# Wetenschapsoriëntatie bij wiskunde in de tweede fase vwo

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

slo

# Wetenschapsoriëntatie bij wiskunde in de tweede fase vwo

Juli 2015

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording



**Auteur:** Sieb Kemme

**Informatie**
SLO
Afdeling: tweede fase
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 666
Internet: www.slo.nl
E-mail: tweedefase@slo.nl

**AN:** 3.7403.648

# Inhoud

# 1. Inleiding

Het wetenschappelijk gehalte van het vwo houdt menige school bezig. De aansluiting op het wetenschappelijk onderwijs is nog steeds voor verbetering vatbaar. Her en der slaan vwo-scholen en universiteiten daar de handen voor ineen. Het wo zet zich daarbij in voor intensievere en meer interactieve studievoorlichting; het vwo voor meer academische vorming, bijvoorbeeld via een leerlijn onderzoeksvaardigheden, of voor meer wetenschapsfilosofische voorbereiding. We vatten de opties die vwo-scholen hebben voor voorbereiding op het wo samen in de term *wetenschapsoriëntatie*.

Een aanbod wetenschapsoriëntatie op school hoeft zich niet in één vak de concentreren, er zijn juist veel vakken die er iets in te bieden hebben, en waaraan, omgekeerd, wetenschapsoriëntatie iets te bieden heeft. Het arrangeren van bijdragen uit verschillende vakken vraagt onderzoek en discussie op schoolniveau. SLO helpt scholen bij die discussie met documentatie, informatie en vragen op de site www.wetenschapsorientatie.slo.nl.

*Wetenschapsorïentatie bij wiskunde in de tweede fase* benadert wetenschapsoriëntatie van één kant: de aansluiting met het vak wiskunde. De publicatie laat die aansluiting op twee niveaus zien: dat van eindtermen en sommige syllabusspecificaties, en dat van toetsopdrachten. Ze bevat geen uitgewerkte lesvoorbeelden, al is het een logische volgende stap om die te ontwikkelen. Binnen de begrensde tijd was daar tot nu toe geen mogelijkheid voor. Uiteraard kunt u de toetsopdrachten als lesmateriaal gebruiken, al dan niet in gewijzigde vorm. Ook voor andere vakken is op de website www.wetenschapsorientatie.slo.nl materiaal te vinden.

**Vraagstelling**
Kan het vak wiskunde vwo-leerlingen mede voorzien van de academische vaardigheden, wetenschapsfilosofische inzichten en wetenschappelijke overzichtskennis die, ook vanuit hun toekomstperspectief, van hen verwacht mogen worden?
Zo ja, welke leerstof en (toets)opdrachten lenen zich daar dan het beste voor?

**Kennis en vaardigheden van Wetenschapsoriëntatie**

De wetenschapsoriëntatie omvat de volgende drie domeinen.

**A** **Academische vaardigheden**, zoals:
- onderzoeksvaardigheden
- informatievaardigheden
- argumentatievaardigheden
- presenteren
- evalueren
- reflecteren

**B** **Wetenschapsfilosofie**, waarbij vijf kernvragen centraal staan:
- (a) Hoe komt wetenschappelijke kennis tot stand?
- (b) Hoe wordt wetenschappelijke kennis gebruikt?
- (c) Hoe bepaal je de betrouwbaarheid van wetenschappelijke kennis?
- (d) Hoe beïnvloeden samenleving en wetenschap elkaar?
- (e) Mag alles wat kan?

**C** **Overzichtskennis**:
- de grote verhalen van de wiskunde, zoals: een bewijs van de stelling van Pythagoras, priemgetallen, niet-euclidische meetkunde, de stelling van Fermat, de driedeling van een hoek;
- binnen de samenleving actuele wetenschappelijke thema's als: orde en chaos, codering van gegevens, toeval en kans, dynamische systemen, beweren en bewijzen;
- binnen de samenleving actuele (natuur)wetenschappelijke thema's als: duurzaamheid, globalisering, informatietechnologie, gezondheid en zorg.

# 2. Wat kunnen wiskunde en wetenschapsoriëntatie voor elkaar betekenen?

Wetenschapsoriëntatie vanuit wiskunde betekent voor vwo leerlingen kennismaken met wiskunde áls wetenschap en met wiskunde ín wetenschap. Vanuit of binnen de wiskundeprogramma's A,B,C en D zal gezocht worden naar aanknopingspunten met de positie van wiskunde in het geheel van wetenschappen, inclusief wiskunde zelf.

## 2.1 De positie van wiskunde in de wetenschap

Wiskunde neemt in de wetenschap een speciale positie in door de wijze van verkrijgen van kennis. Waar bijvoorbeeld natuurwetenschappen gebaseerd zijn op kennis op basis van het ontbreken van een falsificatie, bouwt wiskunde haar kennis op uit zuivere afleiding uit haar uitgangspunten. Wiskundige kennis is derhalve niet toetsbaar met experimenten. Waar natuurwetenschappelijke kennis *per definitie* voorlopig is, is wiskundige kennis pas kennis als hij is bewezen en definitief is, maar dan ook *per definitie* definitief.
De vraag is dan ook bij welk soort wetenschappen wiskunde gerekend moet worden. Doordat de wiskunde veelal door problemen uit de natuurwetenschappen is geïnspireerd en ook vooral zijn toepassingen vindt in die wetenschappen, wordt de wiskunde veelal bij de natuurwetenschappen ingedeeld of in bredere zin bij de bètawetenschappen. Dit ondanks het verschil in wijze van verkrijgen van kennis. In een moderne kijk op de filosofie van de wiskunde wordt er echter, in navolging van Imre Lakatos, op gewezen dat ook wiskunde in wezen zijn kennis vermeerdert door een empirische kijk. Er wordt, vaak na aanwijzingen in rekenwerk, een vermoeden geuit waarvoor bevestiging wordt gezocht middels een wiskundig bewijs.
Door zijn strikte redeneerwerk en methodologie heeft wiskunde ook veel gemeen met filosofie. Met name de logica en grondslagen van de wiskunde zijn duidelijke overlapgebieden. Met dat in het achterhoofd zou men wiskunde ook bij de alfawetenschappen in kunnen delen. Wiskunde houdt zich bezig met producten van de menselijke geest.
(Bron: http://nl.wikipedia.org/wiki/Wiskunde)

Het is algemeen bekend dat de ontwikkeling van de wiskunde als wetenschap van onmisbare betekenis is geweest voor de ontwikkeling van de gehele wetenschap. Dat geldt voor de vroegst bekende wetenschap tot en met heden en strekt zich uit tot steeds omvangrijker wetenschapsgebieden. De volgende voorbeelden mogen dit illustreren:

- de stelling van Pythagoras, reeds voor de Griekse meetkunde bekend in China en India;
- astronomische rekentabellen in het Babylonische rijk;
- ontwikkeling van Griekse theorieën over het zonnestelsel aan de hand van meetkundige principes;
- zwaartepuntberekeningen van Archimedes;
- de deductieve opzet van wetenschap naar het voorbeeld van de Elementen van Euclides;
- het gebruik van perspectief in de schilderkunst;
- Newton: differentiaal rekening bij het beschrijven van de zwaartekracht;
- het gebruik van tensorrekening in de algemene relativiteitstheorie;
- statistiek in de medische en sociale wetenschappen;
- dynamische modellen in de natuurwetenschappen, economie en de sociale wetenschappen.

In bovenstaande voorbeelden ontwikkelt de wiskunde zich in samenhang met de (natuur)wetenschappen of wordt wiskunde als kant-en-klaar instrument ingezet bij de ontwikkeling van wetenschap.
Daarnaast ontwikkelt wiskunde zich als autonome wetenschap, los van toepassingen in welke vorm dan ook. Te denken valt aan:

- de vele bewijzen van de stelling van Pythagoras.
- de elementen van Euclides.
- getaltheorie, waaronder de stelling van Fermat, de ontbinding van getallen in priemfactoren.
- niet-Euclidische meet kunde.
- het oplossen van veelterm-vergelijkingen met behulp van wortels.
- classificatie van meetkundige patronen.
- Cantors theorie over oneindigheid.

Hoewel deze vorm van fundamenteel wiskundig onderzoek in eerste instantie zich abstract en volkomen los van de realiteit lijkt te ontwikkelen, leiden de resultaten van dit onderzoek regelmatig tot (onverwachte) toepassingen. Bijvoorbeeld: de algebraïsche technieken die geleid hebben tot het bewijs van de stelling van Fermat in relatie tot de codering van gegevens. In die zin maakt ook dit fundamenteel onderzoek onderdeel uit van de ontwikkeling van de wetenschap als geheel.

Wiskunde speelt in relatie tot wetenschap dus een drieledige rol:

- wiskunde ontwikkelt zichzelf;
- wiskunde en (natuur)wetenschappen ontwikkelen zich in samenhang;
- wiskunde ontwikkelt zich als instrument bij overige wetenschappelijke ontwikkelingen.

Deze drie aspecten van de rol van wiskunde in wetenschap verdienen een rol binnen het onderwijs in wiskunde en wetenschapsoriëntatie.

## 2.2 De examenprogramma's wiskunde

De examens wiskunde, ook de schoolexamens, zijn over het algemeen instrumenteel van aard. De exameneisen zijn in detail gedefinieerd, met uitzondering van het keuzeonderwerp. De centrale examens bestaan uit een aantal gesloten opgaven die na een berekening of tekening tot één correct antwoord leiden. Daarin zal weinig plaats zijn voor reflecterende en evaluerende vragen.
Een daadwerkelijke bijdrage aan wetenschapsoriëntatie en wiskunde zal dan ook in het keuzeonderwerp gezocht moeten worden. Het keuzeonderwerp maakt deel uit van het schoolexamen.

Hoewel ook bij wiskunde de eisen voor het centraal examen en schoolexamen verschillen, kunnen scholen er voor kiezen om onderwerpen uit het centraal examen in het schoolexamen op te nemen. Veel scholen maken gebruik van deze mogelijkheid. Het cijfer voor het schoolexamen wordt dan bepaald door het (gewogen) gemiddelde van de proefwerkcijfers in combinatie met het cijfer voor het keuzeonderwerp.

Een uitzondering op het bovenstaande is het examenprogramma van wiskunde D. Wiskunde D is een profielkeuzevak voor de profielen N&G en N&T. Het vak is opgezet als een verdieping, bij uitstek geschikt voor leerlingen die een natuurwetenschappelijke vervolgopleiding ambiëren. Qua moeilijkheidsgraad is wiskunde D alleen te combineren met wiskunde B. Het programma biedt de keuze uit een *schoolmodel*, bestaande uit een vast aantal onderwerpen of een *wetenschapsmodel*, bestaande uit een gedeelte van de onderwerpen uit het schoolmodel, gecombineerd met een domein *Wiskunde in wetenschap*. De onderwerpen uit dit domein worden door de school aan leerlingen aangeboden en komen voort uit een aanbod van het

hoger onderwijs en kunnen, indien de school daarvoor kiest, voor elke kandidaat verschillend zijn.
Ook hier biedt een keuzeonderwerp de mogelijkheid voor een profielwerkstuk.
Wiskunde D wordt niet met een centraal examen doch als geheel met een schoolexamen afgesloten.

Onderstaande tabel geeft de relatie tussen deze programma's en de profielkeuze.

| **Profiel** | **Examenprogramma wiskunde** |
|---|---|
| C&M | C of A |
| E&M | A of B |
| N&G | A of B (en D) |
| N&T | B (en D) |

## 2.3 De plaats van Wetenschapsoriëntatie binnen de wiskundeprogramma's

Wetenschapsoriëntatie zal een eigen plaats dienen te verwerven binnen de actuele vier examenprogramma's voor wiskunde vwo: wiskunde A,B,C en D.
De tabel geeft een overzicht van de onderwerpen uit Wetenschapsoriëntatie in relatie tot de vier wiskunde programma's.
()* geeft aan dat hier mogelijkheden zijn in combinatie met het profielwerkstuk.

| | **Wiskunde** | | |
|---|---|---|---|
| | **I** | **II** | **III** |
| **Wetenschapsoriëntatie** | **onderdeel van de vakleerstof** | **onderdeel van het CE** | **mogelijk onderdeel van het SE** |
| **A Academische vaardigheden**: | | | |
| • *onderzoeksvaardigheden, m.n.: een onderzoeksvraag formuleren* | | | **(A,B,C,D)*** |
| • *informatievaardigheden*<br>gebruik van computer en grafische rekenmachine bij onderzoek van functies en statistische berekeningen. | **A,B,C,D** | | **A,B,C,D** |
| • *argumentatievaardigheden*<br>redeneren en bewijzen<br>logica | <br>**B,D**<br>**C** | | <br>**B, D**<br>**C** |
| • *presenteren* | | | **(A,B,C,D)*** |
| • *evalueren* | | | **(A,B,C,D)*** |
| • *reflecteren* | | | **(A,B,C,D)*** |
| **B Wetenschapsfilosofie**<br>met betrekking tot vijf kernvragen: | | | |
| (1) *Hoe komt wetenschappelijke kennis tot stand?*<br>– fundamenteel onderzoek (niet direct toepasbaar)<br>– toepassingen | | | **D** |

| Wetenschapsoriëntatie | Wiskunde<br>I<br>onderdeel van de vakleerstof | <br>II<br>onderdeel van het CE | <br>III<br>mogelijk onderdeel van het SE |
|---|---|---|---|
| (2) *Hoe wordt wetenschappelijke kennis gebruikt?*<br>– elk antwoord leidt naar een nieuwe vraag<br>– toepassingen | | | **A,B,C,D** |
| (3) *Hoe bepaal je de betrouwbaarheid van wetenschappelijke kennis?*<br>– de betrouwbaarheid van statistisch onderzoek<br>– het realiteitsgehalte van een wiskundig model<br>– de correctheid van een redenering of bewijs | | | <br><br>**A, C, D**<br><br>**A,B,D**<br>**D** |
| (4) *Hoe beïnvloeden samenleving en wetenschap elkaar?*<br>wiskunde: descriptief of prescriptief? | | | |
| (5) *Mag alles wat kan?*<br>de zin en onzin van wiskundige modellen<br>misleiding door statistiek | | | <br>**A,B,D**<br>**A,C,D** |
| **C Overzichtskennis**: | | | |
| • *de grote verhalen en ontdekkingen van de (natuur)wetenschap die iedereen moet kennen*<br>fragmenten uit de geschiedenis van de wiskunde | | | **(A,B,C,D)*** |
| • *binnen de samenleving actuele (natuur)wetenschappelijke thema's*<br>Bijvoorbeeld:<br>– codering van gegevens<br>– economische modellen<br>– verkiezingsprognoses<br>– plaatsbepaling m.b.v. gps | | | **(A,B,C,D)*** |

# 3. Wetenschapsoriëntatie in wiskunde

## 3.1 Algemene vaardigheden wiskunde A,B,C (Domein A)

- A1: informatievaardigheden
  De kandidaat kan, mede met behulp van ICT, informatie verwerven, selecteren, verwerken, beoordelen en presenteren.
- A2: onderzoeksvaardigheden
  De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostechnieken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.
- A3: technisch-instrumentele vaardigheden
  De kandidaat kan bij raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van toepassingen van ICT.
- A4: oriëntatie op studie en beroep
  De kandidaat kan een verband leggen tussen zijn wiskundige kennis, vaardigheden en belangstelling en de rol van wiskunde in vervolgstudies en de praktijk van verschillende beroepen.
- A5: algebraïsche vaardigheden
  De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Met uitzondering van A5 sluiten deze vaardigheden goed aan bij het lijstje van academische vaardigheden. Echter, voor indaling van deze vaardigheden in de schoolexamens zijn nog wel uitwerkingen nodig die minder instrumenteel van aard zijn dan de gangbare examens. Daarvoor volgen verderop in dit overzicht enkele voorbeelden.

## 3.2 Vakspecifieke onderdelen wiskunde A,B,C

| CE | SE | Wetenschapsoriëntatie |
|---|---|---|
| | Domein A | Academische Vaardigheden |
| Algebraïsche vaardigheden<br>(A,B,C) | | De algebraïsche oplossing van een vergelijking kunnen interpreteren als de oplossing van een probleem binnen een wetenschappelijke of maatschappelijke context. |
| Standaardfuncties<br>Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden<br>(A,B,C) | Standaardfuncties<br>(A,C) | Standaardfuncties<br>Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden kunnen interpreteren en evalueren als representaties van een wetenschappelijke of maatschappelijke context. |
| Veranderingen<br>(A,B,C) | Rijen en recurrente betrekkingen<br>(A) | Veranderingssituaties kunnen weergeven in wiskundig/algebraïsch model en kunnen interpreteren en evalueren binnen een wetenschappelijke of maatschappelijke context. |
| Afgeleide functies<br>Rekenregels<br>(A,B) | Afgeleide functies<br>Rekenregels<br>(A,B) | |
| Integraalrekening<br>(B) | Integraalrekening<br>(B) | Wiskundige representatie kunnen geven van een realistisch probleem en de wiskundige oplossing kunnen interpreteren en evalueren binnen een wetenschappelijke of maatschappelijke context. |
| Goniometrische functies<br>(B) | Goniometrische functies<br>(B) | Wiskundige representatie kunnen geven van een realistisch probleem en de wiskundige oplossing kunnen interpreteren en evalueren binnen een wetenschappelijke of maatschappelijke context. |
| Combinatoriek<br>Kansen<br>Rekenen met kansen<br>Speciale discrete verdelingen<br>Ordenen, verwerken en samenvatten van | | Statistische uitspraken op betrouwbaarheid kunnen interpreteren en op beoordelen. |

| | | |
|---|---|---|
| statistische gegevens<br>Kansverdelingen<br>Het toetsen van hypothesen<br>(A) | | |
| Kansverdelingen<br>(C) | Populatie en steekproef<br>Ordenen, verwerken en samenvatten van statistische gegevens<br>(C) | Statistische uitspraken op betrouwbaarheid kunnen interpreteren en op beoordelen. |
| | Grafen<br>Matrices<br>(C) | Wiskundige representatie kunnen geven van een realistisch probleem en de wiskundige oplossing kunnen interpreteren en evalueren binnen een wetenschappelijke of maatschappelijke context. |
| Oriëntatie op bewijzen<br>Constructie en bewijzen in de vlakke meetkunde<br>(B) | Oriëntatie op bewijzen<br>Constructie en bewijzen in de vlakke meetkunde<br>(B) | Redeneren en bewijzen |
| | Keuzeonderwerp<br>(A,B,C) | Academische Vaardigheden |

## 3.3 Algemene vaardigheden wiskunde D (Domein A)

In dit domein komen alle aspecten van wetenschapsoriëntatie aan bod. Omdat wiskunde D volledig wordt afgesloten met een schoolexamen is hier meer ruimte om deze aspecten daadwerkelijk aan te laten sluiten bij de vakinhoudelijke eisen.

**A1: Algemene vaardigheden**

1. informatievaardigheden
   De kandidaat kan doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken.
2. communiceren
   De kandidaat kan adequaat schriftelijk, mondeling en digitaal in het publieke domein communiceren over onderwerpen uit de wiskunde.
3. reflecteren op leren
   De kandidaat kan bij het verwerven van vakkennis en vakvaardigheden reflecteren op eigen belangstelling, motivatie en leerproces.
4. studie en beroep
   De kandidaat kan toepassingen en effecten van wiskunde en natuurwetenschappen in verschillende studie- en beroepssituaties herkennen en benoemen. Daarnaast kan de kandidaat een verband leggen tussen de praktijk van deze studies en beroepen en de eigen kennis, vaardigheden en belangstelling.

**A2: Wiskundige en natuurwetenschappelijke vaardigheden**

5. onderzoeken
   De kandidaat kan een probleemsituatie in een wiskundige, natuurwetenschappelijke of economische context analyseren, gebruik makend van relevante begrippen en theorie vertalen in een vakspecifiek onderzoek, dat onderzoek uitvoeren, en uit de onderzoeksresultaten conclusies trekken.
6. ontwerpen
   De kandidaat kan een ontwerp op basis van een gesteld probleem voorbereiden, uitvoeren, testen en evalueren en daarbij relevante begrippen en theorie gebruiken.
7. modelvorming
   De kandidaat kan een realistisch probleem in een context analyseren, inperken tot een hanteerbaar probleem, vertalen naar een model, modeluitkomsten genereren en interpreteren en het model toetsen en beoordelen.
8. redeneren
   De kandidaat kan met gegevens van wiskundige en natuurwetenschappelijke aard consistente redeneringen opzetten van zowel inductief als deductief karakter.
9. waarderen en oordelen
   De kandidaat kan een beargumenteerd oordeel over een situatie in de natuur of een technische toepassing geven, en daarin onderscheid maken tussen wetenschappelijke argumenten en persoonlijke uitgangspunten.

**A3: Wiskundige vaardigheden**

10. algebraïsche vaardigheden
    De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden, heeft inzicht in de bijbehorende formules en kan de bewerkingen uitvoeren.
11. vaktaal, conventies en notaties
    De kandidaat kan correcte vakspecifieke taal en terminologie interpreteren en produceren, inclusief formuletaal, conventies en notaties.
12. oplossingsvaardigheden
    De kandidaat kan een oplossingsstrategie kiezen, deze correct toepassen en gevonden oplossingen controleren op wiskundige juistheid.

## 3.4 Vakspecifieke onderdelen wiskunde D

Het vakspecifieke programma kent twee varianten: het *schoolmodel* en het *samenwerkingsmodel*.
De onderwerpen uit de schoolmodel passen alle binnen het reguliere aanbod van een school. In de samenwerkingsmodel is een module gereserveerd voor Wiskunde in wetenschap. Dit module wordt in samenwerking met een universiteit gevuld met onderwerpen die een vooruitblik doen op een natuurwetenschappelijke vervolgopleiding. Een groot deel van het programma is echter gemeenschappelijk in beide varianten.

| CE | SE | Wetenschapsoriëntatie |
|---|---|---|
| | Domein A | Academische vaardigheden<br>Wetenschapsfilosofie<br>Overzichtskennis |
| | Combinatoriek<br>Kansen<br>Rekenen met kansen<br>Ordenen, verwerken en samenvatten van statistische gegevens<br>Kansverdelingen<br>Het toetsen van hypothesen<br>Profielspecifieke verdieping | Statistische uitspraken kunnen interpreteren en op betrouwbaarheid kunnen beoordelen. |
| | Discrete dynamische modellen<br>Continue dynamische modellen<br>Toepassingen van discrete en continue dynamische modellen | Wiskundige representatie kunnen geven van een realistisch probleem en de wiskundige oplossing kunnen interpreteren en evalueren binnen een wetenschappelijke of maatschappelijke context. |
| | Oriëntatie op analytische en synthetische methoden<br>Coördinaten, vergelijkingen en figuren in twee dimensies<br>Lijnen, cirkels en kegelsneden in coördinaten<br>Parametrisering<br>De ruimte<br>Toepassingen en ICT | Redeneren en bewijzen<br>Onderzoek naar meetkundige situaties. |

Het schoolmodel

| | |
|---|---|
| Basisoperaties complexe getallen<br>Profielspecifieke verdieping complexe getallen<br>Profielspecifieke verdieping Dynamische modellen | Verkennen nieuwe wiskunde<br>Toepassen |
| Keuzeonderwerp | Academische Vaardigheden |

Het samenwerkingsmodel

| | |
|---|---|
| Wiskunde in wetenschap | Academische vaardigheden<br>Wetenschapsfilosofie<br>Overzichtskennis |
| Keuzeonderwerp | Academische Vaardigheden |

# 4. Voorbeelden en suggesties voor het schoolexamen: thema's

De volgende voorbeelden zijn niet meer dan indicaties van opdrachten in het kader van wiskunde en wetenschapsoriëntatie. Zoals eerder is aangegeven, gezien het instrumentele karakter van de centrale examens, kunnen de opdrachten onderdeel zijn van het schoolexamen.
De eerste twee opdrachten zijn ontleend aan het *Handboek Wiskundedidaktiek* waarin voorbeelden van d*enkactiviteiten wiskunde* worden gegeven. Een aantal van de eindtermen van het onderdeel d*enkactiviteiten wiskunde* valt samen met de kernvragen van wetenschapsoriëntatie wiskunde. In onderstaande voorbeelden wordt echter een stap verder gezet richting wetenschap. Dat betreft zowel een stap in de richting van wiskundig onderzoek, als in de richting van wetenschappelijke vraagstelling en denkwijze.

## 4.1 Het realiteitsgehalte van een wiskundig model

In wetenschappelijk onderzoek kom je regelmatig tegen dat een verschijnsel wordt beschreven met een formule. In sommige situaties (bijvoorbeeld bij het beschrijven van een planetenbaan) stemt de uitkomst van de formule met grote nauwkeurigheid overeen met de waarnemingen. In zo'n geval is de formule een uitkomst van een algemeen geaccepteerde theorie. In onderstaande voorbeelden is dat niet het geval en is de formule pasklaar gemaakt op de waarnemingen. Je kunt je daarbij afvragen wat het realiteitsgehalte is van zo'n formule.

Wiskunde A,B,C,D vwo, leerjaar 5/6

Bij het ontwerpen van een weg moet er rekening gehouden worden met het schoon regenen van de weg.

Tijdens regenbuien wordt het vuil van de weg gespoeld. Het percentage vuil dat weggespoeld wordt ($P$) is afhankelijk van de tijd dat het regent ($t$ in uren): $P = 100 \cdot (1 - e^{-c \cdot t})$.

In deze formule geldt dat $c$, een positieve constante, afhankelijk is van het soort wegdek. Voor beton geldt $c = 0{,}05$ terwijl voor asfalt geldt $c = 0{,}025$.

a Teken de grafieken voor beide wegen en zeg welke weg sneller schoongespoeld wordt.
b Onderzoek met behulp van de afgeleide voor beide wegen welke van de twee wegen bij een hele korte regenbui het snelste schoonspoelt.

(Bron: www.epsilon-uitgaven.nl .Handboek Wiskundedidaktiek, Digibijlage 11: Wiskundige denkactiviteiten, p. 14).

Geef een argument waarom deze formule niet juist kan zijn voor elke situatie waarin het regent.

**Uitwerking**
De formule bevat slechts één parameter die het hele proces zou bepalen. Die parameter hangt alleen maar af van het soort wegdek. In werkelijkheid zullen er veel meer variabelen zijn die het wegspoelen van vuil bepalen. Denk maar eens aan het soort vuil. Zout zal gemakkelijker wegspoelen dan zand. Bovendien kunne de weersomstandigheden een rol spelen. Bij sterke dwarswind zal het vuil sneller wegspoelen dan bij een sterke wind in de richting van de weg.

In een onderzoek kijkt men hoe het verkeerslawaai $L$ (in dB) op een plaats afhangt van de snelheid v (in km/u) van het verkeer en de afstand tot een weg a (in m).

Bij een bepaalde weg vindt men de volgende formule:

$L = 89,5 - 2,1.\ln(a.v) + 0,16.v - 0,03.a$

(Bron: www.epsilon-uitgaven.nl, Handboek Wiskundedidaktiek, Digibijlage 11: Wiskundige denkactiviteiten, p. 13).

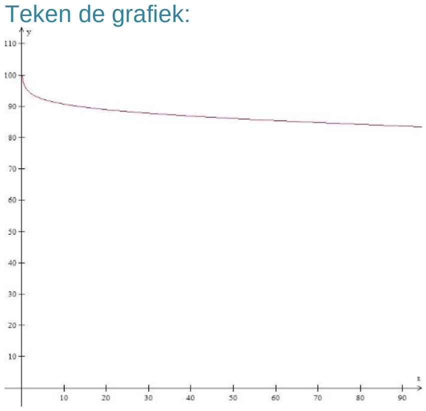
Hoe kun je nagaan of dit model overeenstemt met de realiteit?
(Tip: Onderzoek het verschijnsel 'Hoe groter de afstand tot de weg, hoe minder het lawaai' en onderzoek nog zo'n verschijnsel.)

***Uitwerking***

Kies een vaste waarde voor de snelheid *v*, bv *v* = 100 km/u en bekijk het gedrag van *L* als functie van *a*:

$$89{,}5 - 2{,}1\ln(a \cdot 100) + 16 - 0{,}03a = 105{,}5 - 2{,}1\ln(100a) - 0{,}03a.$$

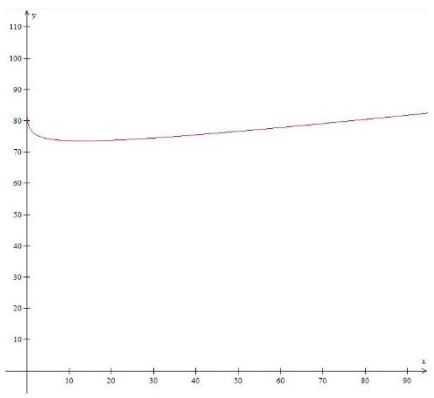
Teken de grafiek:



Daarin is te zien dat de geluidsterkte afneemt met de afstand.
Je kunt ook kijken hoe bij een gegeven afstand (bv 100 m) het lawaai toeneemt bij toenemende snelheid. Bekijk dan het gedrag van:

$$89{,}5 - 2{,}1\ln(100 \cdot v) + 0{,}16 \cdot v - 3 = 86{,}5 - 2{,}1\ln(100v) + 0{,}16 \cdot v$$

Merkwaardig genoeg neemt volgens de formule het lawaai eerst af bij een toename van de snelheid van 0 tot 10 km/u. Dat klopt niet met de werkelijkheid.



## 4.2 Een wiskundig onderzoek doen

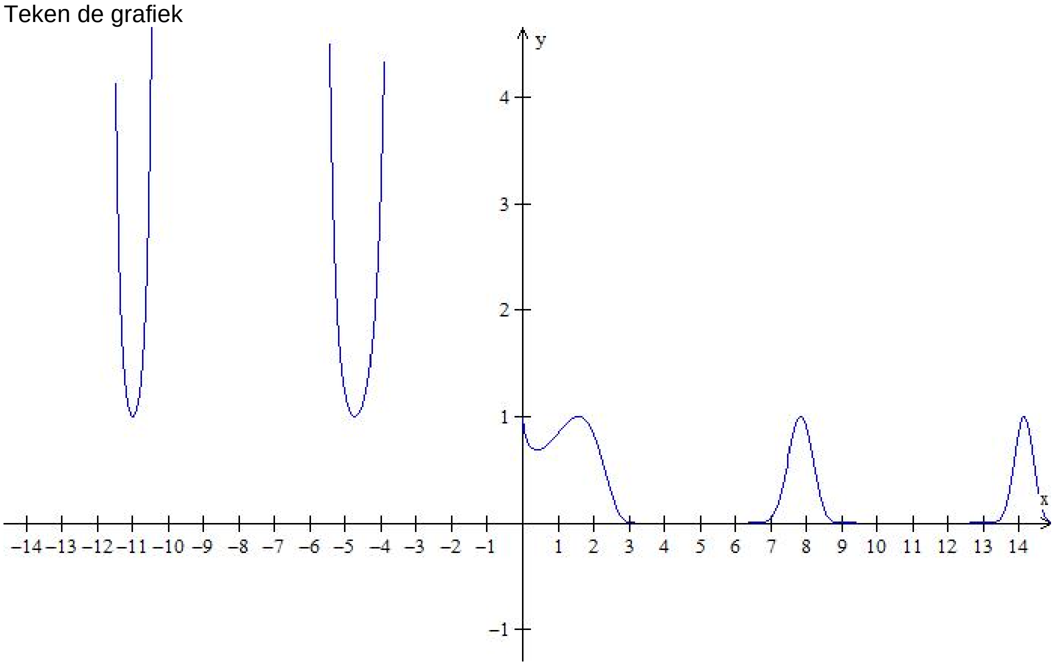
Wiskunde B en D, leerjaar 5/6 VWO

Fundamenteel wiskundig onderzoek richt zich op het onderzoeken van eigenschappen en wetmatigheden van wiskundige objecten. Dan kunnen meetkundige figuren zijn, of getallen, of formules. In onderstaand voorbeeld ga je een formule wiskundig onderzoeken. Je mag daarbij een computer of grafische rekenmachine gebruiken Het resultaat zal je verrassen.

- Onderzoek het gedrag van de functie $(\sin(x))^x$.
- Geef een kort beargumenteerd verslag van je gevonden resultaten en geef daarin ook het verschil aan met de methode van onderzoek naar een natuurkundig of maatschappelijk verschijnsel.

***Uitwerking***

Teken de grafiek




Aan de rechterkant staan bergjes op regelmatige afstand. Aan de linkerkant grafieken tussen verticale asymptoten.

De grafiek laat zich verklaren met de eigenschap van de exponentiële functies:

$$(\sin(x))^x = e^{x \cdot \ln(\sin(x))}$$

De logaritme is gedefinieerd voor positieve waarden van sin(*x*).

Voor de rechterkant is dat het geval als *x* ligt tussen 0 en π, 2 π en 3 π, en zo verder.

Voor de linkerkant is dat het geval als *x* ligt tussen – π en -2 π, -3 π en -4 π en zo verder.

Voor de randen van het definitiegebied geldt de volgende limiet:

$$\lim_{x \to \pi} (\ln(\sin(x)) = -\infty$$

Dus

$$\lim_{x \to \pi} e^{x(\ln(\sin(x))} = e^{-\infty} = 0$$

Hetzelfde geldt voor de andere waarden van *x* aan de randen van de bergjes.

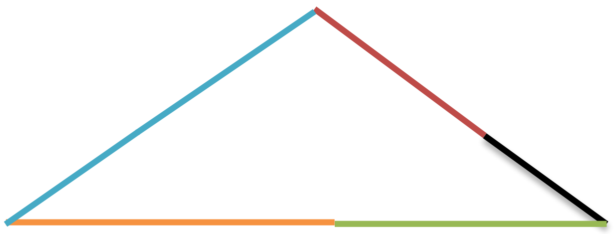
Aan de negatieve x-as zorgt de negatieve waarde van *x* voor de verticale asymptoot.

Omdat $\lim_{x \downarrow 0} x \cdot \ln(x) = 0$ is ook $\lim_{x \downarrow 0} x \cdot \ln((\sin(x)) = 0$ en dus $\lim_{x \downarrow 0} e^{x(\ln(\sin(x))} = e^0 = 1$

Minima en maxima op het interval $[0,\pi]$ zijn te berekenen met behulp van de afgeleide.

Wiskunde A,B,C en D, vwo leerjaar 4,5,6

Je hebt vijf stokjes met lengtes 3,4,5,6 en 7. Met die stokjes kun je een driehoek maken. Gebruik alle stokjes (een zijde kan dus bestaan uit meer stokjes).
In de figuur zie je een “3 + 4, 5 + 6 en 7” driehoek.



(Bron: Pythagoras 54, nummer 3, januari 2015)

- Hoeveel verschillende driehoeken kun je zo maken? (Gespiegelde driehoeken tellen niet dubbel)
- Formuleer een algemene wiskundige wet over de lengten van de drie zijden wanneer het wel of niet lukt om een driehoek met die lengtes te maken.

***Uitwerking***

De voorwaarde voor het kunnen leggen van een driehoek is de driehoeksongelijkheid: de som van twee zijden is groter dan de derde zijde.
Door systematisch tellen.
Eerst twee losse stokjes plus drie stokjes aan elkaar.
(3,4,18); (3,5,17); (3,6,16); (3,7,15)
(4,5,16); (4,6,15); (4,7,14)
(5,6,14); (5,7,13)
(6,7,12)
Met één los stokje en de andere paarsgewijs aan elkaar.
(3,4+5,6+7=3,9,13);(3,4+6,5+7=3,10,12); (3,4+7,5+6=3,11,11);
(4,3+5,6+7); (4,3+6,5+7=4,9,12); (4,3+7,5+6=4,10,11)
(5,3+4,6+7=5,7,13); (5,3+6.4+7=5,9,11); (5,3+7,4+6=5,10,10)
(6,3+4,5+7=6,7,12); (6,3+5,4+7=6,8,11); (6,3+7,4+5=6,10,9)
(7,3+4,5+6=7,7,11); (7,3+5,4+6=7,8,10); (7,3+6,4+5=7,9,9)
De rode oplossing is al eens geteld. Totaal 11 oplossingen.

## 4.3 Een wiskundig bewijs beoordelen

Wiskunde A, B, C en D, leerjaar 4 tot en met 6 VWO

- Bewijs de stelling van Pythagoras op drie verschillende manieren (zoek op internet)
- Geef een beargumenteerde beoordeling van elk bewijs aan de hand van de volgende vragen:
    - Welk bewijs vind je het meest overtuigend?
    - Welk bewijs vind je het mooist?

***Uitwerking***

(Zie: www.epsilon-uitgaven.nl Handboek Wiskundedidaktiek, Digibijlage 18)

## 4.4 Een statistische uitkomst beoordelen

Wiskunde A,C en D, vwo leerjaar 5/6

De mens is het meest rechtshandig. Naar schatting 10 tot 15 procent van de mensheid is linkshandig. Over het algemeen zijn er meer linkshandige mannen dan vrouwen, in percentages ongeveer 10% meer.

(Bron: Wikipedia)

- Inventariseer het aantal linkshandigen in je directe omgeving en neem daarin ook het verschil tussen mannen en vrouwen mee.
- Bespreek je resultaten in relatie tot de beweringen van Wikipedia (hierboven). (Aanwijzingen: hoe betrouwbaar is je eigen onderzoek gelet op aselectheid en omvang van de steekproef? Kun je op internet betrouwbaarder gegevens vinden? Zijn er nu meer linkshandige mensen dan vijftig jaar geleden?.....)

***Uitwerking***

Van de leerlingen mag verwacht worden dat ze bij hun waarnemingen een discussie geven over de omvang en het aselecte karakter van de steekproef. Daarnaast kan een bronnenonderzoek naar de betrouwbaarheid van de uitspraak van Wikipedia gedaan worden.

# 5. Voorbeelden en suggesties voor het schoolexamen per wiskundevak

## 5.1 Wetenschapsoriëntatie en wiskunde A

### Omstreden kansen

De volgende opdrachten gaan over kans en toeval en hoe mensen dat wiskundig ervaren. Je kunt daarbij denken aan:

- Wanneer overtuigen de wiskundige redeneringen en wanneer niet?
- Hoe komt het dat zoveel mensen moeite hebben met kansproblemen en de redeneringen met kans?

Deze opdrachten bestaan uit twee gedeelten. In het deel 1 maak je een aantal wiskunde opdrachten om met het onderwerp vertrouwd te raken. In deel 2 ga je zelf het een en ander uitzoeken en wordt je gevraagd een beargumenteerde mening te geven over de gegeven probleemstelling.

In deze opdrachten maak je in bredere zin kennis met wiskunde als wetenschap. Wetenschap is mensenwerk en vraagt daarom altijd een menselijke inzet in de vorm van creativiteit, twijfel, toepasbaarheid en vooral doorzettingsvermogen. Ook in de wiskunde als wetenschap kom je deze menselijke activiteiten tegen, al zou je dat vanuit de schoolwiskunde niet direct herkennen. In de volgende opdrachten maak je kennis met deze menselijke kant van wiskunde en wetenschap.
Het onderwerp is kansrekening. De wiskundige theorie van de kansrekening is ontwikkeld met vallen en opstaan. In opdracht 1 zie je een stukje van die ontwikkeling terug. In opdrachten 2 en 3 maak je kennis met de twijfel. Je kunt ervaren hoe een eenvoudig probleem nog steeds felle discussies kan oproepen rond principes van de kansrekening. Ten slotte ga je je in de eindopdracht verdiepen in de rol van kans en toeval in de samenleving.
Als geheel krijg je zo aan de hand van de kansrekening, een beeld van de beïnvloeding van wetenschap en samenleving.

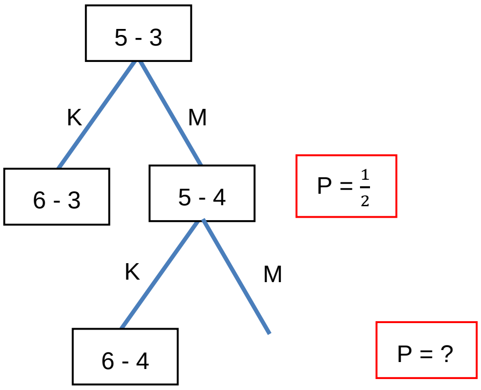
### Deel 1: Twee klassieke problemen

**Opdracht 1: Een oud probleem**
In 1494 vroeg de Italiaan Pacioli zich af hoe je de inzet van een spel moet verdelen als het spel voortijdig wordt afgebroken. In onze terminologie zou het spel als volgt gaan:
*Karin en Marieke gooien met een munt. Kop is succes voor Karin en munt is succes voor Marieke. Er zit € 3,20 euro in de pot. Het spel eindigt als één van beiden 6 punten heeft gehaald. Die is dan de winnaar en krijgt de pot. Bij stand* K – M = 5 – 3 *moeten ze het spel onverwacht afbreken. Hoe moeten ze de pot nu verdelen?*

**a.** Volgens Pacioli moest de pot in de verhouding 5 : 3 worden verdeeld, dus € 2,- voor Karin en €1,20 voor Marieke. Vind je deze verdeling correct? Zo ja, waarom. Zo nee, geef een argument waarom deze fout is.

Dit probleem leverde lange tijd veel discussie op onder wetenschappers en gokkers. Pas in 1654 gaf Pascal een bevredigende wiskundige oplossing. Dat markeert het begin van onze kansrekening. In de volgende opdracht los je het probleem op via de redenering van Pascal.

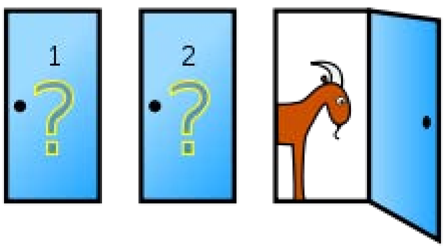
**b.** In het boomdiagram zie je de stand bij het afbreken van het spel en een paar mogelijke stappen daarna. Maak het boomdiagram af en bereken de kansen dat Karin of Marieke het spel wint. Hoe zal de pot dan verdeeld worden op basis van deze kansen?




**Opdracht 2: Het driedeurenprobleem**

Bij deze quiz staan achter drie deuren twee geiten en één auto. Je weet niet achter welke deur de auto staat. De quizmaster weet dat wel. Je wijst eerst een deur aan. Deze deur blijft gesloten De quizmaster doet daarna een deur open waarachter een geit staat en vraagt of je bij je eerste keuze blijft of dat je de andere deur kiest.

Wat kun je het beste doen om een zo groot mogelijke kans op een auto te hebben? Bij je eerste keuze blijven? Of toch de andere deur kiezen?




Wat is je eerste reactie? Maak een keuze uit de volgende mogelijkheden:

a. Het maakt niet uit of je de andere deur kiest of bij je keuze blijft.
b. Door de andere deur te kiezen vergroot je je kansen op een auto.
c. Door de andere deur te kiezen verklein je je kansen op een auto.

**Opdracht 3: Nog eens die drie deuren**

Op de site http://www.wiskundemeisjes.nl/20110430/nog-eens-die-drie-deuren/ gaven de wiskundemeisjes een beredeneerd antwoord op deze vragen. Maar hun redenering werd gevolgd door een stortvloed van reacties. Op http://nl.wikipedia.org/wiki/Driedeurenprobleem vind je verschillende redeneringen voor de oplossing.

a. Maak een keuze uit één van deze redeneringen, geef daarvan een samenvatting en geef aan waarom deze redenering je het meeste aanspreekt.
b. Op de bovengenoemde site van de wiskundemeisjes vind je een scala van reacties op het probleem. Een aantal mensen vraagt zich af waarom sommige mensen de

oplossing niet kunnen accepteren. Ook vind je nieuwe, en soms verkeerde, redeneringen terug. Lees deze reacties aandachtig en geef aan waarom het volgens jou zo lastig is te aanvaarden dat de kansen wél veranderen door de strategie van het deur wisselen.

## Deel 2: Wat is kans en bestaat toeval?

In de Nederlandse taal kom je het woord ‘kans’ in veel betekenissen tegen. Een mooie maar grove indeling in deze betekenissen is de volgende.

- **zweetkans**, ook *empirische kans* genoemd.
  Je telt in de praktijk hoe vaak een bepaalde gebeurtenis, het ‘succes’, voorkomt in alle getelde gebeurtenissen. De kans is het aantal successen gedeeld door het getelde aantal. Alle medische kansen zijn hierop gebaseerd. Ook simulaties met de computer, zoals bij het drie deurenprobleem, zijn hiervan voorbeelden.
- **weetkans**, ook *wiskundige* of *mathematische* kans genoemd.
  Uitgaande van een vooraf vastgestelde aanname of theoretisch model tel je het aantal successen dat zich in theorie kan voordoen en deel je door het aantal mogelijke uitkomsten. De kans van $\frac{1}{6}$ op een 6 bij het gooien van een zuivere dobbelsteen is een voorbeeld van zo’n kans. De zuivere dobbelsteen is in dit geval de aanname en het theoretische model. In de werkelijkheid bestaan er geen zuivere dobbelstenen. Bij het drie deuren probleem ga je ervan uit dat de deuren volkomen gelijkwaardig zijn en dat de quizmaster geen voorkeur laat vertoont voor één van die deuren.
- **zwetskans** of *subjectieve* kans.
  Deze kans kom je het meeste tegen in het dagelijks spraakgebruik. Bijvoorbeeld: “De kans dat FC Groningen in de finale tegen PEC Zwolle de KNVB beker zal winnen, is 50%.” Of: “Vandaag is de kans op regen 10%.”In het eerste geval zeg je eigenlijk niets anders dan dat je vindt dat beide elftallen even sterk zijn. Bij de tweede uitspraak weet je helemaal niet waar je aan toe bent. Regent het 10% van de 24 uur? Of kan 10% van alle plaatsen in Nederland een regenbui verwachten? Hier wordt niets meer beweerd dan dat het misschien wel gaat regenen.

Je kunt je afvragen of toeval wel bestaat. Als je alles van een dobbelsteen zou weten, dan zou je precies kunnen berekenen in welke worp de 6 bovenkomt. En als we van een persoon de volledige genetische code zouden weten, dan zouden we ook kunnen weten of die persoon wel of geen darmkanker van een bepaald type krijgt. Deze laatste redenatie is zelfs heel actueel in de medische wetenschap.

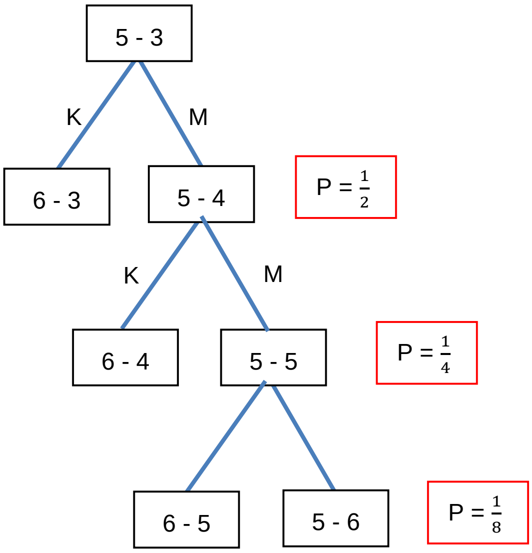
**Opdracht**
Verzamel op internet een aantal antwoorden op de vraag of toeval wel of niet bestaat. Beantwoord daarna de volgende vraag: Stel dat er geen toeval is, wat is dan de betekenis van het begrip kans? Betrek in je antwoord een bespreking van de twee voorbeelden uit deel 1.

*Uitwerkingen*

**Opdracht 1a**

De verdeling is gebaseerd op de verhouding van de recente uitslag. Dat is niet het juiste uitgangspunt want het gaat erom wat je, gezien deze uitslag, kansen zijn op de winst van het spel.

**Opdracht 1b**




De kans dat Marieke zou winnen vanuit de 5-3 situatie is $\frac{1}{8}$ en de kans dat Karin zou winnen is dus $\frac{7}{8}$.

Een verantwoorde verdeling van de pot is dus € 0,40 voor Marieke en € 2,80 voor Karin.

**Opdracht 2**

Naar je gevoel zou het niet moeten uitmaken of je van deur wisselt of dat je bij je eerste keuze blijft.

Maar het gevoel bedriegt. Het maakt wel uit Je kansen op een auto worden twee keer zo groot.

**Opdracht 3a**

Het volgende gedachtenexperiment is redelijk overtuigend.

Je speelt het spel 300 keer. De auto zit achter deur A. Je wisselt niet van deur. Je kiest willekeurig een deur, dus 100 keer deur A, 100 keer deur B en 100 keer deur C.

Kies je deur A, dan opent de quizmaster deur B of C en heb je de auto want je bleef bij keuze A.

Kies je deur B, dan opent de quizmaster deur C. Je hebt geen auto.

Kies je deur C, dan opent de quizmaster deur B. Je hebt geen auto.

Totaal: kans van $\frac{1}{3}$ op een auto.

Nu speel je het spel nog eens 300 keer in gedachten. De auto zit achter deur A. Nu wissel je wel van deur.

Kies je deur A, dan opent de quizmaster deur B of C en kies je C of B en dan heb je geen auto.

Kies je deur B, dan opent de quizmaster deur C. Je kiest deur A: bingo.

Kies je deur C, dan opent de quizmaster deur B. Je kiest deur A: bingo.

De kans op een auto is nu $\frac{2}{3}$.

**Opdracht 3b**
Veel redeneringen berusten op logica in combinatie met kansrekening. Dat is moeilijk voorstelbaar. Bovendien suggereert onze intuïtie soms andere conclusies dan de redeneringen doen.

**Eindopdracht**
Zoeken op internet naar 'bestaat toeval'  levert een schat aan materiaal op. Als toeval niet bestaat, dan liggen alle gebeurtenissen vast, alleen we kennen de uitkomst niet vanwege een gebrek aan informatie. Als je bijvoorbeeld alles zou weten van een dobbelsteen, zou je precies kunnen voorspellen met welke soort worp je een 6 kunt gooien. Maar omdat we die informatie niet hebben, turven we wanneer die 6 verschijnt en constateren dat dat ongeveer één op de zes worpen is. In die situatie bestaat dus alleen maar de empirische kans.

## 5.2 Wetenschapsoriëntatie en wiskunde B

### Veelvlakken

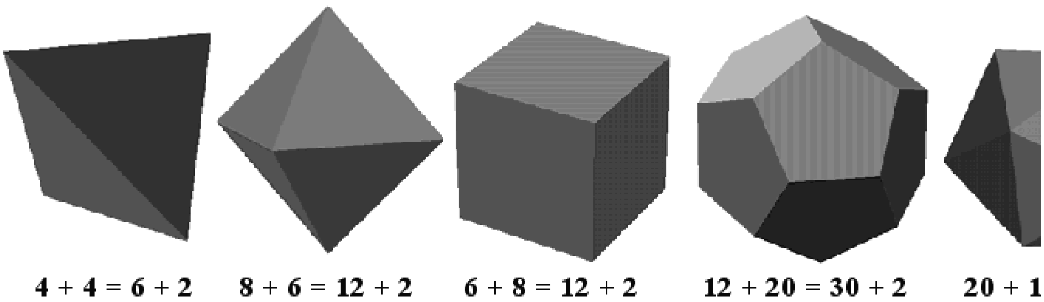
De volgende opdrachten bestaan uit twee gedeelten. In deel 1 maak je kennis met regelmatige veelvlakken. In het tweede deel onderzoek jezelf eigenschappen van andere veelvlakken.

In deze opdrachten maak je in bredere zin kennis met wiskunde als wetenschap. Wetenschap is mensenwerken vraagt daarom altijd een menselijke inzet in de vorm van creativiteit, twijfel, toepasbaarheid en vooral doorzettingsvermogen. Ook in de wiskunde als wetenschap kom je deze menselijke activiteiten tegen, al zou je dat vanuit je schoolwiskunde niet direct herkennen. In de volgende opdrachten maak je kennis met deze menselijke kant van de wiskunde en wetenschap.
Een *regelmatig veelvlak* is opgebouwd uit regelmatige veelhoeken. Dus uit: gelijkzijdige driehoeken, vierkanten, regelmatige vijfhoeken, regelmatige zeshoeken en zo verder. Bovendien hebben regelmatige veelvlakken dezelfde opbouw in de hoekpunten. Vanwege de bijzonder vorm kregen deze ruimtelijke lichamen in de Griekse oudheid een speciale betekenis. De sterrenkundige Kepler wist er zelf de opbouw van het zonnestelsel mee te beschrijven.
In wetenschap kom je regelmatig de vraag tegen hoe je objecten in soorten kunt indelen op grond van hun eigenschappen en loop je al snel tegen de vraag aan hoeveel soorten er zijn en of je nu ook alle soorten hebt gevonden. Bijvoorbeeld bij biologie: de indeling in soorten zoogdieren of planten. Deze manier van werken brengt orde en overzicht in de wereld om ons heen. In de wiskunde kun je de vraag stellen hoeveel verschillende regelmatige veelvlakken er zijn. En direct daarna: als dat een eindig aantal is, waarom is dat dan een eindig aantal? Bovendien blijken deze veelvlakken, naast hun verschillen, één specifieke eigenschap gemeenschappelijk te hebben. Je kunt je daarna afvragen of er nog meer (niet-regelmatige) veelvlakken zijn die ook die ene specifieke eigenschap hebben.
En dan weer een volgende vraag: als je die eigenschap nu eens een beetje verandert, voor welke veelvlakken geldt die dan?
Zo maak je bij deze opdrachten kennis met een voorbeeld hoe wetenschap zich ontwikkelt: elk antwoord op een vraag roept weer een nieuwe vraag op.

### Deel 1: Regelmatige veelvlakken

In de figuur zie je vijf regelmatige veelvlakken netjes op een rij. De namen zijn, van links naar rechts:

Viervlak, Achtvlak, Kubus, twaalfvlak en twintigvlak.




**Opdracht 1: Verkennen**

a. Geef bij elk veelvlak aan uit welke regelmatige veelhoeken die is opgebouwd.
b. Wat betekenen de optelsommen onderaan elk veelvlak?

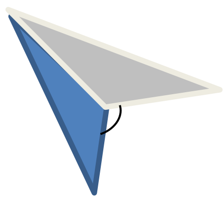
Je kunt je afvragen of dit de enige regelmatige veelvlakken zijn en of je met andere regelmatige veelhoeken, bijvoorbeeld een regelmatige zevenhoek, niet ook een regelmatig veelvlak kunt maken. Het antwoord is dat dit de enige vijf zijn. In de volgende opdrachten ga je dat bewijzen.

**Opdracht 2: De hoeken in een regelmatige veelhoek**

a. De som van de hoeken in een driehoek is 180°. Hoe groot is der som van de hoeken in een vierhoek?
b. En hoe groot is die som van de hoeken in een *n*-hoek?
c. Hoe groot is een hoek in een regelmatige *n*-hoek?

**Opdracht 3: De hoeken bij een hoekpunt van een veelvlak**

a. Je zet twee gelijkzijdige driehoeken met twee zijden aan elkaar vast, in een hoek tegen elkaar. De driehoeken kunnen als een deur draaien om de gemeenschappelijke zijde.



Hoe groot is dan de grootst mogelijke hoek tussen de andere twee zijden en hoe groot is de kleinst mogelijke hoek?

b. De hoek van een regelmatige zeshoek is 120°. Waarom kun je dus geen regelmatig veelvlak maken met een regelmatige zeshoek en zelfs met een regelmatige *n*-hoek met $n > 6$?
c. Hoeveel gelijkzijdige driehoeken kunnen in een hoekpunt van een regelmatig veelvlak samenkomen?
d. En hoeveel vierkanten en regelmatige vijfhoeken?
e. Dus hoeveel regelmatige veelvlakken zijn er mogelijk?

## Deel 2: Vermoeden, weerleggen en bewijzen

Misschien had je al ontdekt dat de optelsommen onder de figuren bij opdracht 1 voldeden aan de vergelijking $H + V = R + 2$. Hierin is:

*H* is het aantal hoekpunten,
*V* is het aantal vlakken,
*R* is het aantal ribben.

Dit is de formule van Euler.
De formule zegt iets over de relatie tussen de verschillende onderdelen van de regelmatige veelvlakken, de vorm van de vlakken zelf speelt daarin geen rol. Als je een regelmatig veelvlak een beetje vervormt, bijvoorbeeld door de kubus scheef te duwen, dan verandert er niets aan de juistheid van de formule. Het vermoeden bestaat dus dat deze formule ook voor andere veelvlakken geldig is.

De onderzoeksvraag is:
Voor welke veelvlakken geldt de formule van Euler wel voor welke niet? En bestaat er een aangepaste formule voor andersoortige veelvlakken?

Een veel gebruikte methode van onderzoek is die van vermoeden – weerleggen – bewijzen.

Je vermoedt dat de formule voor andere veelvlakken geldt. Daar zoek je zoveel mogelijk voorbeelden bij. Totdat je een voorbeeld tegenkomt waarvoor de formule niet meer opgaat. Dan zoek je uit wat er mis gaat en of je Euler misschien in een iets aangepaste vorm kunt gebruiken.

De volgende aanwijzingen kunnen je helpen:

- Wat gebeurt er met de formule als je een stukje van een hoekpunt af schaaft?
- Kun je zo met het ‘schaafrecept’ en startend met het viervlak, voor elk veelvlak de formule bewijzen?
- Wat gebeurt er als je een kleine kubus op een grotere plakt?
- Wat gebeurt er als je een gat in een kubus maakt?

En natuurlijk vind je op internet ook veel bruikbaar (en onbruikbaar) materiaal.

***Uitwerkingen***

**Opdracht 1a**

Viervlak: gelijkzijdige driehoeken
Kubus: vierkanten
Achtvlak: gelijkzijdige driehoeken
Twaalfvlak: regelmatige vijfhoeken
Twintigvlak: gelijkzijdige driehoeken

**Opdracht 1b**

#Zijden + #Ribben = #Hoekpunten + 2.

**Opdracht 2a**

360°, je kunt dat zien door een diagonaal te tekenen die de vierhoek in twee driehoeken verdeeld.

**Opdracht 2b**

Met elke hoek erbij komt er 180° bij. De som van de hoeken van een *n*-hoek is dus $(n-2)$ ☐ 180°.

**Opdracht 2c**

De grootte van een hoek in een regelmatige *n*- hoek is $\frac{n-2}{n} \times 180°$.
Controle: gelijkzijdige driehoek $\frac{1}{3} \times 180° = 60°$ en voor een vierkant $\frac{2}{4} \times 180° = 90°$.

**Opdracht 3a**

De grootste hoek krijg je als de zijden in één vlak liggen. Die hoek is dan 360° − 120° = 240°.
De kleinste hoek krijg je als je de zijden op elkaar legt. Die hoek is dan 0°.

**Opdracht 3b**

Als je twee regelmatige zeshoeken tegen elkaar legt met één zijde gemeenschappelijk, dan is de grootste hoek tussen twee aanliggende zijden 360° − 240° = 120°. Daar past dus precies één zeshoek in, maar dan liggen ze wel in één vlak. Je kunt dan geen veelhoek maken.
Is *n* > 6 dan is de grootste ingesloten hoek kleiner dan de hoek van de regelmatige veelhoek en kun je nooit een regelmatige *n*- hoek erbij leggen.

**Opdracht 3c, d, e**
De grootste hoek tussen twee gelijkzijdige driehoeken aan elkaar gelegd is 240°. Door beide driehoeken naar elkaar 'toe te vouwen' kun je in de overblijvende hoek drie, twee of één gelijkzijdige driehoek passen.
In een hoek kunnen vier vierkanten samenkomen, dan liggen ze in één vlak, of één vierkant. Het laatste geval levert een kubus op. In een hoek kunnen drie regelmatige vijfhoeken samenkomen, de hoeken zijn samen $3 \times \frac{3}{5} \times 180° = 9 \times 36 = 324°$ groot. Dat is minder dan 360°.
Er zijn dus niet meer dan vijf regelmatige veelvlakken mogelijk.

**Eindopdracht**
Dit onderwerp leent zich goed voor het wetenschappelijke proces van vermoeden en bewijzen. De formule van Euler geldt in het algemeen voor convexe veelvlakken, dat zijn veelvlakken waarvan elke diagonaal geheel binnen de figuur ligt. Voor veelvlakken met een gat erin, bijvoorbeeld een met een tunnel doorboorde kubus, geldt de formule H + V = R + 1.
Veel informatie is op internet te vinden.

## 5.3 Wetenschapsoriëntatie en wiskunde C

### De schoonheid van wiskunde en de stelling van Pythagoras

De volgende opdrachten gaan over de stelling van Pythagoras, over het bewijzen van deze stelling maar ook over hoe mensen wiskunde ervaren. Je kunt daarbij denken aan:

- Overtuigt een bewijs je ook echt over de waarheid van de stelling of is het gewoon een som die goed uitkomt?
- Vind je het ene bewijs mooier en eleganter dan het andere bewijs?

De opdrachten bestaan uit twee gedeelten:

- In het eerste deel maak je een aantal wiskunde opdrachten om met het onderwerp vertrouwd te raken.
- In het tweede deel ga je zelf het een en ander uitzoeken en wordt je gevraagd een beargumenteerde mening te geven.

In deze opdrachten maak je in bredere zin kennis met wiskunde als wetenschap. Wetenschap is mensenwerk en vraagt altijd een menselijke inzet in de vorm van creativiteit, twijfel, toepasbaarheid en vooral doorzettingsvermogen. Ook in de wiskunde als wetenschap kom je deze menselijke activiteiten tegen, al zou je dat vanuit de schoolwiskunde niet direct herkennen. In de volgende opdrachten maak je kennis met deze menselijke kant van de wiskunde en wetenschap.

Misschien is het in de zeer vroege oudheid zo gegaan: iemand ontdekt dat $3^2 + 4^2 = 5^2$ en dat dat bijzonder is want dat geldt bijvoorbeeld niet voor $1^2 + 2^2 = 3^2$. Of iemand ontdekte dat je een driehoek kunt maken met zijden 3,4 en 5 en dat dat een rechthoekige driehoek is. Die laatste eigenschap werd in ieder geval al door de Egyptenaren gebruikt bij het uitzetten van rechte hoeken. En ergens kwam het inzicht dat bij een rechthoekige driehoek in het algemeen geldt dat de som van de kwadraten van de rechthoekzijden gelijk is aan het kwadraat van de schuine zijde en dat het 3-4-5 geval daarvan een speciaal geval is. Bij dat inzicht hoort een bewijs. Dat werd in de Griekse oudheid al geleverd. Je zou zeggen dat dat onderwerp daarmee wel af is. Eén bewijs is wel genoeg. Niets is minder waar. Er kwamen meer bewijzen. Zelfs Multatuli en Napoleon voelden zich uitgedaagd om zelf een bewijs te bedenken. Niet alle bewijzen zijn even duidelijk en sommige zijn mooier dan andere.

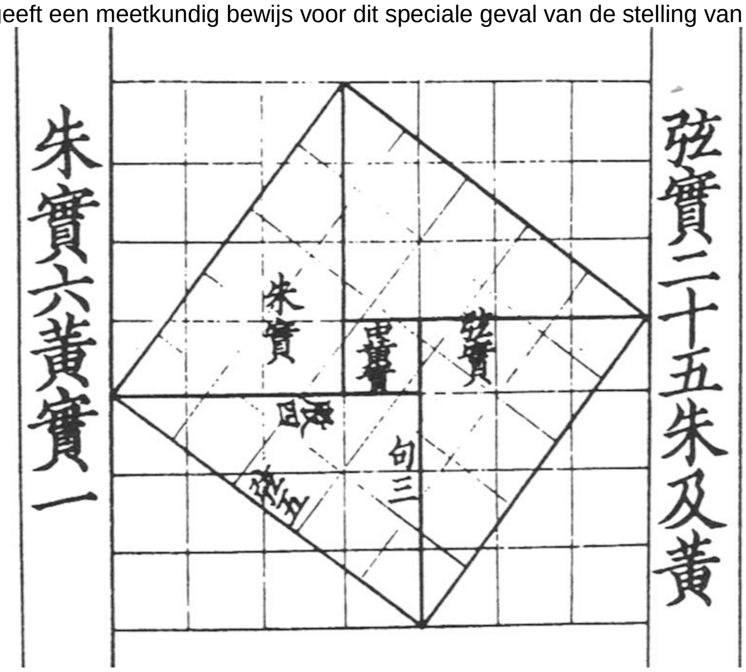
In deze opdrachten maak je kennis met menselijke aspecten van de wiskundige wetenschap als uitdaging, schoonheid en elegantie. Bovendien ervaar je het proces van generaliseren: hoe één speciaal geval tot een algemene eigenschap kan leiden.

### Deel 1: De Stelling van Pythagoras bewijzen

De oudste vermelding van de stelling van Pythagoras staat op een Babylonisch kleitablet van naar schatting 1900–1600 voor Christus (BC). Het is niet bekend of Pythagoras (circa 560 – 480 BC, of een leerling uit zijn school, de eerste was die de stelling heeft bewezen. In de *Elementen* van Euclides (330 BC) staan twee verschillende bewijzen van de stelling.

**Opdracht 1: Het geval 3-4-5**

Elke (oudere) bouwvakker kan je het gebruik van de 3-4-5 driehoek uitleggen bij het uitzetten van een rechte hoek. Het gebruik van de 3-4-5 driehoek is al heel oud. Het plaatje hieronder komt uit een Chinese publicatie, vermoedelijk geschreven tussen 200 jaar BC en 300 AC en geeft een meetkundig bewijs voor dit speciale geval van de stelling van Pythagoras.




De tekst laat meetkundig zien dat bij een rechthoekige driehoek met rechthoekzijden 3 en 4 de lengte van de schuine zijde 5 is.

Dit bewijst gaat als volgt:

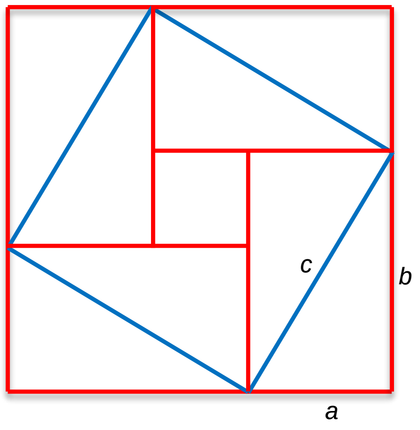
- Teken op roosterpapier een vierkant met zijden 3 + 4 en leg aan de rand de rechthoekige driehoeken zoals in de tekening.
- De schuine zijde vormen samen een vierkant. Teken daarin de weer rechthoekige driehoeken. Je houdt dan in het midden een klein vierkant over.
- Het grote vierkant is zo opgebouwd uit vier rechthoeken en een klein vierkant.
- De buitenste vier rechthoeken hebben samen een oppervlakte van 4 x 3 x 4 = 48 hokjes.
- De oppervlakte van de driehoeken in het scheve vierkanten is daar de helft van: 24 hokjes.
- Samen met het binnenste kleine vierkantje is de oppervlakte van het scheve vierkant dus 25.
- Dan is de lengte van de schuine zijde 5.

(Bron: Eagle, R. (1995). *Exploring mathematics through history*. Cambridge: CUP)

Zo op het eerste gezicht lijkt dit een sluitende redenering. Toch ontbreekt er wat aan. In de tweede regel staat achteloos dat de schuine zijden samen een vierkant vormen. Is dat wel zo en waarom is dat zo? Geef hiervoor een apart bewijs.

**Opdracht 2: Generaliseren**

In de vorige opdracht ging het om 3-4-5 driehoeken. De redenering laat zich echter uitbreiden tot willekeurige rechthoekige driehoeken met zijden *a*,*b*,*c*.




De redenering gaat net zo als in het vorige speciale geval, maar nu met letters voor de lengte van de zijden. Deze overgang van een speciaal naar een algemeen geval heet **generaliseren**. Dit is een bekende manier waarop wiskundigen nieuwe eigenschappen kunnen ontdekken en bewijzen.

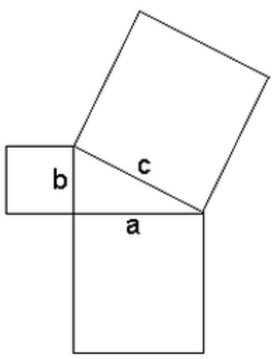
a. Geef een formule voor de oppervlakte de vier rechthoekige driehoeken in het schuine vierkant.
b. Geef een formule voor de lengte van de zijde van het kleine middelste vierkant.
c. Geef nu een formule voor de oppervlakte van het middelste vierkant, werk de formule zo ver mogelijk uit.
d. Laat hiermee zien dat $a^2 + b^2 = c^2$.

**Opdracht 3: Nog twee bewijzen**

Op de site www.cut-the-knot.org/pythagoras vind je 111 bewijzen van de stelling. Dit is maar een gedeelte van het totaal aantal bekende bewijzen.

a. Kies twee bewijzen uit het viertal #6, #10 en #41
b. Werk deze bewijzen uit in je eigen woorden en figuren, zodat je die zelf goed begrijpt.
c. Wat is het verschil tussen deze bewijzen.
d. Waarom koos je deze twee bewijzen?

**Opdracht 4: Pythagoras in het goud**




Leg het volgende probleem voor aan tien medeleerlingen.

*"Stel de vierkanten van de figuur zijn gemaakt van goud.*
*Je mag kiezen: het grote vierkant of de twee kleine vierkanten samen. Wat kies je?"*

Wat is de uitslag van je 'enquête'? Geef een analyse van de uitslag.
Je kunt daarbij gebruik maken van de discussie op www.wiskundemeisjes.nl/20080315/de-stelling-van-pythagoras en let daarbij vooral op de reacties van leerlingen aan het eind.

## Deel 2: De schoonheid van de stelling van Pythagoras

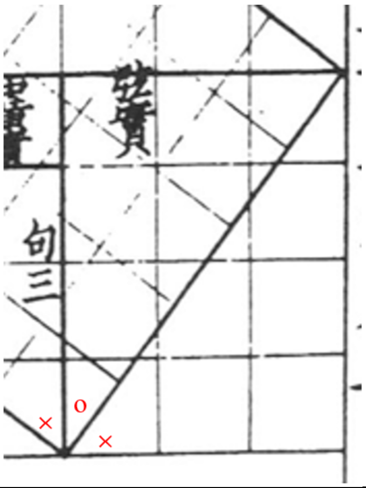
Op de site [http://www.scientias.nl/wiskundige-schoonheid-activeert-zelfde-deel-van-het-brein-als-mooie-kunst-muziek/](http://www.scientias.nl/wiskundige-schoonheid-activeert-zelfde-deel-van-het-brein-als-mooie-kunst-muziek/) vind je het volgende citaat:

“Voor velen van ons kunnen wiskundige formules heel droog en ontoegankelijk lijken, maar voor een wiskundige kan een wiskundige vergelijking de belichaming van de kern van schoonheid zijn,” legt onderzoeker Semir Zeki uit. “De schoonheid van een formule kan voortkomen uit de eenvoud, symmetrie, elegantie of de uiting van een onwrikbare waarheid.”

In het citaat vind je vier kenmerken van wiskundige schoonheid. Onderzoek of deze kenmerken ook van toepassing zijn op de vier bewijzen van de stelling van Pythagoras die je in de voorgaande opdrachten bent tegengekomen. Behandel in je verslag elk bewijs afzonderlijk op deze vier aspecten. Geef in deze analyse ook aan wat volgens jou de opvallendste verschillen zijn in deze bewijzen.

***Uitwerkingen***

**Opdracht 1**



In de rechthoek zijn de hoeken x en o samen $90^0$. Die hoeken vind je ook terug in de hoeken van de schuine vierhoek. Bovendien zijn de zijden van deze vierhoek even lang.

**Opdracht 2**

a. De vier rechthoeken samen hebben een oppervlakte 4 $ab$. De vier rechthoekige driehoeken in het schuine vierkant hebben dan oppervlakte 2$ab$.

b. De lengte van de zijde van het kleine vierkant is $b – a$.

c. De oppervlakte van het kleine vierkant is $(b – a)^2 = b^2 – 2ab + a^2$

d. De oppervlakte van het kleine vierkant is dus $b^2 – 2ab + a^2 + 2ab = a^2 + b^2$.

**Opdracht 3**

De opdrachten zijn zo gekozen dat er tenminste één bewijs bij zit waar een beetje algebra bij komt kijken. In de argumentatie van de keuze kan dit een rol spelen.

**Opdracht 4**

In de discussie op de site van de wiskundemeisjes gaan een aantal wiskundedocenten heel erg de wiskundige diepte in over de stelling van Pythagoras en het bewijs daarvan. Leerlingen die hadden gehoopt een eenvoudige uitleg te krijgen, voelen zich bedrogen. Misschien dat het raadsel van het bladgoud hierin meer begrip heeft opgeleverd.

**Eindopdracht**

Leerlingen kunnen hier eigen criteria voor de schoonheid van een formule en een bewijs aangeven. Een onderscheid kan zijn dat sommige bewijzen gebruik maken van algebra en dat sommige volledig meetkundig zijn. Ook de mate van eenvoud tegenover complexiteit kan een criterium zijn voor schoonheid.

## 5.4 Wetenschapsoriëntatie en wiskunde D

### Hoe paradoxen de wiskunde veranderen

De volgende opdrachten gaan over paradoxen in de wiskunde en hoe deze tot nieuwe ontwikkelingen hebben geleid.
De opdrachten bestaan uit twee gedeelten. In deel 1 maak je kennis met een klassieke paradox en laat je zien hoe die met nieuwere wiskunde opgelost kan worden. In deel 2 ga jezelf op zoek naar paradoxen uit verschillende gebieden van de wiskunde en beschrijf je hoe deze tot andere inzichten hebben geleid.

In deze opdrachten maak je in bredere zin kennis met wiskunde als wetenschap. Wetenschap is mensenwerk en vraagt daarom altijd een menselijke inzet in de vorm van creativiteit, twijfel, toepasbaarheid en vooral doorzettingsvermogen. Ook in de wiskunde als wetenschap kom je deze menselijke activiteiten tegen, al zou je dat vanuit je schoolwiskunde niet direct herkennen. In de volgende opdrachten maak je kennis met deze menselijke kant van de wiskunde en wetenschap.
Paradoxen zijn uitspraken die waar kunnen zijn en tegelijkertijd toch niet waar zijn. Het bijzondere van paradoxale situaties is dat ze niet het privilege zijn van wetenschap en wiskunde, maar dat ze grote groepen mensen in de samenleving weten bezig te houden. En juist door die brede belangstelling van de samenleving, krijgt de ontwikkeling van de wetenschap een impuls om hierop dieper door te denken en een oplossing te vinden. Zo zijn nieuwe eigenschappen en theorieën in de wiskunde ontdekt of uitgevonden. Maar soms ook laten analyses van paradoxen zien dat ze eenvoudigweg berusten op vooroordelen of verkeerde intuïties.

### Deel 1: Achilles en de schildpad

**Opdracht 1: Een Griekse paradox**
De snelvoetige Achilles gaat een wedstrijd aan met een schildpad. De schildpad krijgt een voorsprong. Wanneer Achilles het punt A bereikt, waar de schildpad kort tevoren was, is de schildpad intussen bij punt B aangekomen. Arriveert Achilles bij dit punt B, dan is de schildpad intussen aangekomen bij punt C, enzovoorts.
Conclusie: De achterstand wordt kleiner, maar Achilles haalt de schildpad nooit in. Dit is een paradox, want in werkelijkheid zal Achilles de schildpad wel inhalen.
(Bron: Wikipedia)
De voorsprong wordt steeds gehalveerd. Ga uit van een willekeurig gekozen voorsprong en leidt met een formule af dat deze uiteindelijk naar 0 gaat.

## Deel 2: Wiskunde verandert

Het probleem met de paradox van Achilles en de schildpad was dat de Griekse filosofie zich niet kon voorstellen dat een oneindig proces toch een eindige uitkomst kon hebben. Pas met de introductie van het limietbegrip wisten wiskundigen in de 17de eeuw deze paradox tot een oplossing te brengen.
Niet alle paradoxen hebben een dergelijk ingrijpend effect op de wiskunde.
Op [http://nl.wikipedia.org/wiki/Paradox(logica)](http://nl.wikipedia.org/wiki/Paradox(logica)) vind je een overzicht van verschillende soorten paradoxen en per soort een aantal voorbeelden van paradoxen.

**Opdracht 2: Meer paradoxen**

a. Geef een samenvatting van deze indeling per soort en geef per soort een omschrijving van de belangrijkste kenmerken.
b. Kies per soort een paradox die van invloed is geweest op de ontwikkeling van de wiskunde en beschrijf hoe de wiskunde hierdoor is veranderd.

***Uitwerkingen***

**Opdracht 1**

Ga ervan uit dat de snelheid van beide constant is. Stel dat Achilles 10 keer zo snel loopt. Stel dat op tijdstip *t* Achilles plaats A bereikt heeft en dat *V* de afstand van de start tot A is. Inmiddels heeft de schildpad plaats B bereikt. De afstand van A naar B is dan

$$\frac{1.}{10}V$$

Om van A naar B te komen heeft Achilles

$$\frac{1}{10}t$$

seconden nodig. De schildpad loopt in die tijd van B naar C. Die afstand is dan:

$$\frac{1}{100}V$$

En zo verder.

De totale afstand die Achilles aflegt is dus:

$$V + \frac{1}{10}V + \frac{1}{100}V \ldots = V(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \ldots)$$

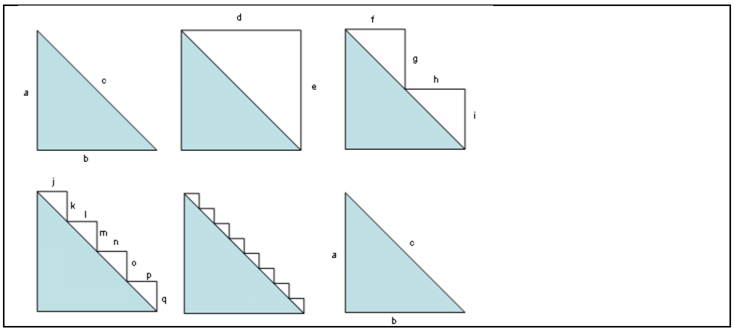
Dit is een oneindige meetkundige rij. De som is:

$$V\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{10}{9}V = 1{,}11..V$$

**Opdracht 2a**
Wikipedia geeft een indeling van paradoxen. Andere indelingen zijn mogelijk op andere sites te vinden. Het gaat bij deze opdrachten vooral om de zoektocht naar paradoxen die de wiskunde veranderden en paradoxen die dat niet deden.

**Opdracht 2b**
Een aantal mogelijke voorbeelden zijn:

- De **leugenaarsparadox** uit de logica is de bewering: “Ik ben een leugenaar”. Er zijn veel varianten op. Deze leidde uiteindelijk tot een verscherping van de formele regels van de logica en de verzamelingenleer.
- De **Pythagorasparadox** leidt tot het besef dat de limiet van de som oneindig veel kleine stukjes niet gelijk is aan de oneindige som van de limieten.




Sommige paradoxen zijn schijnbare paradoxen[1] en een gevolg van onzorgvuldig taalgebruik of van verborgen vooronderstellingen.

[1] N.B. In het literatuuronderwijs staat de term 'paradox' zelf al voor een schijnbare tegenspraak. In de logica en de wiskunde wordt 'paradox' voor tegenspraak als zodanig gebruikt.

SLO heeft als nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling een publieke taakstelling in de driehoek beleid, praktijk en wetenschap. SLO heeft een onafhankelijke, niet-commerciële positie als landelijke kennisinstelling en is dienstbaar aan vele partijen in beleid en praktijk.

Het werk van SLO kenmerkt zich door een wisselwerking tussen diverse niveaus van leerplanontwikkeling (stelsel, school, klas, leerling). SLO streeft naar (zowel longitudinale als horizontale) inhoudelijke samenhang in het onderwijs en richt zich daarbij op de sectoren primair onderwijs, speciaal onderwijs en voortgezet onderwijs. De activiteiten van SLO bestrijken in principe alle vakgebieden.

Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
E info@slo.nl
www.slo.nl

company/slo
@slocommunicatie

Foto omslag: Freddie Westerhof

slo