B, hoofdstuk 7 par 2

**WDA Probleemoplossen**

**Context**
Wat zijn de ideale afmetingen voor een zo groot mogelijke oppervlakte (optimaliseren).

**Vraag**
Ik had 2 rechthoeken geschetst. Met daarbij variabele afmetingen. Hieromheen werd gaas gezet van een bepaalde lengte, die voor beide figuren dezelfde was. Wat is de oppervlakte van beide figuren? De tweede die wat meer op een vierkant leek had een grotere oppervlakte. Daarna de vraag gesteld: wat moeten de afmetingen zijn, om een zo groot mogelijk oppervlakte te krijgen?

**Verwachtingen**
Een heel lastige, na de vorige hoopvol. Maar viel iets tegen.

**Reacties van leerlingen**
Ze konden het rekenwerk wel, maar kwamen niet tot de conclusie. Toen we daarna samen wel tot dit resultaat zijn gekomen was het eigenlijk voor hen wel logisch dat het zo was.

**Leereffect bij leerlingen**
Dat je met gelijke hoeveelheid gaas verschillende oppervlakten kunt maken → eye –opener. Uiteindelijk landde de uitkomst wel beter dan gewoonlijk.

**Evaluatie**
Dit was het niet helemaal. Dit moet nog meer overdacht worden. Toch beter geland dan bij een gewone les over dit onderwerp.
Samen leren is veel krachtiger dan als docent maar dingen uitleggen.

**Feedback referent**

* Samen tot resultaat komen in de groepjes of door een leergesprek?
* Ging het om het mathematiseren, dus zo iets als omtrek 24, $L + B = 12$, oppervlakte $L(12 - L)$?
* Het kan natuurlijk ook met een tabel, maar dan heb je een ander doel.
* Zie ook opdracht 7.4.3.a *Bakje vouwen.*

## Samengestelde rente met periodieke storting

**Startprobleem** Hugo Adema

Moderne Wiskunde VWO4 wiskunde B, Hoofdstuk 7

**WDA Modelleren Probleemoplossen**

**Context**

Elke maand storten wij € 25, - op de spaarrekening van onze zoon. Daarop krijgt hij maandelijks 0,2% rente. Die ook maandelijks wordt bijgeschreven.

**Vraag**

Geef een (directe) formule waarmee het gespaarde kapitaal na $t$ maanden kan worden berekend.

**Hulp(vragen)**

- Maak een tabel voor de eerste paar maanden.
- Controleer of het exponentieel of lineair groeit.
- En iets later: Het gezochte model is een verschoven exponentieel verband.

**Verwachtingen**

Dat iedereen in ieder geval op weg kon komen door de hulpvragen en dat een aantal leerlingen met wat prutsen wel uit de gevraagde formule zouden komen.

**Reacties van leerlingen**

Ze gingen enthousiast aan de slag met de opdracht (het is sowieso een leuke klas).
Een aantal leerlingen met wiskunde D kwamen wel meteen met de recursieve formule (maar ik wilde de directe). En één leerling met M&O had meteen een kant-en-klare formule, maar dan in de vorm van de som van een meetkundige rij.
Uiteindelijk heb ik toch een stuk zelf wat moeten bijsturen om te komen tot de vorm $y = a + b \cdot g^t$. Daarna kwamen er wel enkele leerlingen op de gevraagde formule.

**Leereffect bij leerlingen**

De voorkennis over exponentiële groei is weer even opgefrist.
Ze hebben geoefend met het maken van een model.

**Evaluatie**

Ik heb het als een hele nuttige en leuke les ervaren. De leerlingen werkten in groepjes van 3/4 leerlingen aan deze opdracht en er werd goed over het vraagstuk gediscussieerd.

**Feedback referent**

* Het leerdoel is duidelijk, evenals het specifieke WDA kenmerk.
* De opdracht heeft een goede potentie maar of hij zo geschikt is om voorkennis op te halen lijkt me twijfelachtig. Je hebt gemerkt dat je hulpvragen moest formuleren en aardig moest bijsturen en helpen.
* Hij lijkt me meer geschikt als afronding van de stof over exponentiële functies.

## Combineren kennis van differentiëren

**Samenhang versterken** Folkert Schuddeboom

Moderne Wiskunde negende editie, Hoofdstuk 2

**WDA Probleemoplossen**

Toepassen en combineren van de kennis van grafieken zoals de raaklijn, buigpunt, stelsel vergelijkingen en nulpunten.

**Context**

Voorgaande jaren: Voorkennis (nulpunten).

**Differentiëren, betekenis eerste en tweede afgeleide.**

Leerjaar 5: 2-2 Hellingen en raaklijnen.
2-4 Buigpunten 4-3 stelsels vergelijkingen.

**Vraag**

Er wordt door middel van bovenstaande kennis de $a$, $b$, $c$ en $d$ berekend van de functie: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Deze denkactiviteit is sterk gericht op de stof voor het eindexamen. De leerlingen worden aangesproken op het herkennen en toepassen van de voorkennis. Het doel is het herhalen van de stof op een motiverende manier in gang zetten en het bevorderen van oplossingsstrategieën op examenniveau. Zie bijlage.

**Verwachtingen**

Dat de opgave passend is voor het havo-niveau, maar aan de moeilijke kant voor de groep waar ik op dit moment aan les geef.

**Reacties van leerlingen**

In het begin hebben ze geen idee wat ze met deze opgave aan moeten, maar naarmate ze verder komen worden ze enthousiaster en willen ze het antwoord zelf uitrekenen.

**Leereffect bij leerlingen**

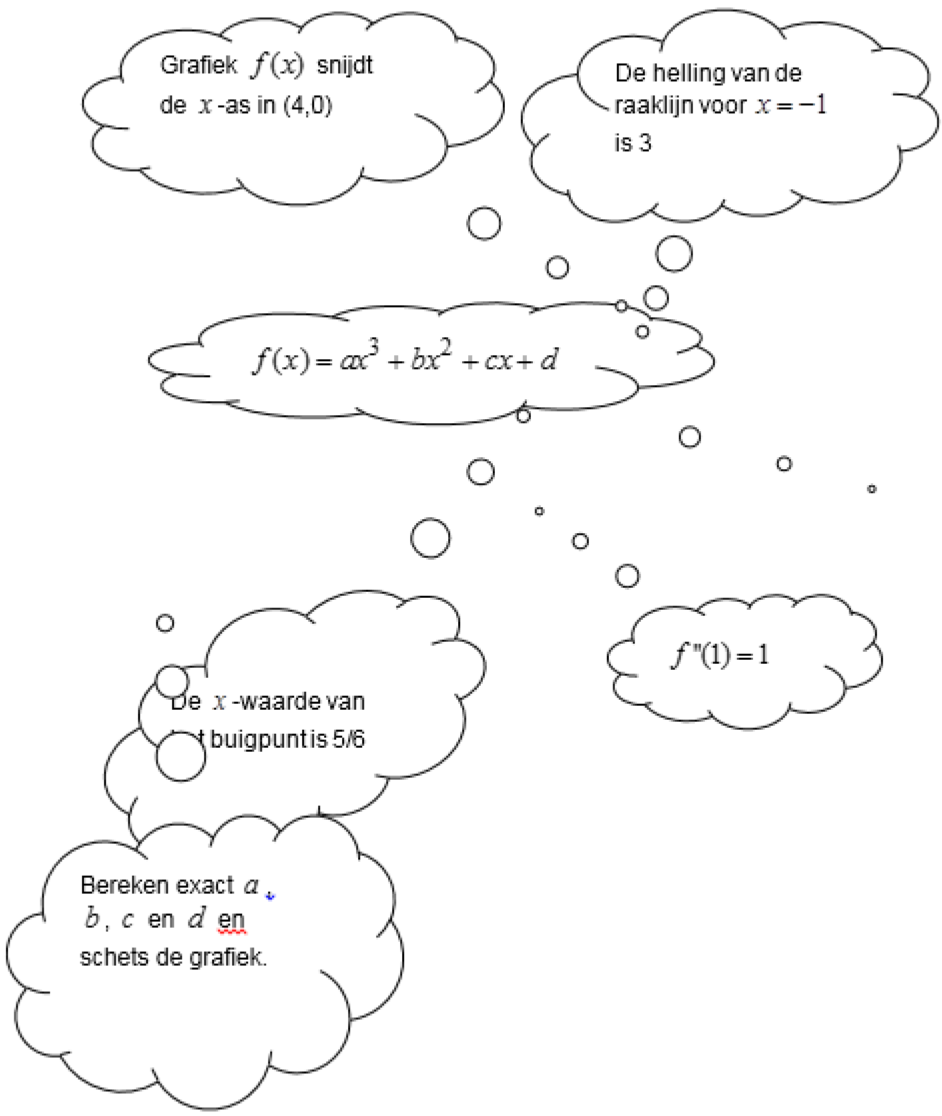
Een van de leereffecten is het ontdekken dat je op een gegeven moment de hele opgave zelf kunt maken, ook als je eerst denkt er niks mee te kunnen.
Een ander effect was toch wel dat veel leerlingen in de gaten kregen dat ze nog eens goed naar de stof gaan kijken. Dit sluit mooi aan op de doelstelling van deze WDA.

**Evaluatie**

Enigszins bezorgd om de leerlingen die de opdracht (met hulp) niet konden oplossen.
Ik denk dat dit soort opgave leerlingen vaardiger maakt in het oplossen van (echte) problemen en ik ben van mening dat dit soort opdrachten motiverend werk. Ik raad collega's dit soort opdrachten aan.
Het nadeel is de tijd die het kost goede WDA's te vinden.

**Feedback referent**

- Het leerdoel is duidelijk. Er zitten allerlei elementen van WDA's in, zoals ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren. Zie ook 7.1 in deze publicatie.
- De opdracht heeft een hele goede potentie!
- Inderdaad geschikt als afronding van de stof over differentiëren.
- De opgave lijkt me echter niet geschikt voor havo, omdat de tweede afgeleide en buigpunten geen examenstof (meer) zijn. Prima voor wiskunde B vwo.
- Deze opdracht is ook een prima toetsvraag!



## Kritisch beoordelen van conclusies uit data

**Gemengde problemen** Harry Brinkman

Moderne wiskunde, 10 editie wiskunde A 4 HAVO, Hoofdstuk 6 Tabellen en grafieken 6-3, 6-4 en 6-5

**WDA Modelleren Ordenen Structureren**

**Context**

Weten waarom: verantwoorden en begrijpen op basis van welke gegevens welke conclusies getrokken mogen worden en wat de beperkingen van het gevonden model zijn.

**Vraag**

Het ministerie van Economische Zaken geeft de opdracht een geargumenteerde voorspelling te doen betreffende de hoogte van de brandstofprijzen in 2030.
Werk deze opdracht uit; vermeld bronnen en uitgangspunten en geef een verantwoording in de vorm van tabellen, grafieken, formules en berekeningen.

**Verwachtingen**

+ enthousiast zijn over de opdracht; gebruik van o.a. mobiel, creativiteit, presentatietalent; nadenken over de wijze waarop extrapolatie gebaseerd gaat worden; goede samenwerking
- op basis van te weinig gegevens en op te korte termijn gaan extrapoleren;
  niet het “gezonde verstand” gebruiken t.a.v. uitkomsten;
  slordig zijn met het maken van grafieken.

**Reacties van leerlingen**

Waar te nemen:

- Enthousiast aan het werk, leuke producten, gemotiveerd, opdracht vonden ze interessant
- Aarzelingen en vragen: we hebben geen tabel, hoe moet dat? vraagt u de prijs aan de pomp?
- We hebben één antwoord, was toch de brandstofprijs? O, ook diesel en gas?
- Vanaf wanneer moet je eigenlijk de prijsontwikkeling erbij betrekken? Waarom?

**Leereffect bij leerlingen**

Kunnen verantwoorden wanneer je kunt volstaan met twee getallen uit een tabel of dat je beter de trendlijn die alle getallen uit de tabel betrekt, kunt nemen als uitgangspunt.

**Evaluatie**

Goed gevoel dat de leerlingen scherper voor ogen gekregen hebben hoe je afhankelijk van de vraag en situatie van extrapoleren gebruik maakt. Moet je bijvoorbeeld de prijs van twee dagen, maanden, jaren voorspellen? Gaat het om producten die prijsgevoelig zijn, etc.?
Vooraf in de les wel praten over de bijzonderheden van prijsontwikkelingen. De brandstofprijzen bijvoorbeeld hebben in de eerste helft van dit jaar in vergelijking met een jaar geleden toch “vreemde” dingen laten zien. Dit gaf aanleiding tot een zeer geanimeerd leergesprek: extrapoleren is dus niet altijd even gemakkelijk.
Leerlingen in groepen van drie laten samenwerken. Mobiel gebruiken is toegestaan.
Resultaat laten meetellen als deel van de eindtoets over dit hoofdstuk. (Leerlingen zijn bij mij gewend punten te verdienen met opdrachten, dat hoeft natuurlijk niet altijd! Moet ook zonder punten kunnen.)

Ben, nogmaals, zeer tevreden over de houding die ik meen te herkennen bij deze groep: deze is wat dit hoofdstuk betreft veel kritischer geworden in vergelijking met de houding van 4 havo leerlingen van voorgaande jaren. Het hoeft niet te betekenen dat het zo blijft. Daar zal ik aan moeten blijven werken.

**Feedback referent**

* Spreekt voor zich. Past helemaal in het bevorderen van het wiskundig denken door leerlingen.

# Referenties

Bor – de Vries, M., & Drijvers, P. (2015). *Handreiking Denkactiverende wiskundelessen.* Opgehaald van: http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/2015_nro_wda.pdf

cTWO. (2007). *Rijk aan betekenis.* Utrecht: Universiteit Utrecht.

cTWO. (2012). *Denken & Doen, wiskunde op havo en vwo per 2014.* Utrecht: Universiteit Utrecht.

Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwaneveld, B. (Eds.). (2012). *Handboek wiskundedidactiek.* Utrecht: Epsilon.

Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT*. Utrecht: Universiteit Utrecht.

Krüger, J. (1946). *Actoren en factoren achter het wiskundecurriculum sinds 1600.* Utrecht: Universiteit Utrecht.

Palha, S. (2013). *Shift-problem lessons.* Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Roorda. G. (2012). *Ontwikkeling in verandering.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Smid. H.J. (1997). *Een onbekookte nieuwigheid?* Delft: Technische Universiteit Delft.

Streun, A. van (1989). *Heuristisch wiskundeonderwijs.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Streun, A. van (2001). *Het denken bevorderen.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Streun, A. van. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten.* Enschede: SLO.

Tolboom, J. (2012). *The potential of a classrooom network to support teacher feedback.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Witterholt, M.G. (2015). *Mathematics teachers' development of practical knowledge.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

# Lijst van voorbeelden

SLO heeft als nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling een publieke taakstelling in de driehoek beleid, praktijk en wetenschap. SLO heeft een onafhankelijke, niet-commerciële positie als landelijke kennisinstelling en is dienstbaar aan vele partijen in beleid en praktijk.

Het werk van SLO kenmerkt zich door een wisselwerking tussen diverse niveaus van leerplanontwikkeling (stelsel, school, klas, leerling). SLO streeft naar (zowel longitudinale als horizontale) inhoudelijke samenhang in het onderwijs en richt zich daarbij op de sectoren primair onderwijs, speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs en beroepsonderwijs. De activiteiten van SLO bestrijken in principe alle vakgebieden.

SLO

Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
E info@slo.nl

www.slo.nl

Foto omslag: Shutterstock

slo