foto: humantouchphotography.nl

Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken

Handreiking met voorbeeldmateriaal

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

Mei 2012

slo

Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken

Handreiking met voorbeeldmateriaal

Mei 2012

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

Auteurs: Nico Alink, Roel van Asselt, Nelleke den Braber

Met bijdragen van: Jos Paus, Jos Tolboom

In samenwerking met: Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO)

Informatie
SLO
Afdeling: tweede fase
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 661
Internet: www.slo.nl
E-mail: tweedefase@slo.nl

AN: 3.6553.499

Inhoud

1. Inleiding

Achtergrond
De afgelopen jaren hebben vijf commissies gewerkt aan nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo. De vakken natuurkunde, scheikunde, biologie en bètavak natuur, leven en technologie (NLT) hebben hun advies in 2011 opgeleverd. Voor wiskunde is dit bijna twee jaar later. Ook de datum van invoering van de nieuwe wiskundeprogramma’s ligt later dan bij de eerder genoemde vakken (2015). Bij de ontwikkeling van de examenprogramma's wiskunde speelt de vernieuwingscommissie (cTWO) een leidende rol.
Ook economie kent een vernieuwingstraject; de nieuwe programma's zijn ingevoerd in 2010 en 2011.

Eén van de pijlers van de bètavernieuwing is samenhang tussen de vakken. Voor de natuurwetenschappelijke vakken is een publicatie verschenen waarin de samenhang tussen de examenprogramma's natuurkunde, scheikunde, biologie en NLT zichtbaar is gemaakt door kernconcepten, thema's en eindtermen (Boersma e.a., 2011). Maar uiteraard speelt wiskunde ook een rol bij bètasamenhang, zoals in het visiedocument 'Rijk aan betekenis' (cTWO, 2007) beschreven is. Eén van de doelstellingen daarin is het versterken van de samenhang tussen enerzijds het vak wiskunde en anderzijds (vooral) de vakken natuurkunde, scheikunde, biologie en ook economie.
De samenhang wordt versterkt wanneer wiskundedocenten meer dan nu gebruik kunnen maken van concrete opgaven en contexten uit de andere vakken. Uiteraard gaat het daarbij om contexten waarin de wiskunde een essentiële plaats inneemt.
Tegelijkertijd kunnen de docenten van de andere vakken gebruikmaken van de vaardigheden en inzichten die de leerlingen in het wiskundeonderwijs tegenkomen.
Uit eerder onderzoek is gebleken dat de benadering van een vraagstuk binnen een context heel verschillend kan zijn; een economiedocent kijkt bijvoorbeeld met een andere bril naar een vraag over marginale kosten dan een natuurkunde- of wiskundedocent. Met elkaar hierover in gesprek gaan kan zeer waardevolle informatie opleveren over het eigen vak, de relatie tot andere vakken en meerwaarde bieden voor de leerling.
Een andere stimulans voor samenhang en afstemming van (bèta) vakken volgt uit een onmiskenbare trend in het hoger onderwijs en in het beroepenveld[1]. Technische studies berusten van nature al op samenhangend gebruik van bètavakken. We zien daarnaast nog een mondiale ontwikkeling in het interdisciplinair ontwerpen, produceren en implementeren van innovatieve toepassingen. Voorbeelden daarvan zijn nanotechnologie, telecommunicatie, milieutechniek, gezondheidstechniek die zonder een interdisciplinaire aanpak niet mogelijk zijn. Samenhang tussen bètavakken in het voortgezet onderwijs legt een basis voor interdisciplinair werken en denken.

Werkwijze project
Om een bijdrage te leveren aan de vergroting van de samenhang tussen de bètavakken werken SLO en cTWO samen in het kader van het SLO-project '*Samenwerking met en ondersteuning*

[1] Zie ook “*Betekenis van Wiskunde in het beroepenveld*”, NVvW, mei 2012; interviews in het beroepenveld.

van cTWO bij de vernieuwing van de examenprogramma's wiskunde' met als doelstelling om expliciet op zoek te gaan naar:

- mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en de bètavakken[2] met oog voor de verschillen in didactische aanpak, notaties en begripgebruik;
- manieren om docenten bewust te maken van de overeenkomsten en verschillen van wiskundegebruik, gelet op de leerling die de verschillende werelden tot nu toe grotendeels zelf met elkaar moet (kunnen) verbinden en docenten verder te helpen om samenhang zichtbaar te maken voor de leerling;
- bruikbaar lesmateriaal in de vorm van vraagstukken voor de wiskundedocent waarmee samenhang en afstemming zichtbaar worden en leerlingen geholpen worden om wiskunde effectiever, gemotiveerder en meer inzichtelijk toe te passen.

Er is uitgegaan van de conceptexamenprogramma's voor wiskunde die in 2015 van kracht worden, en de nieuwe examenprogramma's voor economie, biologie, scheikunde, natuurkunde (start 2013). SLO speelt een coördinerende rol bij het invoeringstraject rond deze nieuwe examenprogramma's.

In het genoemde samenwerkingsproject is de volgende werkwijze gevolgd.
De uitkomsten van een veldraadpleging[3] tussen de vijf bètavernieuwingscommissies en andere deskundigen zijn verwerkt en aangevuld tot overzichten waarin bij de eindtermen van wiskunde een koppeling is gemaakt naar de eindtermen van de bètavakken (en economie). Verder is aangegeven waar mogelijkheden zijn (rond vakinhoud) tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en de bètavakken en economie. De overzichten zijn in deze handreiking opgenomen als bijlagen. Daarnaast is voor natuurkunde en voor economie gezocht naar voorbeelden en bruikbaar lesmateriaal, waarover het veld zeven keer geraadpleegd is. Voor biologie, scheikunde en NLT is een eerste aanzet gedaan tot het verzamelen van voorbeelden, maar verdere bewerking tot bruikbaar materiaal was in de beperkte projecttijd helaas niet mogelijk.

Leeswijzer
Deze handreiking met voorbeelden is opgesteld op basis van de in de veldraadplegingen gevonden ervaringen met, en opinies over het in het project verzamelde lesmateriaal en over de feitelijke mogelijkheden van afstemming tussen vakken. De bevindingen uit de veldraadplegingen, waarin het gebruik van verzamelde voorbeelden in een gesprek een grote rol spelen hebben we ondergebracht in drie delen (A, B en C) waarin we onderscheiden: beleid in de school, gesprekken met collega's en voorbeeldmateriaal. Ze vormen volgens ons drie belangrijke factoren die scholen (en docenten) helpen om samenhang en afstemming van wiskunde en andere vakken succesvol te maken. Deze factoren zijn:

A. Ondersteuning, structuur en schoolbeleid: samen in beleid.
B. Overleg tussen secties en profielteams op schoolniveau: samen in gesprek.
C. Concrete voorbeelden van bèta- en economietoepassingen in de wiskundeles: samen aan de slag.

Deze handreiking is geschreven voor ieder die interesse heeft in het onderwerp 'samenhang tussen de vakken' of graag het gesprek hierover in school op gang wil brengen.
Elke factor wordt verder uitgewerkt in één van de drie delen (A, B en C) van deze handreiking. De delen zijn aanvullend op elkaar geschreven, maar zijn ook afzonderlijk te lezen en te gebruiken.

[2] Later ook voor economie.
[3] Georganiseerd door SLO en cTWO, maart 2010

Deel A richt zich op schoolleiders en afdelingsleiders, die samenhangend onderwijs binnen de school vorm willen geven. Deel B en C richten zich vooral op een middel om samenhang zichtbaar te maken, namelijk afstemming. Deel B richt zich daarbij op team- of vaksectieleiders en deel C op vakdocenten.

Wordt in deze handreiking gesproken vanuit 'we', dan wordt het gezichtspunt van de auteurs verwoord.

Dankwoord
We danken de docenten die de tijd hebben genomen om met ons in gesprek te gaan.
- Het Assink Lyceum, Haaksbergen
- Bonhoeffer College, Enschede
- Twents Carmel College locatie de Thij, Oldenzaal
- Twents Carmel College locatie Lyceumstraat, Oldenzaal
- Zernike College, Haren
- Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen
- Rietveld Lyceum, Doetinchem

U mag materiaal uit deze handreiking gebruiken. Doet u dat, dan zouden wij het zeer op prijs stellen uw ervaringen te vernemen. Opmerkingen, aanvullingen en vragen met betrekking tot deze publicatie zijn welkom .

foto: humantouchphotography.nl

Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken

Handreiking met voorbeeldmateriaal

Deel A
Samen in beleid

Deel A | Samen in beleid

slo

DEEL A Samen in beleid

In deel A schetsen we eerst kort de achtergrond rond samenhang en afstemming, waarna we deze termen onder de loep nemen. Vervolgens richten we ons op de verschillende actoren en niveaus die een rol spelen als een school samenhang vorm wil geven. Hierbij neemt het schoolbeleid een belangrijke plaats in. Opmerkingen en gedachten uit de vele schoolbezoeken vormen een grote inspiratie voor dit deel.

2. Achtergrond

"In de ontwikkeling van de vernieuwde vakken van de tweede fase moet de samenhang tussen de verschillende wiskundevakken en andere vakken worden verbeterd, evenals de onderlinge afstemming. Het gaat daarbij niet uitsluitend om de exacte vakken, maar ook bijvoorbeeld om economie en aardrijkskunde."
Uit: Rijk aan betekenis, cTWO, pag. 25

Samenhang en afstemming binnen de bètavakken is een lang bestaande wens binnen het voortgezet onderwijs. Geconstateerd mag worden dat zowel op praktisch schoolniveau als op landelijk programmaniveau tot nu toe nog weinig concrete - voor de leerling merkbare - successen zijn geboekt. Dit ondanks de energie die op verschillende niveaus in samenhang en afstemming is gestoken en ondanks de politieke wens te komen tot meer samenhang tussen de (profiel)vakken.

De tweede fase moest meer samenhang brengen binnen de profielen, maar daar is met name in de beginjaren weinig van terechtgekomen. Met de invoering van de nieuwe examenprogramma's leek een nieuwe mogelijkheid zich aan te dienen om samenhang aan te brengen vanuit de eindtermen en syllabi. Ondanks de inspanningen van de vernieuwingscommissies zijn er bij het ontwerp van de nieuwe *examenprogramma's* van de bètavakken en economie evenwel weinig pogingen ondernomen om in de eindtermen verbindingen op kennis en inzicht uit andere vakken te realiseren. Als verklaring werd gegeven dat de tijd en de menskracht ontbraken om de samenhang programmatisch te onderzoeken en de resultaten op te nemen in de beschrijving van de examenniveaus. In het project *Samenwerking met en ondersteuning van cTWO bij de vernieuwing van de examenprogramma's wiskunde* is een poging gedaan om verbindingen te leggen tussen de examenprogramma's en zo mogelijkheden tot samenhang en afstemming zichtbaar te maken (zie bijlagen).
Ook bij het uitzetten van de pilots bij scholen die proef draaiden met de nieuwe examenprogramma's kwamen samenhang en afstemming nog onvoldoende aan bod. Het lijkt nu dat aan de materiaalontwikkelaars i.c. de uitgevers en aan de opstellers van de centrale eindexamens wordt overgelaten in hoeverre invulling wordt gegeven aan inhoudelijke vakafstemming. Echter schoolboeken worden nog altijd vanuit de eigen discipline en uitgeverstradities ontwikkeld en op de markt gebracht. En uit onderzoek blijkt dat de schoolboeken voor de bètadocent in Nederland een grote leidraad zijn voor de lespraktijk.

Niet voor niets schrijft cTWO in haar visiedocument:
"Dit probleem is hardnekkig. Het cultuurverschil tussen bijvoorbeeld het wiskunde- en het natuurkundeonderwijs is de laatste decennia sterk toegenomen. Ook leraren hebben er moeite mee de verbanden nog te zien."
Uit: Rijk aan betekenis, cTWO, pag. 25

Hoewel bovenstaande redenering herkenbaar is, zijn er ook positieve (recente) ontwikkelingen te noemen.

- In de examenprogramma's van de bètavakken is in het domein A 'Vaardigheden' een aantal gemeenschappelijke bètavaardigheden genoemd die mogelijk tot verdere afstemming kunnen leiden.
- Er is overleg geweest tussen de syllabuscommissies van wiskunde en natuurkunde over de nomenclatuur vanuit de wiskunde en een mogelijke verwerking daarvan in de natuurkundesyllabus.
- Recent verscheen de publicatie '*Samenhang in het natuurwetenschappelijk onderwijs voor havo en vwo*' vanuit het IOBT[4] (Boersma e.a., 2011). In deze publicatie is de samenhang binnen de nieuwe examenprogramma's van de havo- en vwo-vakken biologie, scheikunde, natuurkunde en NLT grondig geanalyseerd aan de hand van kernconcepten, contexten en denk- en werkwijzen uit deze vier bètavakken.
- Van een gemengde werkgroep van cTWO en Nina[5] verscheen een rapport genaamd '*Afstemming Wiskunde-Natuurkunde'* waarbij de samenhang tussen beide vakken als uitgangspunt is genomen (Giessen e.a., 2008).
- Op het gebied van lesmateriaal heeft het samenwerkingsverband SaLVO stimulerend materiaal gemaakt in de afgelopen jaren, voor zowel onder- als bovenbouw[6].
- Onlangs verscheen een publicatie met lesmateriaal rond 'samenhang tussen de bètavakken in Europees perspectief' (Compass, 2011) met als doel wiskunde en natuurwetenschappen met elkaar te verbinden, maar ook met de leefomgeving van de individuele leerlingen. Voorbeelden uit verschillende Europese landen worden in deze publicatie beschreven.
- Het nieuwe bètavak natuur, leven en technologie (NLT, sinds 2007) kenmerkt zich door interdisciplinariteit, maar ook de rol van wiskunde is specifiek verwoord in het examenprogramma NLT. Het vak laat zien waar wiskunde gebruikt wordt binnen natuurwetenschap en technologie.

We willen de eigen initiatieven van scholen niet vergeten waar geïnspireerde docenten en schoolleiders een vorm zoeken om samenhangend onderwijs te creëren. Het project heeft ons verder op het spoor gezet van deze scholen.
Kortom: het onderwerp leeft.

[4] Innovatie van het Onderwijs in de Bètavakken en Technologie
[5] Nieuwe Natuurkunde, vernieuwingscommissie voor de natuurkundeprogramma's
[6] Samenhangend Leren Voortgezet Onderwijs

3. Samenhang en afstemming

"Samenhang en afstemming zijn twee begrippen die met elkaar in verband staan maar niet hetzelfde aangeven. Zowel afstemming als samenhang zijn op verschillende niveaus zoals school, leerboek, curriculum te onderscheiden. Hier wordt samenhang als een intentie beschouwd die verder gaat dan afstemming. Samenhang impliceert afstemming, afstemming garandeert nog geen samenhang."
Uit: Afstemming Wiskunde-Natuurkunde, 2007

Een criterium voor samenhangend onderwijs is de mate waarin leerlingen samenhang ervaren. Een middel om samenhang zichtbaar te maken aan leerlingen is afstemming. Onder ***afstemming*** tussen twee vakken verstaan we het resultaat van overleg over concrete zaken als het verschil in notaties, nomenclatuur, begripsomschrijvingen, gebruik van grootheden en eenheden enzovoort en hoe dit vorm krijgt in het gebruik van voorbeelden, toepassingen, denkactiviteiten, vraagstukken of contexten in de lespraktijk van zowel het ene vak als het andere.
Onder ***samenhang*** tussen twee schoolvakken[7] verstaan we een samenhang tussen vakinhouden, maar ook de organisatie van het leerproces, zodat er een ondersteuning, versterking of aanvulling van het ene vak door het andere plaatsvindt. Samenhang tussen twee vakken werkt twee kanten op. Vak A kan niet samenhangen met vak B als vak B niet versterkend of aanvullend is voor A. Samenhang speelt doorgaans op curriculum- en examenniveau en krijgt vorm op schoolniveau. Vakinhouden ordenen in de tijd, zodat een logische leerlijn ontstaat over de vakken heen, hoort bij samenhangend onderwijs. Hoewel zeer nastrevenswaardig is het vaak niet mogelijk om synchronisatie in de tijd te realiseren en worden vakinhouden achteraf of vooruitlopend behandelend. In onze optiek kan samenhang nog wel ontstaan als de volgorde in de tijd transparant is voor de leerling.

In deze publicatie zien we afstemming als een voorwaarde voor het creëren van samenhangend onderwijs en een middel om samenhang zichtbaar te maken in de lespraktijk. In deel B (en C) gaan we nader in op het werken aan afstemming.

[7] Hoewel de samenhang van schoolvakken gerelateerd zal zijn aan de samenhang tussen de onderliggende soorten van wetenschap gaan we op die samenhang hier niet in.

4. Niveaus en actoren

"Waarom moet elke school het wiel weer opnieuw gaan uitvinden? Waarom zit het niet in de examenprogramma's of nemen de uitgevers dit mee in hun lesmateriaal?"
Een vraag van een docent tijdens een schoolbezoek

Deze vraag toont verschillende actoren die een rol spelen bij het creëren van samenhang en afstemming. Zowel op curriculum-, schoolboeken- en schoolniveau liggen mogelijkheden tot het komen tot samenhang waarbij we de docent in zijn eigen les ook willen toevoegen als 'niveau'. We bespreken deze niveaus, gevolgd door de actoren en enkele aspecten die een rol spelen in dit omvangrijke thema 'samenhang'.

4.1 Niveaus

In het visiedocument van de Vernieuwingscommissie wiskunde (cTWO) is de wens tot samenhang en afstemming met de andere bètavakken aangegeven en wel in het visie-element 'vensters naar buiten'. Wiskunde wordt in het document zowel beschreven als een afzonderlijke denkdiscipline als een ondersteunend vak binnen maatschappelijke en natuurwetenschappelijke contexten.
Mede om die reden is besloten om het project van waaruit deze handreiking naar scholen wordt gedaan, een praktisch en docentgericht karakter en aanpak te geven. We kunnen hierbij niet voorbijgaan aan het feit dat een aantal beleidskeuzes (landelijk, uitgevers, school) een rol spelen, zelfs voorwaardelijk zijn. Tijdens de schoolbezoeken gedurende dit project zijn een aantal zaken met enige stelligheid door docenten genoemd. We delen ze in op vier 'niveaus'.

Examenprogramma's, syllabi en handreikingen
Afstemming blijft idealistisch en broos werk van enkelingen als toepassingen uit andere vakgebieden niet in de landelijke eindexamens en schoolexamens aan de orde komen. Dit lijkt een terugkomende constatering. In de praktijk zijn de CE- en SE-programma's normstellend binnen een school. Bij de beschrijving van de nieuwe examenprogramma's lijken opnieuw een aantal mogelijkheden onbenut te blijven, hoewel een eerste aanzet is gegeven. Het blijft belangrijk om aandacht te vragen voor samenhang en afstemming bij de betrokken niveaus (overheid, vernieuwingscommissies, examencommissies en ondersteuners). Uiteraard door het belang te benadrukken van samenhang en afstemming voor de leerling, de docent en de school, zoals verderop beschreven. In de bijlagen hebben wij een poging gedaan aangrijpingsmogelijkheden om samenhang of afstemming aan te brengen overzichtelijk weer te geven op basis van de nieuwe examenprogramma's.

Uitgevers en lesmateriaal
In de veldraadplegingen werd door docenten veelvuldig de vraag gesteld waarom de schoolboeken niet meer aandacht besteden aan afstemming. 'Het boek' is een belangrijk baken voor de inrichting van de lessen bij de bètadocent in Nederland. Als in lesmateriaal het voortouw wordt genomen voor afstemming of hiervoor suggesties worden gedaan, is de kans op structurele, succesvolle afstemming groter. In gesprekken met uitgevers komt naar voren dat aandacht aan samenhang en afstemming pas gegeven wordt als dat van overheidswege wordt voorgeschreven[8]. Verder worden de gesprekken met de uitgevers het beste verwoord zoals beschreven in het rapport *Afstemming Wiskunde-Natuurkunde*.

"Samenhang betekent dat boeken tegelijkertijd ontwikkeld moeten worden. Vanuit het oogpunt van concurrentie zou het voor uitgevers aantrekkelijk zijn een samenhangend pakket te kunnen presenteren. Het idee is echter niet erg realistisch. Tot op heden gaat het over losstaande vakken met eigen auteursteams en ontwikkeltrajecten. Een nieuwe generatie boeken ontwikkelen kost op zijn minst twee jaar, ervan uitgaand dat de vakinhouden tevoren al bekend zijn. Naast een programma met eindtermen zijn leerlijnen nodig om zich op te richten. Worden die niet aangereikt dan zouden die intern ontwikkeld moeten worden."
Uit: Afstemming Wiskunde-Natuurkunde, 2007

Schoolbeleid
Een school die ervoor kiest om samenhang en afstemming op de agenda te zetten, kan daarmee voor ogen hebben dat:

- samenhang en afstemming bijdragen aan tijdwinst, vanwege het voorkomen van overlap;
- betekenisvoller onderwijs ontstaat, doordat aangeleerde begrippen of concepten door een toepassing betekenis krijgen voor leerlingen binnen een ander vak. Hierdoor ontstaat een verbreding van kennis of leerwinst doordat op meerdere plekken aangeboden stof beter beklijft door herhaling;
- het leerlingen helpt zich beter voor te bereiden op vervolgstudies. In veel vervolgstudies moeten studenten bedacht zijn op vitale (soms vanzelfsprekende) samenhang binnen een discipline omdat veel vervolgopleidingen niet de strikte vakkenstructuur en vakkenscheiding kennen;
- docenten meer samenwerken en hun eigen vakkennis vergroten. Het kan docenten stimuleren tot samenwerking en kennisvergroting doordat de positie en betekenis van het eigen vak beter in beeld komen ten opzichte van andere vakken.

In de praktijk blijkt de tijdwinst niet veel effect te hebben, doordat vakken vaak aanvullend zijn en onderdelen moeilijk worden weggelaten. De andere oogmerken sluiten aan bij het besef dat de wereld doorgaans interdisciplinair is en dat veel problemen in de maatschappij niet aan te pakken zijn door één vakdiscipline. In de opkomst van 'combinatiestudies', (bijvoorbeeld life sciences, technische geneeskunde, bioinformatica) lijkt dit besef vorm te krijgen in het schoolvak NLT.
De keuze voor een praktische insteek op schoolniveau dwingt tot reflectie op ondersteunend schoolbeleid. Vrijblijvend pionierswerk door enkele geïnspireerde docenten leidt niet tot effectieve samenhang en afstemming. Hierover meer in paragraaf 4.3.

Vaksecties (docenten)
De meeste docenten zijn bevoegd voor een vak en voelen zich niet zeker in een andere discipline. Om afstemming te bewerkstelligen is het echter niet nodig een ander vak te

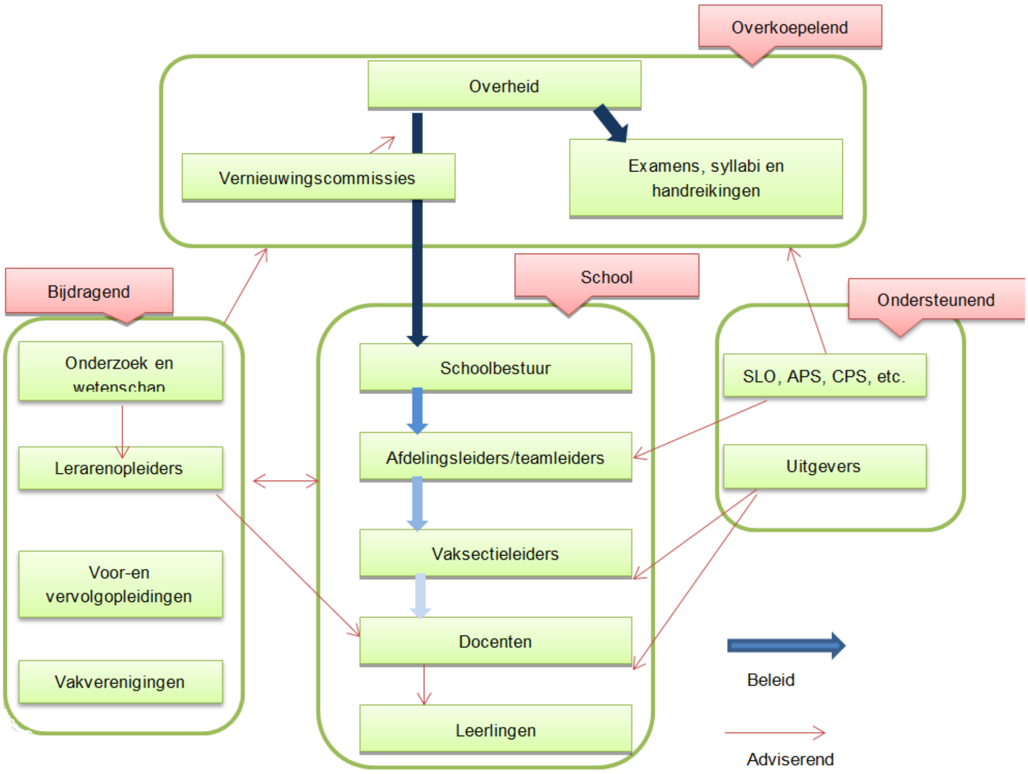
[8] Op het gebied van rekenvaardigheden lijken zich wel initiatieven te ontplooien rond afstemming binnen de vakgebieden.

beheersen, maar wel om met een open blik een gesprek aan te gaan met een collega. Wederzijds begrip is een goed voorbeeld voor de leerlingen. Door wiskundedocenten wordt vaak gezegd dat ze de leerlingen zaken aanleren die bij andere vakken gebruikt worden. Maar of, wanneer en op welke manier dit bij een ander vak gebeurt, lijken docenten niet altijd helder voor ogen te hebben. Vaak realiseert men zich niet dat vanuit verschillende disciplines met een verschillende blik naar de wereld wordt gekeken.
Hier ligt een grote rol weggelegd voor de lerarenopleidingen. In de competentieprofielen, en dus in de opleidingsprofielen, zou veel meer aandacht aan aspecten rond transfer van kennis en vaardigheden tussen en binnen leergebieden en aan afstemming van vakken geschonken moeten worden.

Uit de gesprekken die we in het kader van dit project hebben gevoerd, blijkt dat de programmacommissies, uitgevers en docenten positief staan tegenover samenhang en afstemming. Tegelijkertijd is hoorbaar dat er '*allerlei redenen'* zijn om niet met dit thema bezig te gaan en wordt het probleem bij andere partijen neergelegd.
We onderkennen dat samenhangend onderwijs een complex thema is en dat het vaak niet de prioriteit heeft. De insteek van deze handreiking is dat we kijken naar wat **wel** mogelijk is bij elke partij en dat er nog veel winst is te behalen (hoe klein die soms ook kan zijn).
Zet in op wat wel kan en zoek de meerwaarde binnen het eigen straatje!

4.2 Actoren

Met betrekking tot het ontwikkelen, vormgeven en toetsen van samenhang en afstemming in het voortgezet onderwijs zijn in figuur 1 de belangrijkste actoren weergegeven. De figuur benadrukt de complexiteit van het thema. Het is echter van belang deze actoren in beeld te houden. Niet om het probleem af te schuiven, maar om mogelijkheden te verkennen voor onderlinge samenwerking. De figuur geeft verder zicht op de fasering of waar welke partijen gesprekken kunnen voeren om verder te komen in de vormgeving van samenhang.
De bepalende dan wel adviserende invloed van ieder van de actoren op (een van) de andere is gevisualiseerd en spreekt grotendeels voor zich. De dikke pijlen geven een beleidsrichting aan, waarbij onderscheid wordt gemaakt tussen beleid op samenhangend onderwijs en beleid op afstemmingsactiviteiten. Hoe lichter de pijl, hoe meer het beleid gericht is op afstemmingsactiviteiten in plaats van samenhang. De adviserende/feedback tussen actoren is door de 'dunne' pijlen weergegeven.
De figuur onderscheidt vier groepen actoren, namelijk overkoepelend, ondersteunend, bijdragend en school (=uitvoerend). Zowel tussen de groepen als binnen een groep zijn verbindingen mogelijk (en wenselijk).



Figuur 1: Actoren bij samenhang en afstemming

Op schoolniveau vormen schoolbesturen de eerste schakel om samenhang binnen de examenprogramma's om te (laten) zetten in onderwijs, de afdelingsleiders aan te sturen hierop beleid te ontwikkelen en om dat beleid te faciliteren. Vaksecties en docenten voeren dat uit. Een belangrijke rol is er voor de docenten waar het de afstemming op lesniveau betreft. Zijn zij de trekkers van afstemming, of de volgers van wat schoolboeken voorschrijven?

4.3 Schoolbeleid

"Tijdens schoolbezoeken die het Tweede Fase Adviespunt heeft afgelegd was samenhang en afstemming een weerkerend thema. Echter iedere keer werd (door docenten en schoolleiders) verzucht dat weliswaar iedereen overtuigd was van het nut van samenhang en afstemming en de tijdwinst die het zou opleveren, maar dat eenvoudigweg de tijd ontbrak om daar goed werk van te maken."
Uit: Criteria voor samenhangend onderwijs (Roorda en van Streun, 2002)

Geïnspireerde en enthousiaste docenten zijn nodig om initiatieven vorm te geven binnen de school. Dit geldt ook zeker voor samenhang en afstemming. Maar initiatieven tussen vakken worden aanmerkelijk succesvoller en blijven niet beperkt tot ideële afspraken tussen docenten, als de school een beleid heeft geformuleerd over samenhang en afstemming. Dit kwam in alle schoolbezoeken aan de orde.
Dat beleid biedt dan (naar verwachting) tevens de *condities* voor de uitvoering ervan. We denken aan de beschikbare overlegtijd voor secties en/of profielteams, faciliteren van koplopers, aanstellen van combidocenten, stimuleren van collegiale (veilige) leer- en overlegomgevingen en, waar noodzakelijk, roosteraanpassingen.
Er is in de veldraadplegingen benoemd dat iedere school een beleid moet voeren gericht op de eigen schoolsituatie; immers de onderlinge verschillen in ervaringen, personele capaciteit en ontwikkelfase van scholen zijn groot. In een ideale situatie wordt het beleid vanaf klas 1 ingezet,

zodat er een doorlopende leerlijn ontstaat en leerlingen leren hun verwachtingen en leerstrategieën te richten op samenhang en afstemming.

Bij het vormgeven van beleid onderscheiden we drie benaderingen:

1. Activiteiten vinden buiten de reguliere vaklessen plaats. Dit lijkt vaak de makkelijkst te organiseren variant. Enkele voorbeelden hiervan, vanuit de praktijk van de bezochte scholen zijn:
   - afzonderlijke extra lessen inroosteren in bijvoorbeeld wiskunde om toepassingen tijdig zichtbaar te maken en ermee te oefenen;
   - een aantal profielmiddagen per jaar organiseren waarin de afstemming expliciet aan de orde komt;
   - het gezamenlijk opstellen van de toetsen rond rekenvaardigheden door de bèta- en economiedocenten;
   - profielwerkstukken op een strikt inhoudelijk thema rond afstemming van profielvakken aanbieden;
   - vakoverstijgende projecten.

2. Activiteiten die binnen de eigen vakles plaatsvinden. Hier zijn genoemd:
   - afstemming in de tijd van vakinhouden, door bijvoorbeeld een hoofdstuk op te schuiven als dit beter aansluit bij een ander vak;
   - vraagstukken met contexten uit andere vakken in het schoolexamen opnemen;
   - modulen uit NLT aanscherpen en verbeteren op gebruik van inhoud van andere vakken (met name wiskunde);
   - in de (wiskunde)les toepassingen, vraagstukken en contexten behandelen en laten maken door leerlingen, in samenspraak (vooraf of tijdens) met de betrokken vakdocent. Zie deel B en C;
   - lesvoorbeelden (blijven) zoeken in overleg met docenten uit vervolgopleidingen waarin wiskunde een rol speelt.

3. Ondersteunende activiteiten. Te denken valt aan:
   - de traditionele docent-studiedagen aan afstemming wijden;
   - gestructureerd, gemengd sectie-of teamoverleg organiseren over samenhang, afstemming en toetsing in inhoudelijke en didactische zin;
   - faciliteren dat vaksecties met elkaar in gesprek gaan (zie deel B);
   - resultaten van afstemmingsactiviteiten opnemen in het kwaliteitszorg- en beleidsprogramma van de afdeling/school; het betreft de organisatie van de afstemming, de inzet van de docenten en de leerprestaties;
   - ouders betrekken bij het geven van gastlessen waarin vanuit het beroepenveld samenhang zichtbaar wordt en afstemming noodzakelijk blijkt.

Voorbeelden

In de publicatie '*Samenhangend onderwijs tussen wiskunde en natuurkunde*', (SLO, 2005)[9] komt een stappenplan aan bod om een samenhangend project vorm te geven. Wellicht kan dat boekje tot inspiratie dienen. Op dit moment (2012) wordt gewerkt aan een analyse-instrument om te onderzoeken in welke mate een school klaar is om samenhang en afstemming vorm te geven en welke keuzes een school hierin kan maken. Weliswaar rond het thema 'rekenen in andere vakken', maar veel parallellen rond afstemming en problematiek zijn hierin te trekken. Hierin spelen niet alleen de kennis van elkaars vakinhoud of didactiek een rol, maar ook

[9] De publicatie is ook te vinden op de website www.samenhangindetweedefase.slo.nl waar verschillende materialen rond profielprogramma's zijn opgenomen.

factoren als veranderingsbereidheid van de docenten, communicatiecultuur in de school en ervaring met samenwerkingsverbanden.

We sluiten deze paragraaf af met een voorbeeld van een schoolbrede activiteit die we zijn tegengekomen.

Schoolvoorbeeld

Activiteit
Profielmiddagen voor alle afdelingen, zoals uitgevoerd op één van de meewerkende en bezochte scholen die in de inleiding zijn genoemd.

Inhoud
In het examenprogramma van de vakken op zowel vwo als havo is het domein A vaardigheden opgenomen. Hierin komen zaken aan bod die niet opgenomen zijn in het centraal examen. De school heeft ervoor gekozen om deze vaardigheden niet in de reguliere lessen op te nemen, maar onder te brengen in profielmiddagen.
De leerlingen krijgen een programma aangeboden dat gericht is op hun profiel, vaak vakoverstijgend en veelal praktisch gericht. Voor de N-profielen wordt de nadruk gelegd op de methode van het natuurwetenschappelijk onderzoek. In feite is het een voorbereiding op het profielwerkstuk. Het hoeft niet per definitie een onderzoek te zijn, het kan ook materiaal leveren dat bij een onderzoek van pas kan komen. Denk bijvoorbeeld aan een uitgebreide kennismaking met de mogelijkheden van het programma Excel.

Uitvoering
Naast de gewone lessen, die op werkdagen tussen 8.30 en 14.15 uur ingeroosterd zijn, hebben de leerlingen van 4H, 4V en 5V een keer per week een profielmiddag. Deze start om 14.30 en eindigt om 16.00 uur.

Opmerkingen
In feite schept deze aanpak extra ruimte. Veel van de vaardigheden genoemd in domein A worden bij meerdere vakken genoemd en zijn daarom niet vakgebonden. Door ze onder te brengen in modules die in een profielmiddag aan bod komen, wordt tijdwinst behaald.
Tijdens een profielmiddag wordt geen aandacht besteed aan zaken die direct noodzakelijk zijn ter voorbereiding op het examen. Wel zijn er mogelijkheden vakoverstijgend te werken. Daarbij kan het materiaal in deze handreiking een rol spelen.

Afsluiting
Samenhang en afstemming binnen de bètavakken blijft een lang bestaande wens binnen het voortgezet onderwijs. Examenprogramma's, syllabi en handreikingen, uitgevers en lesmateriaal spelen een rol met het op de kaart zetten en vorm geven (afdwingen) van samenhang en afstemming. Op schoolniveau speelt echter het schoolbeleid een cruciale rol. De manier waarop een school vorm wil geven aan samenhangend onderwijs is afhankelijk van de schoolcultuur en de beleidswens. Hierbij kan inspiratie geput worden uit voorbeelden van andere scholen en de beschrijving van de aandachtspunten die genoemd zijn in dit deel.
Tijdens het project is een positieve (werk)houding voor het afstemmen van profielvakken onder docenten en sectieleiders geconstateerd. Alle gespreksdeelnemers in de veldraadplegingen die binnen het project zijn uitgevoerd hadden een (zeer) positieve grondhouding om wiskunde af te stemmen op andere bètavakken en economie. Het gebruik van concrete wiskundevraagstukken met een context of toepassing uit de bètavakken en het vak economie werd als bruikbaar ervaren. Zie deel C.

Afstemming kan een middel zijn om (beleid rond) samenhang zichtbaar te maken, waarin vaksecties en docenten een leidende rol spelen. Deel B gaat hier verder op in.


foto: humantouchphotography.nl

Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken

Handreiking met voorbeeldmateriaal

Deel B
Samen in gesprek

slo

DEEL B Samen in gesprek

In deel B schetsen we kort de achtergrond voor samenhang en afstemming in de school en de meerwaarde van het in gesprek gaan met collega's. Vervolgens geven we een leidraad voor gesprekken tussen secties aan de hand van aandachtspunten, opgaven, richtvragen en mogelijke afspraken. Het deel eindigt met een compleet overzicht van discussieopgaven die naar eigen inzicht gebruikt kunnen worden in een gesprek (hoofdstuk 8 en 9). In de schoolbezoeken zijn deze vragen en opgaven voorgelegd, waarbij opmerkingen en verbeteringen verwerkt zijn in deze handreiking.
Dit deel richt zich op de vaksecties en vakdocenten en gaat eigenlijk over afstemming als middel om samenhang zichtbaar te maken. Het verschil tussen samenhang en afstemming, evenals de rol van examenprogramma's en syllabi, schoolboeken, en met name schoolbeleid, komen in deel A aan de orde.

5. Achtergrond

"Leerlingen relateren procedures uit verschillende vakken sterker aan elkaar als ze deze bij verschillende schoolvakken hebben gebruikt en als notaties of grafieken bij de verschillende vakken op elkaar zijn afgestemd. Vaksecties van verwante schoolvakken kunnen een grotere wiskundige bekwaamheid verwachten als zij een gemeenschappelijke opbouw van concepten, procedures en notaties ontwerpen".
Uit: Ontwikkeling in verandering, Roorda 2012

We gaan er in de voor u liggende publicatie, in navolging van Roorda en Van Streun (Roorda en Van Streun, 2002) vanuit, dat onderwijs voor *leerlingen* samenhangend zou moeten zijn. Een bruikbaar criterium voor samenhangend onderwijs is de mate waarin leerlingen samenhang ervaren.
Met andere woorden, leerlingen dienen te ervaren dat:

- er verbanden zijn tussen de verschillende vakdisciplines;
- kennis niet geïsoleerd ontstaat;
- wat geleerd wordt binnen een vak gebruikt kan worden in een ander vakgebied (transfer).

Een manier om samenhang zichtbaar te maken is afstemming. Bij afstemming tussen de vakken wordt van docenten bereidwilligheid gevraagd om buiten het eigen vakgebied te kijken. De meerwaarde die het voor een leerling kan opleveren staat voorop.
Eén van de uitgangspunten voor deze handreiking is, dat de afstemming (en dus hopelijk ook de samenhang) wordt versterkt wanneer wiskundedocenten meer dan tot nu toe gebruik kunnen maken van concrete opgaven en contexten uit de andere vakken. Uiteraard gaat het daarbij om contexten waarin de wiskunde een essentiële plaats inneemt.
Tegelijkertijd kunnen de docenten van de andere vakken heel goed gebruik maken van de vaardigheden en inzichten die de leerlingen in het wiskundeonderwijs tegenkomen.

Wil men binnen de wiskunde gebruikmaken van contexten uit andere vakgebieden dan is het belangrijk dat docenten van elkaar weten wat de betekenis van de context is en welke begrippen en notaties een rol spelen.
In dit verband is het van belang dat de betrokken docenten met elkaar van gedachten wisselen over de overeenkomsten en verschillen tussen genoemde vakken, zoals in het citaat van Roorda wordt onderstreept. Naar aanleiding van het gesprek kunnen concrete afspraken gemaakt worden.

In een verkennend onderzoek (Den Braber, 2007) is een tiental docenten (economie, natuurkunde en scheikunde) bevraagd op hun affiniteit met wiskunde, hun wiskundekennis, het gebruik van wiskunde binnen hun vak en het leggen van verbanden tussen hun vak en de wiskunde. Hoewel de meeste docenten positief stonden tegenover de wiskunde en het nut van wiskunde benoemden, was er weinig kennis van het wiskundecurriculum of overleg over het gebruik van wiskunde.

Vaksecties blijken nauwelijks met elkaar te overleggen en docenten slaan geen bruggen tussen hun vak en wiskunde, of geven niet aan wat de merites zijn van de verschillende invalshoeken (Vos e.a., 2010). Gebrek aan overleg werd door de docenten in bovengenoemd onderzoek als

één van de redenen genoemd dat er weinig prikkels waren tot het leggen van verbanden. In ditzelfde onderzoek was er slechts één docent die expliciet bruggen bouwde tussen zijn eigen vak, natuurkunde en wiskunde. Bijzonder kenmerk van deze docent was, dat hij zowel natuurkunde als wiskunde gaf en zich daardoor met name in de curriculaire en instructionele componenten van de twee vakken had verdiept.
Voor het leggen van verbanden tussen vakken kunnen dergelijke ‘dubbelvakkers’ dus een exemplarische rol spelen en in gesprekken tussen vaksecties een verbindende rol.

In gesprek gaan met een collega die een ander vak onderwijst, geeft vaak een verrassende kijk op het eigen vak en didactiek. Uit het onderzoek van Vos en anderen blijkt ook dat docenten vanuit hun eigen vakdiscipline naar de wereld kijken (zichtbaar in een lesopgave) en dat men zich niet altijd bewust is van de blik waarmee de ander een opgave benadert. Een illustrerend voorbeeld uit de Kangoeroewedstrijd[10] werd aangedragen door de eerder genoemde docent met de dubbele bevoegdheid.

De omtrek (in cm) van een cirkel is gelijk aan zijn oppervlakte (in cm^2).
Hoeveel cm is de straal van de cirkel?

A. 1 **B.** 2 **C.** π **D.** 4 **E.** 2π

De omtrek en oppervlakte worden aan elkaar gelijk gesteld, hetgeen “je wiskundig wel kunt doen, maar natuurkundig niet, omdat we praten over verschillende eenheden” aldus de docent.

Als de aftrap is gegeven (óf door de leden van de secties zelf óf door de schoolleiding) om samenhangend onderwijs en afstemming (meer) vorm te geven kan een docent zich allereerst zelfstandig verdiepen in de leerstof van 'het andere vak'. Dit is weliswaar tijdrovend maar werkt ook enthousiasmerend. Daarnaast kan een gesprek tussen vaksecties plaatsvinden.

In de volgende hoofdstukken beschrijven we aandachtspunten voor een gesprek en concrete discussieopgaven die in een gesprek gebruikt kunnen worden om docenten zich bewust te laten worden van de verschillende 'brillen' waarmee men naar een opgave kan kijken, maar naar ook de overeenkomsten.

[10] Stichting Wiskunde Kangoeroe organiseert jaarlijks de reken- en wiskundewedstrijd in Nederland als onderdeel van een internationaal evenement.

6. Voorbereiding van het gesprek

Stel dat het initiatief is genomen tot een gesprek tussen vaksecties (vaksectieleiders). Hoe dan verder?

6.1 Aandachtspunten

Uit onze bijeenkomsten met docenten zijn een aantal aandachtspunten naar voren gekomen:

- Ieder zijn vak
  "Maar ik ben niet van plan om natuurkunde te gaan geven, daar voel ik me niet prettig bij. Dat is toch ook niet de bedoeling?"
  Uit deze vraag, van een wiskundedocent, komt een veelgehoorde zorg naar voren. Het antwoord is: "Nee, dat is niet de bedoeling". De insteek is bewustwording. Welke eigen vakinhoud is terug te vinden in de lesstof van de collega's en op welke manier wordt die behandeld? Deze insteek wordt in onderstaand citaat geïllustreerd.

  "Ik ben in hart en nieren wiskundige en voel me prettig in de rol van wat er van een wiskundedocent gevraagd wordt. Maar op het moment dat ik mijn leerlingen kan helpen met wiskunde in een taal die bij andere vakken nodig is, dan ben ik daartoe van harte bereid."
  Van Wim Coens, Wiskundedocent Zernike college

- Verschillen mogen
  Afstemming betekent niet dat eigen vaktradities overboord gegooid moeten worden en iedereen alles op dezelfde manier moet doen. Weten van elkaar op welke manier vakinhoud wordt aangeboden is al meerwaarde (deze kennis is de bodem voor afstemming). Met name als de docenten de achtergrond van de verschillende aanpakken naast elkaar leggen, kan een volledig beeld ontstaan en kunnen de vakken elkaar desgewenst aanvullen. Denk hierbij aan het 'grafisch differentiëren' bij scheikunde en natuurkunde en de formele differentiatieregels bij wiskunde of het gebruik van grootheden in een assenstelsel.

- De leerling in gedachten
  Zoals het citaat aan het begin van dit deel al aangaf: de meerwaarde voor de leerling staat centraal. Aanwezige verbanden, die welllicht voor de docent helder zijn, hoeven dat niet voor de leerling te zijn. De ervaring leert dat bij weinig leerlingen deze verbanden vanzelf ontstaan. Er moet expliciet op gewezen worden. Ook krijgt elke docent wel eens een vraag van een leerling, vaak aan het einde van de les, die raakt aan een ander vakgebied. De uitspraak: *"*Dat moet je even aan de xxx- docent vragen" helpt die leerling weinig verder. Het bevestigt juist het denken in gescheiden disciplines. Bij onbekendheid met het antwoord kan wellicht beter worden gereageerd met: "Goede vraag, ik kom daar de volgende keer op terug, want dan heb ik overlegd met de xxx-docent".

- Nooit uitgeleerd
  Naast het leren van de leerling staat ook de scholing van de docent nooit stil. De meerwaarde van afstemming beperkt zich niet tot de leerling. Het verbreedt je horizon als docent en geeft je een beeld van de positie van je eigen vak. Bovendien geeft inzicht in de vakken van collega’s over het algemeen een prettiger werksfeer.

- Klein beginnen mag
  De complexiteit van samenhang en afstemming kan afschrikkend werken. Het wordt echter behapbaar als men bedenkt dat een klein begin (een eerste afstemming) ook goed is. Neem bijvoorbeeld als vaksectie één onderwerp en bespreek dit met één andere sectie. Dit kan leiden tot afspraken op kleine schaal, die zich kunnen uitbreiden naar andere vaksecties. Hieronder gaan we daar uitgebreider op in.

  Wordt ervoor gekozen om een gesprek met een andere vaksectie aan te gaan, dan is het voor de praktische uitvoering handig om:
  - het doel van het gesprek helder te hebben.
    Spreek verwachtingen uit en probeer gerichte vragen te stellen. In paragraaf 7.2 beschrijven we de vragen die in de schoolbezoeken van dit project gebruikt zijn;
  - een gespreksleider aan te stellen, die het doel en de vragen als leidraad voor het gesprek vasthoudt. Tijdbewaking is ook belangrijk als het doel is om tot specifieke gesprekken te komen;
  - te evalueren en afspraken te maken.

  Bespreek de uitkomsten van het gesprek. Hoe wil men nu verder, zijn er conclusies te trekken en afspraken te maken?

6.2 Afspraken maken

Het woord 'afstemming' impliceert dat er afspraken worden gemaakt. Hoe klein ook. Afspraken kunnen concreet zijn geformuleerd rond het gebruik van bepaalde notaties, begrippen of onderwerpen. Ze kunnen ook bepaalde verbanden tussen de vakken en het gebruik van contexten uit andere vakken betreffen. Ter illustratie enkele voorbeelden.

Notatie en begrippen

Afspraken maken rond….

- helling en differentiëren: en dan gelet op het notatiegebruik *f'* of df/dx en het gebruik (en verschillen) van de begrippen richtingscoëfficiënt, helling, steilheid, gemiddelde relatieve verandering (bij natuurkunde komt richtingscoëfficiënt vaak niet voor);
- het verschil tussen exact en benaderingen (met onderliggend = en ≈ en afronden, significantie);
- gebruik van grootheden en eenheden;
- gebruik van de begrippen grafiek, assenstelsel, lijn, kromme, figuur en diagram;
- werkwoorden als bepaal, bereken, los op, onderzoek et cetera.

Onderwerpen

Afspraken maken rond….

- grafieken tekenen; Wat zet men op de assen, in welke vorm/diagrammen tekenen en aflezen.
- (lineaire) vergelijkingen oplossen; Welke rol speelt het gebruik van de rekenmachine hierin?
- Omschrijven van formules.

Afspraken rond gebruik van contexten uit andere vakken

- Bij het opstellen van lineaire functies bij wiskunde kan gebruikgemaakt worden van een economische context, waarbij aandacht wordt besteed aan afhankelijke en onafhankelijke variabelen en grafieken tekenen. Er kunnen afspraken gemaakt worden over de manier waarop dit economisch en wiskundig correct en zinvol kan gebeuren.
- Er kan worden afgesproken dat bij (letter)algebra bij wiskunde, in het geval van contexten uit de natuurkunde, dezelfde grootheden en symbolen gebruikt worden als in de natuurkunde.

Afspraken rond het benoemen van onderlinge verbanden

In de praktijk blijkt het vaak lastig om de volgorde in de tijd aan te passen waarin onderwerpen behandeld worden binnen een vak, om zo leerlijnen van verschillende vakken op elkaar te laten aansluiten. De onderwerpen differentiëren en integreren zijn hiervan voorbeelden. Lukt het niet om de volgorde in de tijd aan te passen, dan kan er worden afgesproken dat in de les expliciet vermeld wordt waar de verbinding met een ander vak gelegd wordt.

Een voorbeeld, gegeven door een wiskunde- en natuurkundedocent[11], bij differentiëren (raaklijnen) bij wiskunde:
"Bij wiskunde krijg je een formule. Hiermee kun je differentiëren en de helling in een punt bepalen. Bij natuurkunde krijg je een grafiek, trek je de raaklijn en vind je op die manier de helling. Het stelt bij beide vakken hetzelfde voor, alleen de techniek die je gebruikt, de manier waarop je er mee omgaat, is anders. "
Neem een onderwerp, bijvoorbeeld ´differentiëren en de afgeleide´ en bepaal op welk tijdstip dit bij welk vak voorkomt. Bespreek op welke manier dit onderwerp wordt behandeld in de vakken. Welke notatie wordt meestal gebruikt: f' of df/dx?
Ook is het mogelijk om enkele voorbeelden uit een ander vakgebied binnen de wiskundeles te gebruiken (het aantal bepaalt ieder uiteraard zelf). Zie hiervoor de opgaven uit deel C.

Op het gebied van logaritmische functies kan de verbinding met natuur- en scheikundige onderwerpen benoemd worden. Zie voor onderwerpen de bijlagen.

Natuurlijk kan ook afgesproken worden dat ieder zijn eigen weg blijft gaan. Maar dit leidt vanzelfsprekend niet tot samenhangend onderwijs.

[11] Uit: Braber, 2007

7. Leidraad voor het gesprek

Hieronder beschrijven we de procedure die wij in de bijeenkomsten op scholen hebben gehanteerd. We hopen dat dit als leidraad en inspiratie kan dienen voor een gesprek op uw school. In de bijeenkomsten hebben we steeds drie verschillende onderdelen aan bod laten komen. In de volgende paragrafen gaan we op elk van de onderdelen -eindtermenoverzicht, discussieopgaven en voorbeeldopgaven- in.

7.1 Eindtermenoverzicht

Om de samenhang tussen wiskunde en de onderzochte vakken beter zichtbaar te maken vindt u als bijlage (bijlage 1 t/m 8) bij deze handreiking een overzicht met mogelijkheden tot samenhang en afstemming. Als uitgangspunt zijn de (sub)domeinen van de nieuwe examenprogramma's van wiskunde A en wiskunde B, zowel voor havo als vwo, genomen. Bij natuurkunde is ook het (natuurkunde)domein toegevoegd waar het betreffende onderdeel te vinden is.
Gespreksvragen hier kunnen zijn:

- Wat valt op?
- Herkent u de genoemde voorbeelden?
- Ziet u nog andere mogelijke voorbeelden?

Een voorbeeld/onderdeel uit de bijlage kan als concreet voorbeeld dienen om afspraken te maken of een gezamenlijke activiteit op te zetten (hoe klein ook).

7.2 Discussieopgaven

Bij de subdomeinen van wiskunde zijn opgaven verzameld. Daarbij is sterk de nadruk gelegd op het vwo-programma. We onderscheiden bij de opgaven de zogenaamde discussieopgaven, die ingezet kunnen worden bij overleg tussen vaksecties.
De discussieopgaven zijn steeds per tweetal gerangschikt, waarbij het om twee vergelijkbare opgaven gaat. Met 'vergelijkbaar' bedoelen we hier dat de wiskundeopgave betrekking heeft op een natuurwetenschappelijke[12] probleemstelling waarvan de bijbehorende opgave een voorbeeld is. De opgaven zijn gekozen uit bestaande lesboeken. Daarmee willen we niet de indruk wekken dat het de enige manier is om naar het onderwerp te kijken. Verschillende aanpakken kunnen uiteraard in het gesprek naar voren komen.

Enkele vragen en discussiepunten bij deze tweetallen opgaven zijn:

- Zijn er verschillen en/of overeenkomsten in deze tweetallen opgaven die te maken hebben met de vakgerichte benadering van het onderwerp?
- In hoeverre spelen bijvoorbeeld de vakdidactiek, de notaties, het begrippengebruik, het werken met eenheden en assenstelsels daarbij een rol?
- Kunt u gebruik maken van 'elkaars' opgaven? Waarom wel/niet? Op welke manier?

[12] Of economisch

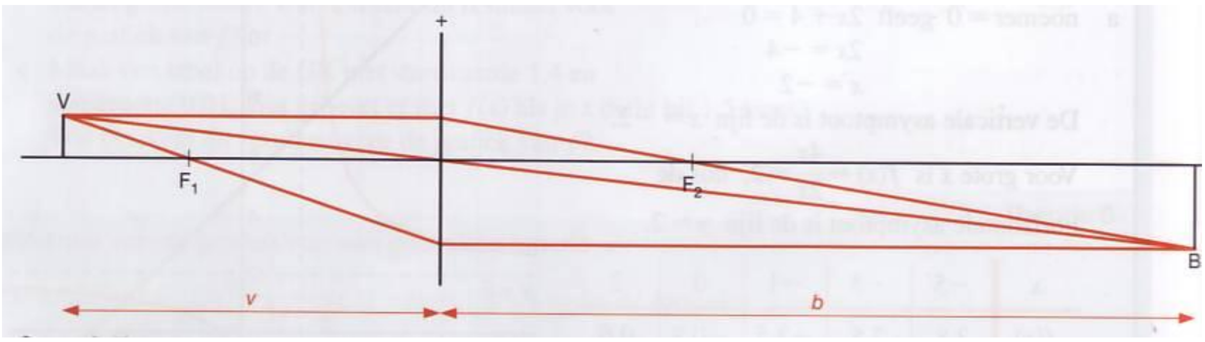
Ter illustratie bekijken we een tweetal opgaven waarvan één uit de wiskunde en één uit de natuurkunde. Zie hieronder. De overige discussievraagstukken voor wiskunde-natuurkunde zijn opgenomen in hoofdstuk 8, voor wiskunde en economie in hoofdstuk 9.

Voorbeeld discussieopgave wiskunde en natuurkunde

Wiskunde
Bron: *Getal&Ruimte* (EPN), vwo B deel 1, blz. 76.
(Onderwerp: functies en grafieken, gebroken functies met asymptoten)

Lenzen

Voor lenzen met een brandpuntsafstand van 3 cm is de lenzenformule $\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{v}$ te herleiden tot de formule $b=\frac{3v}{v-3}$. Hierin is b de beeldpuntsafstand en v de voorwerpsafstand in cm.



a. Toon aan dat de formule $b=\frac{3v}{v-3}$ juist is.

b. Geef van de grafiek van b de formules van de asymptoten en teken de grafiek. Wat is de praktische betekenis van de asymptoten?

c. Bereken exact de waarde van v waarvoor de beeldpuntsafstand gelijk is aan de voorwerpsafstand.

d. Bereken exact voor welke v de vergrotingsfactor $\left|\frac{b}{v}\right|$ gelijk is aan 2.

Natuurkunde
In de Nieuwe Natuurkunde is de klassieke optica een keuzeonderwerp op havo. Op vwo is het verplaatst naar klas 3 onderbouw.
Bron: practicum Bonhoeffer College

Lensproef
Maak een opstelling met een lichtkastje en een voorwerp (dia), een lens en een scherm. Zet het voorwerp vóór de lens op een afstand v (voorwerpsafstand) en meet v. Zet dan het scherm zó dat je een scherp beeld krijgt van het voorwerp op het scherm en meet de beeldafstand b. Verander nu steeds de voorwerpsafstand v en bepaal de bijbehorende waarde voor b. Herhaal dit voor ca. 5 verschillende voorwerpsafstanden.

Dan maak je gebruik van de lensformule:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$, of anders geschreven: $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{v}$

Als je in een grafiek $\frac{1}{b}$ (verticaal) uitzet tegen $\frac{1}{v}$, dan krijg je een rechte lijn, waar je $\frac{1}{f}$ eenvoudig uit kunt halen.

Bepaal nu zo nauwkeurig mogelijk de brandpuntsafstand van de lens en geef een schatting van de nauwkeurigheid in deze waarde.

Bij dit voorbeeld zijn in een gesprek door zowel een wiskundedocent als een natuurkundedocent een aantal opmerkingen gemaakt. Ter illustratie zijn ze hieronder opgenomen.

Reacties en discussievragen vanuit natuurkunde met betrekking tot de wiskundeopgave

1. Leerlingen vinden het herleiden van formules vaak moeilijk en het is zeker de moeite waarde om hiermee te oefenen. In de natuurkunde streven we vaak naar rechte lijnen in een grafiek omdat er dan een grootheid afgelezen kan worden (bijvoorbeeld: uit de helling, of uit het snijpunt met de horizontale of verticale as). In dit geval is er geen lineair verband.
2. 'Geef de grafiek …' zou in de natuurkunde zijn: 'Maak een grafiek en zet daarbij b (in cm) uit tegen v (in cm)'.
3. Bij vragen c en d: hier is een probleem met de nauwkeurigheid van de (meet)gegevens. De brandpuntsafstand is gemeten met één significant cijfer. De waarde van v kan (dus) niet 'exact' worden berekend. Het begrip 'exact' wordt in de wiskunde blijkbaar anders ingevuld.
4. Het plaatje van de stralengang staat erbij om betekenis te geven aan de hele exercitie. Toch wordt met dit plaatje verder weinig gedaan. Om het meer bij het experiment te betrekken, kunnen er ook vragen gesteld worden als:

a. Waarom staan er 'absoluutstrepen' om $\frac{b}{v}$? [Laat leerlingen nadenken wat het betekent als $b < 0$)
b. Leg uit wat je ziet als de vergroting 0,5 is. (Nadenken over een verkleining.)
c. Wanneer is de vergroting 1,0? (Bij c berekend!)
d. Als v héél groot is, hoe groot zal dan de vergroting zijn? (Eventueel ook de vergroting laten uitdrukken in v en dan de vergroting uitzetten tegen. tegen v.)

Reacties en discussievragen vanuit wiskunde met betrekking tot de natuurkundeopgave

1. Mooie, slimme gedachte om $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{v}$ tegen elkaar uit te zetten, maar dat komt voor een leerling wel uit de lucht vallen.
2. Het zal voor een leerling niet zo maar te zien zijn dat er sprake is van een lineair verband. Moet dat hier worden opgevat als een mededeling of hoort daar ook een uitleg bij? Vanuit de wiskunde geredeneerd is dat laatste zeker het geval. Hoe wordt daar bij natuurkunde aandacht aan besteed?
3. Bij wiskunde wordt een lineair verband meestal weergegeven in de vorm $y = ax + b$. Dat strookt niet helemaal met de hier geponeerde vorm. Hoe gaat de natuurkunde daar mee om?
4. Deze opdracht kan heel goed bij wiskunde worden gebruikt. Geef er een tabel met meetwaarden bij (of laat dat in het natuurkundepracticum doen, dat is nog mooier). Bij wiskunde is het een mooie toepassing van lineaire formules.
5. De nauwkeurigheid van antwoorden zal ongetwijfeld problemen opleveren. Het meten geeft onnauwkeurigheden, daarvan de reciproque gebruiken ook nog eens en dan nog weer terugrekenen van $\frac{1}{f}$ naar f óók nog een keer. En dan is er ongetwijfeld nog sprake van dat de getekende punten niet precies op één rechte lijn liggen. Hoe denkt men daar bij natuurkunde over?
6. In het vervolg van de vorige opmerking: Wat wordt er van de leerlingen gevraagd bij het schatten van de nauwkeurigheid van het antwoord?
7. Een suggestie voor een andere (eventueel aanvullende) aanpak:

Bereken bij elk paar meetwaarden van v en b de bijbehorende waarde van f. Als het goed is, krijg je een aantal dicht bij elkaar liggende uitkomsten. Het gemiddelde daarvan is dan toch een redelijke schatting van f?

7.3 Voorbeeldopgaven

Bij de subdomeinen van wiskunde zijn opgaven verzameld. Naast discussieopgaven is een verzameling opgaven samengesteld rond (*wiskunde)opgaven met een context uit een ander vak,* de zogenaamde voorbeeldopgaven. Hieronder zijn twee voorbeelden opgenomen, één van natuurkunde en één van biologie. De overige voorbeeldopgaven zijn opgenomen in deel C[13].

Gespreksvragen bij deze opgaven zijn:

- Zijn de hierna opgenomen opgaven bruikbaar in uw wiskundeonderwijs?
- Wordt daarmee de samenhang tussen deze twee vakken beter zichtbaar?

Ook deze opgaven kunnen in samenspraak met de andere vakcollega's doorgenomen worden, waarbij de wiskundecollega vanuit het perspectief van het andere vak kan leren denken.
Het kan zeker ook lonen om zelf op zoek te gaan naar voorbeeldopgaven, bijvoorbeeld uit de eigen lesmethode. Dan kan een collega direct de achtergrond schetsen bij het voorbeeld, omdat de methode immers in de dagelijkse praktijk wordt gebruikt.

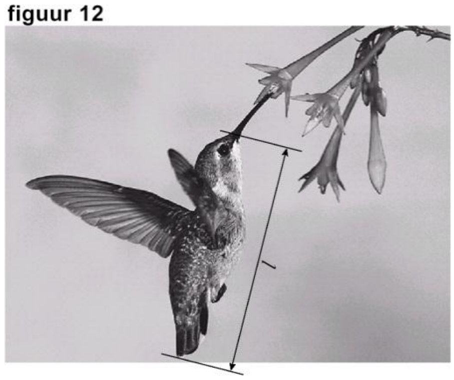
[13] Voor natuurkunde en economie. Voor biologie en scheikunde zullen de opgaven mogelijk later worden toegevoegd.

Voorbeeldopgave met een natuurkundige context, te gebruiken in de wiskundeles
Bron: CSE Natuurkunde 1, 2-vwo 2007, tijdvak 2.

Opgave 4 Kolibrie

De kolibrie is een klein vogeltje dat door de snelle vleugelslag stil kan blijven hangen in de lucht. Zie figuur 12. Een onderzoeker maakte deze foto om de lengte l van de vogel te bepalen.
Hij gebruikte een telelens met een brandpuntsafstand van 135 mm. De afstand van kolibrie tot lens was 1,80 m. Het beeld werd vastgelegd op een beeldchip. De afmetingen van deze beeldchip zijn 12,8 mm × 9,6 mm. Figuur 12 is een volledige afbeelding van het vastgelegde beeld.
Bepaal de lengte l van de kolibrie.

figuur 12



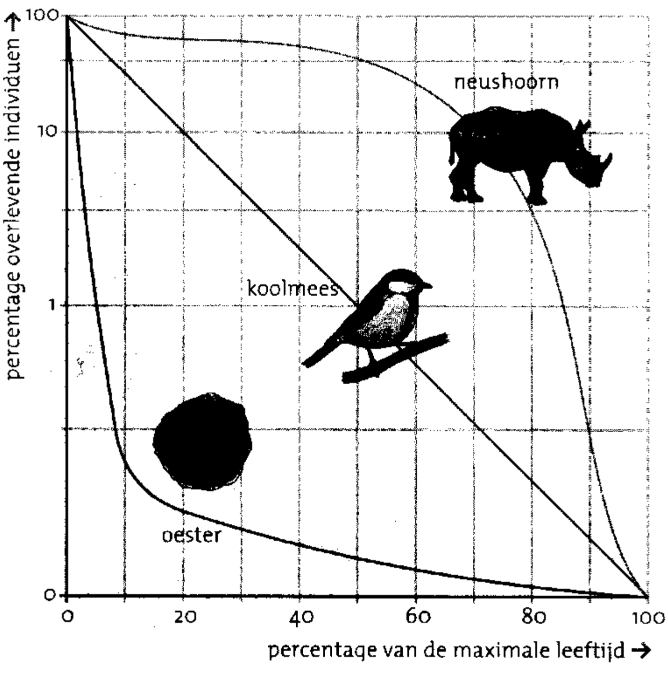
Voorbeeldopgave met een biologische context, te gebruiken in de wiskundeles
Bron: *Biologie voor jou* (Malmberg) , vwo 5 Opdrachtenboek, blz. 63.

Overlevingscurven

In afbeelding 9 zijn overlevingscurven van enkele diersoorten in een diagram weergegeven. Daaruit is af te lezen welk deel van de nakomelingschap op welke leeftijd in leven blijft. Op de x-as is de leeftijd uitgedrukt als percentage van de maximale leeftijd die een individu van de soort kan bereiken. De y-as is logaritmisch.

1. Bij welke diersoort in afbeelding 9 is het sterftecijfer tijdens de eerste levensperiode het grootst?
2. Bij welk van de in afbeelding 9 genoemde soorten verwacht je het hoogste gemiddelde geboortecijfer? Leg je antwoord uit.
3. Waarop lijkt de overlevingscurve van de kikker het meest: op die van de neushoorn, van de koolmees of van de oester?
4. En waarop lijkt de overlevingscurve van de mens het meest?

Afb. 9 Overlevingscurven.



8. Discussieopgaven wiskunde en natuurkunde

In dit hoofdstuk vindt u meer discussieopgaven wiskunde en natuurkunde die gebruikt kunnen worden in een gesprek tussen secties. Zie ook paragraaf 7.2. Voor de 5 discussieopgaven is de relatie met de subdomeinen uit de examenprogramma's wiskunde[14] benoemd, zie tabel 1.

Tabel 1 Relatie tot subdomeinen examenprogramma's

Nr.	Titel	Onderwerp	Subdomeinen			
			HA	HB	VA	VB
1	Gemiddelde snelheid s,t - en v,t -diagrammen	Afgeleide functies, Differentiequotiënt	—	D1	D2	C1
2	Saturnus Omloopstijd	Evenredigheid Machten	C2	B3	C2	B2
3	Verdubbelingstijd Halveringsdikte	Logaritme Exponentiële functies	C5	B2	C2	B2
4	Fietser Veranderende oppervlakten	Differentiëren	—	D2	D3	C1
5	Fietsers Inhalen	Lineaire vergelijkingen Gebroken vergelijkingen	C2	B2	C2	B5

[14] De examenprogramma's zijn te vinden op : www.betanova.nl

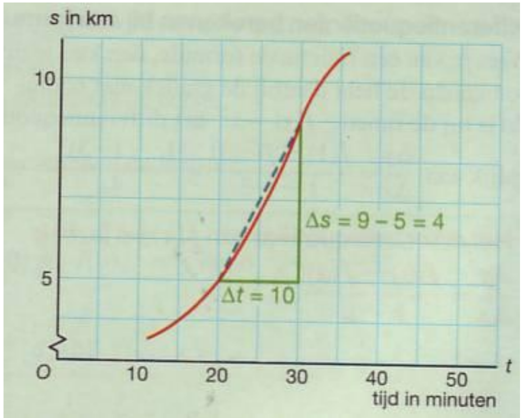
Discussieopgave 1
Onderwerp: de afgeleide functie, het differentiequotiënt

Wiskunde
Bron: *Getal&Ruimte* (EPN), vwo B deel 1, theorie B blz. 89.

Gemiddelde snelheid
In de figuur hiernaast zie je een *tijd-afstandgrafiek*. Het differentiequotiënt van s op het interval $[20,30]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta y}=\frac{9-5}{30-10}=\frac{4}{10}=0{,}4.$$

In 10 minuten is 4 km afgelegd, dus de *gemiddelde snelheid* op het interval $[20,30]$ is gelijk aan $\frac{4}{10}=0{,}4$ km/minuut.



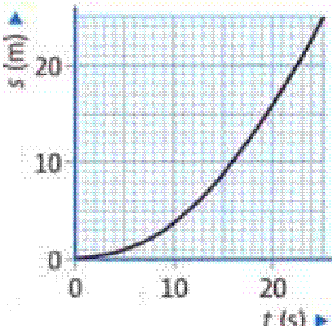
Je ziet dat bij een tijd-afstandgrafiek het differentiequotiënt juist de gemiddelde snelheid op dat interval is.

In een tijd-afstandgrafiek is de afgelegde afstand s uitgezet tegen de tijd t.
Bij een tijd-afstandgrafiek is het differentiequotiënt van s op $[a,b]$ de gemiddelde snelheid op $[a,b]$.
De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Natuurkunde
Bron: Nieuwe Natuurkunde (www.natuurkunde.nl), *Wisselwerking en Beweging* 1, blz. 48, 76.

In figuur 27 zie je het s,t -diagram van een bewegende auto.

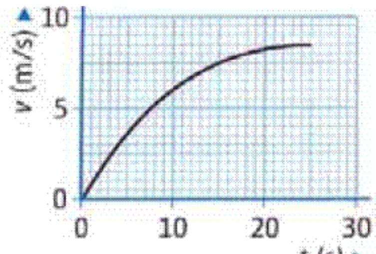
a. Leg uit dat de snelheid van de auto niet constant is.
b. Wordt deze snelheid in de loop van de tijd groter of kleiner?
c. Hoe zie je dat aan het s,t -diagram?
d. Bepaal met behulp van (een kopie van) figuur 27 de snelheid op de volgende drie tijdstippen: $t=0$ s, $t=10$ s en $t=20$ s.
e. Teken het v,t -diagram van deze beweging.



Figuur 27

In figuur 28 zie je het v,t -diagram van een optrekkende auto.

a. Leg uit dat de versnelling van de auto niet constant is.
b. Wordt deze versnelling in de loop van de tijd groter of kleiner? Hoe zie je dat aan het v,t -diagram?



Figuur 28

Discussieopgave 2

Onderwerp: algebra, rekenen met machten

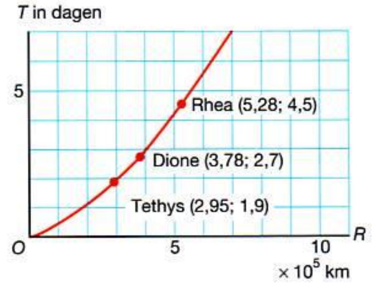
Wiskunde

Bron: *Getal&Ruimte* (EPN), vwo B deel 1, blz. 134.

Saturnus

De planeet Saturnus heeft vele manen. In de grafiek hiernaast is voor drie manen het verband tussen de omloopstijd T in dagen en de straal R van de baan in 10^5 km af te lezen.

Sterrenkundigen hebben aangetoond dat $T = a \cdot R^{1,5}$.



a. Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.

b. De baan van de maan Iapetus heeft een straal van $35{,}6 \cdot 10^5$ km. Hoeveel dagen is zijn omloopstijd?

c. In 1980 heeft de Voyager enkele tot dan toe onbekende manen van Saturnus gefotografeerd. Van een van deze manen, de 1980S.27, is de omloopstijd 15 uur.

Bereken de straal van de baan.

d. De straal van de baan van de maan Titan is $\frac{25}{11}$ keer de straal van de baan van de maan Rhea.

Hoeveel keer zo groot is de omloopstijd?

Natuurkunde

Bron: Nieuwe Natuurkunde (www.natuurkunde.nl), *zonnestelsel en heelal*

(onderwerp: mechanica, draaien, gravitatiewet)

Omloopstijd

Volgens de derde wet van Kepler geldt voor de omloopstijd van een planeet het volgende:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}$$

met:
- T : de omloopstijd van de planeet in s;
- r : de afstand van de planeet tot de zon in m;
- G : de gravitatieconstante, gelijk aan $6{,}67.10^{-11}$N .m^2 . kg^{-2}
- M : de massa van de zon, gelijk aan $1{,}989\ .10^{30}$ kg.

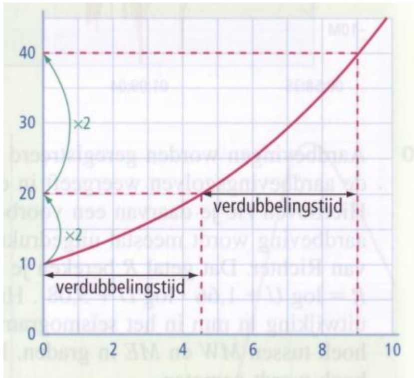
Een rechte lijn kan verkregen worden door $\log r$ uit te zetten tegen $\log T$.

1. Zoek in BINAS de tabel op met gegevens over planeten.
2. Maak een tabel waarin alle planeten voorkomen en zet hierin van elke planeet de omloopstijd (T) en de (gemiddelde) afstand tot de zon (r).
3. Vul de tabel aan met kolommen voor $\log r$ en $\log T$.
4. Zet in een grafiek (op normaal ruitjespapier) $\log r$ uit tegen $\log T$.
5. Stel een vergelijking op van de lijn.
6. Bereken met behulp van deze vergelijking én de grafiek de massa van de zon en vergelijk dit met bovenstaande waarde.
7. Zet vervolgens r uit tegen T op dubbellogaritmisch papier (bijgevoegd). Conclusie(s)?

Discussieopgave 3
Onderwerp: logaritmische functies

Wiskunde
Bron: *Moderne wiskunde* (Noordhoff Uitgevers), 9e editie Wiskunde B deel 1 havo, Samenvatting blz. 212.

Verdubbelingstijd en halveringstijd
De verdubbelingstijd bij een exponentieel groeiproces is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren.



Voorbeeld
Een groeiproces verloopt volgens de functie $f(t) = 1240 \cdot 1{,}07^t$.
Hoe groot is de verdubbelingstijd?

Oplossing:
Er moet dan gelden $1{,}07^t = 2$
Dan is $t = {}^{1{,}07}\log 2 \approx 10{,}24$ jaar.

Wiskunde
Bron: *Moderne Wiskunde* (Noordhoff Uitgevers), 9e editie Wiskunde B deel 1 havo, blz. 203.
(Onderwerp: logaritmische functies)

De radioactieve stof cesium 137 heeft een halfwaardetijd van 30 jaar, dat wil zeggen: in 30 jaar neemt de stralingsintensiteit met de helft af.

a. Bereken de groeifactor per jaar in drie decimalen nauwkeurig.
b. Na hoeveel tijd is 25% van de radioactieve stof verdwenen?

Geef het exacte antwoord met behulp van logaritme en benader dit antwoord vervolgens in maanden nauwkeurig.

c. Bij een opgraving worden potscherven gevonden die de stof cesium 137 bevatten. De stralingsintensiteit varieert van 0,1% tot 0,2% van de beginwaarde.

Hoe oud zijn deze potscherven bij benadering?

Vervolg discussieopgave 3

Natuurkunde
Bron: Nieuwe Natuurkunde (www.natuurkunde.nl), *Medische Beeldvorming*, blz. 20.

6 Halveringsdikte

a. Geef de definitie van halveringsdikte.
b. Hoeveel procent van de oorspronkelijke intensiteit is overgebleven nadat de straling in een stof twee halveringsdiktes heeft afgelegd?
c. Leg uit wat röntgenstraling sterker absorbeert: een stof met grote halveringsdikte of een stof met kleine halveringsdikte?
d. Leg uit wat een grotere halveringsdikte heeft: weefsel of bot?

7 Rekenen met halveringsdikte

Voor bepaald weefsel is de halveringsdikte voor röntgenstraling 3,7 cm.

a. Bereken de dikte van het weefsel als na het passeren van röntgenstraling 12,5% van de oorspronkelijke intensiteit over is.
b. Bereken hoeveel procent van de ingevallen intensiteit geabsorbeerd wordt door een laag van 7,4 cm van dit weefsel.
c. Bereken hoeveel procent van de ingevallen intensiteit over is na 20 cm.

Natuurkunde
Bron: Nieuwe Natuurkunde (www.natuurkunde.nl), *Medische Beeldvorming*, uitleg en voorbeeld, blz. 30.

Activiteit in de tijd

Je kan het verloop van de activiteit ook uitrekenen met de volgende formule:

$$A(t) = A(0) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

Op tijdstip t geldt: $n = \dfrac{t}{t_{\frac{1}{2}}}$ (t en $t_{\frac{1}{2}}$ in gelijke eenheden)

Symbolen: $A(t)$ is de activiteit op een tijdstip t na n halveringstijden, $A(0)$ is de beginactiviteit (op tijdstip t=0).

Geldigheid: deze vergelijking is geldig als de stof slechts één radioactief isotoop bevat.

Een dergelijke formule geldt ook voor het aantal radioactieve atoomkernen N. Vervang A in de bovenstaande vergelijking dus door N:

$$N(t) = N(0) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

Op tijdstip t geldt: $n = \dfrac{t}{t_{\frac{1}{2}}}$ (t en $t_{\frac{1}{2}}$ in gelijke eenheden)

Symbolen: $N(t)$ is het aantal atoomkernen op een tijdstip t na n halveringstijden en $N(0)$ is het aantal atoomkernen in het begin (op tijdstip t = 0).

Geldigheid: Alleen als de stof slechts één radioactief isotoop bevat.

De activiteit $A(t)$ is gedefinieerd als het aantal atoomkernen dat per seconde vervalt. Op elk tijdstip geldt dan ook:

$$A(t) = -\frac{\Delta N(t)}{\Delta(t)} = -N'(t)$$

Het min-teken ontstaat doordat N afneemt. De helling van de grafiek en de afgeleide zijn dan negatief, maar A moet positief zijn.

Rekenvoorbeeld

Opgave
De radioactieve isotoop Ac-225 heeft een halveringstijd van 10 dagen.
In het begin is de activiteit $1{,}20 \cdot 10^4$ Bq
a Bereken de activiteit na 63 dagen.
b Bereken na hoeveel dagen de activiteit is gedaald tot 315 Bq.

Uitwerking
a 63 dagen komt overeen met 6,3 halveringstijden.
Invullen in de formule geeft:

$$A(63) = 1{,}20 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2}^{6{,}3} = 152\ Bq$$

b A(t) is 315 Bq, A(0) is weer $1{,}20 \cdot 10^4$ Bq, n is onbekend. Je krijgt dan

$$A(t) = 1{,}20 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2}^{n} \quad \text{invullen} \quad 1{,}20 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2}^{n} = 315$$

Hieruit n berekenen gaat het snelst met de Grafische Rekenmachine, bijvoorbeeld via Calc →Intersect of met Math → Solver

Intersect: Y1 = 12000×0.5^X en Y2 = 315
Solver: 12000*0.5^(X) − 315 = 0
Je vindt dan n = 5,3, dus 5,3 halveringstijden -> 5,3 x 10 dagen = 53 dagen

Discussieopgave 4
Onderwerp: de afgeleide functie

Wiskunde
Bron: *Moderne wiskunde* (Noordhoff Uitgevers), 9^e editie Wiskunde B deel 1 havo, blz. 105.

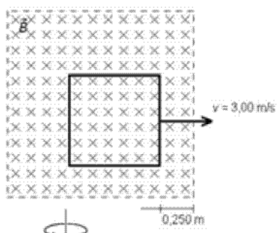
Fietser
Een fietser vertrekt bij een verkeerslicht uit stilstand. De eerste 3,5 seconden neemt zijn snelheid toe, daarna fietst hij met een constante snelheid verder. Het verband tussen de afgelegde weg d in meters en de tijd t in seconden wordt gegeven door de formule:

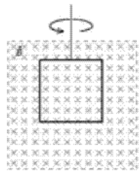
$$d = \begin{cases} t^2 & voor\ 0 \le t \le 3{,}5 \\ at + b & voor\ t > 3{,}5 \end{cases}$$

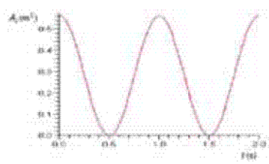
a. Hoe blijkt uit de formule dat de snelheid van de fietser na 3,5 seconden niet meer verandert?
b. Bereken zijn gemiddelde snelheid over de eerste 3,5 seconden.
c. Bereken zijn snelheid op $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ en $t = 3{,}5$.
d. Met welke constante snelheid rijdt hij na 3,5 seconden verder?
e. Bereken a en b.
f. Teken de grafiek van d voor de eerste 8 seconden.

Natuurkunde
Bron: Nieuwe Natuurkunde (www.natuurkunde.nl), *Elektrische en magnetische velden*, blz. 47.

50 Veranderende oppervlakten







Figuur 5.10

In figuur 5.9 zie je een vierkant draadraam dat zich in een uniform magnetisch veld van 0,450 T bevindt.
Het draadraam wordt vanaf $t = 0$ s met een constante snelheid van 3,00 m/s naar rechts getrokken. De totale weerstand van het draadraam is 0,230 Ω.

a. Teken in een (I , t)-diagram het verloop van de geïnduceerde stroom voor $t = 0$ s tot $t = 0{,}5$ s.
b. Bepaal de richting van deze stroom.

Vervolgens wordt het draadraam in hetzelfde magnetisch veld opgehangen en met constante hoeksnelheid rondgedraaid.
In figuur 5.10 is te zien hoe de oppervlakte loodrecht op het magnetisch veld verandert als functie van de tijd.
c. Schets het verloop van de geïnduceerde stroom voor dezelfde tijdspanne.
Een stroom linksom is positief, rechtsom negatief.
(Hint: als de fluxverandering niet constant is, neem je de afgeleide van Φ naar t :
$V_{ind} = N.\dfrac{d\Phi}{dt}$ *)*

Discussieopgave 5
Onderwerp: gebroken vergelijkingen

Wiskunde
Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, toepassing blz. 43.

Fietsers

Een fietser doet over een afstand van 100 km 1 uur korter dan een andere fietser, die 5 km/uur langzamer rijdt.

Met behulp van gebroken vergelijkingen kunnen we bepalen hoe groot de snelheid van beide fietsers is geweest. Dat gaat als volgt:

De snelheid van de twee fietsers stellen we v en $v-5$ [km/uur].
We proberen nu uit de gegevens een betrekking af te leiden waarin v als onbekende voorkomt.
We hebben het gegeven van het tijdsverschil tussen de fietsers nog niet gebruikt. De tijd die de fietsers nodig hebben om de 100 km af te leggen is resp. $\frac{100}{v}$ en $\frac{100}{v-5}$ [uur].

Het tijdsverschil was 1 uur, dus geldt: $\frac{100}{v}+1=\frac{100}{v-5}$. Hieruit kunnen we v oplossen:

$$\frac{100}{v}+1=\frac{100}{v-5} \leftrightarrow \quad \frac{100(v-5)+v(v-5)}{v(v-5)}=\frac{100v}{v(v-5)}$$

$$\leftrightarrow \; v^2-5v-500=0 \text{ en } v\neq 0 \text{ en } v\neq 5$$
$$\leftrightarrow \; (v-25)(v+20)=0 \text{ en } v\neq 0 \text{ en } v\neq 5$$
$$\leftrightarrow \; v=25 \text{ of } v=-20 \text{ (voldoet niet)}$$

De fietssnelheden waren dus 25 [km/uur] en 20 [km/uur]

Natuurkunde
Bron: *Pulsar* (Noordhoff Uitgevers), Bovenbouw vwo, deel 1, hoofdstuk 2.

Inhalen
Op een tweebaansweg haal je een vrachtauto in. Tijdens het inhalen leg je 50 m meer af dan de vrachtauto. De vrachtauto rijdt met 90 km/h (25 m/s), jij met 108 km/h (30 m/s).

a. Bereken hoe lang de inhaalmanoeuvre duurt.
b. Tijdens het inhalen nadert er in de verte een tegenligger. De afstand tot deze auto is bij het begin van het inhalen 600 m. Na het inhalen is de afstand nog 50 m. Bereken de snelheid van de tegenligger.

[a. grafisch/algebraïsch oplossen met $x_1=25\cdot t$ en $x_2=30\cdot t$. Daarna kijken wanneer $x_2-x_1=50$. $t=10$ s]
[b. jij legt $30\cdot 10=300$ m af, de tegenligger dus $600-50-300=250$ m.
$v=250/10=25$ m/s]

9. Discussieopgaven wiskunde en economie

In dit hoofdstuk vindt u discussieopgaven wiskunde en economie die gebruikt kunnen worden in een gesprek tussen secties (zie paragraaf 7.2). Voor de 3 discussieopgaven is de relatie met de subdomeinen uit de examenprogramma's wiskunde benoemd (zie tabel 2).

Tabel 2 Relatie tot subdomeinen examenprogramma's

Nr.	Titel	Onderwerp	Subdomeinen			
			HA	HB	VA	VB
1	Vrachtwagens Winst of verlies	Lineaire functies	C1, C2	B1	C1, C2	B1, B5
2	IJscoman Marktevenwicht	Lineaire functies	C3, C4	B1	C1, C2	B1, B5, C1
3	Kapitaal en fotocamera Groeifactor	Exponentiële functies Groeifactoren	B1, B5	A3, B1, B2	B1, C2	A3, B2, B5

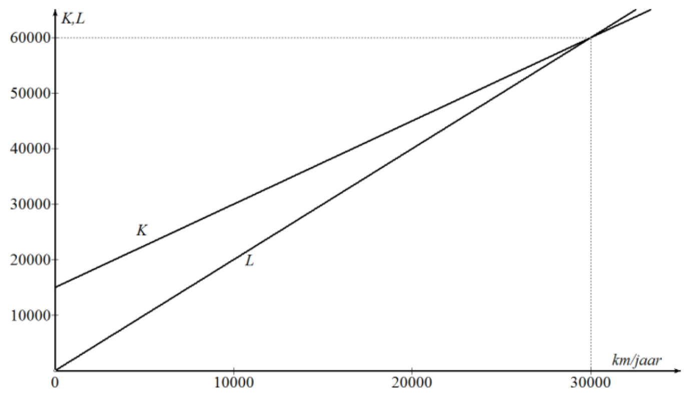
Discussieopgave 1
Onderwerp: lineaire functies

Wiskunde
Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, toepassing blz. 62.

Vrachtwagens
Bedrijven die een vrachtwagen nodig hebben, kunnen kiezen uit twee mogelijkheden: zelf een auto kopen of een auto huren (leasing). Bij leasing berust het onderhoud van de wagen bij de verhuurder. Zelf een auto kopen betekent een bepaald bedrag aan vaste kosten per jaar (afschrijving, onderhoud, belasting, een en anderen) plus een bedrag per kilometer (voornamelijk brandstof). Het huren van een wagen brengt geen vaste kosten met zich mee, maar wel een hogere km-prijs.
De vraag is: wat is in een concreet voorbeeld het voordeligst?

Voorbeeld
Zelf een vrachtwagen aanschaffen betekent vaste lasten ter hoogte van 15000 euro per jaar en een bedrag van 1,50 euro per verreden km.
Leasing kost 2 euro per km en verder niets.
Stellen we het aantal verreden kilometers per jaar gelijk aan x, dan geldt voor de kosten K van een zelf aangeschafte auto $K = 15\,000 + 1{,}5x$.
Voor de kosten L van leasing geldt $L = 2x$.

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van beide formules getekend.



De x-coördinaat van het snijpunt van de lijnen volgt uit:
$$15\,000 + 1{,}5x = 2x \leftrightarrow 0{,}5x = 15\,000 \leftrightarrow x = 30\,000.$$
Uit de figuur blijkt dat kopen voordeliger is als per jaar meer dan 30000 km wordt verreden.

Vervolg discussieopgave 1

Economie
Bron: *Index* (ThiemeMeulenhoff), De Nederlandse Economie, blz. 34.
(Onderwerp: de doelstelling van een bedrijf)

Winst of verlies
Van de bv *De ondernemer vooruit* is het volgende bekend:

- Het bedrijf heeft een productiecapaciteit van 125.000 eenheden.
- De verkoopprijs is € 10.
- De variabele kosten per product zijn altijd € 5.
- Bij een afzet van 50.000 producten zijn de totale kosten € 750.000.
- Bij een afzet van 50.000 producten zijn de totale kosten per product € 15.
- De totale kosten zijn voor een deel variabel en voor een deel constant.

De bv zet 50.000 producten af en is daar ontevreden over. De ondernemer gaat onderzoeken wat zijn break-even afzet en mogelijke maximale winst zijn.

a. Laat zien dat de kosten per product, ook wel de kostprijs genoemd, € 15 zijn, bij een afzet van 50.000 producten.
b. Bereken de TCK bij 50.000 producten.
c. Bereken de break-even afzet.
d. Bereken de maximaal mogelijke winst.
e. Bereken het verlies bij een afzet van 50.000 eenheden.
f. Bedenk een argument om te stoppen met de onderneming en bedenk een argument om door te gaan.

Een adviseur van *De ondernemer vooruit* stelt voor de productie op te voeren, want dan daalt de kostprijs.

g. Leg uit dat de kostprijs daalt.
h. Neem bron 11 over en vul de tabel in.

Bron 11				
Q	Prijs	Variabele kostprijs	Constante kostprijs	Totale kostprijs
0				
30.000				
60.000				
90.000				
120.000				

i. Teken een grafiek met daarin het verloop van de kostprijs en de prijs. Zet op de horizontale as de hoeveelheid (Q) af, op de verticale as de geldbedragen, zoals die horen bij de prijs en de kostprijs.
j. Geef het totale verlies aan in de grafiek.

Het lukt *De ondernemer vooruit* niet, de afzet wil maar niet stijgen. Een afnemer uit België lijkt de reddende engel door boven op die 50.000 eenheden, 5.000 eenheden extra te kopen. Maar hij piekert er niet over € 10 voor deze producten te betalen, € 8 lijkt hem genoeg.

k. Toon met een berekening aan dat de bv er goed aan doet op dit voorstel in te gaan.
l. Leg in woorden uit waarom de bv er beter van wordt.

Discussieopgave 2
Onderwerp: lineaire functies

Wiskunde
Bron: *Getal&Ruimte* (EPN), vwo A/C deel 1, blz. 82 en blz. 84.

Informatief: p uitdrukken in q
Het is in de economie gebruikelijk de prijs p uit te drukken in q, hoewel het omgekeerde misschien meer voor de hand ligt. Immers, de verkoop hangt af van de prijs.
Maar omdat het gewenst is de kosten K, de opbrengst R en de winst W in dezelfde variabele uit te drukken en de kosten afhangen van q, is er in economische modellen voor gekozen ook p in q uit te drukken. De grafiek van p als functie van q heet de prijs-afzetlijn.

IJscoman
Een ijscoman weet uit ervaring dat hij op een zonnige dag bij een prijs van € 1,30 per ijsje 700 stuks verkoopt. Bij elke 10 cent prijsverhoging verkoopt hij er 50 minder.
Er bestaat een lineair verband tussen de prijs p in euro's en het aantal verkochte ijsjes q.

a. Stel de formule op van p als functie van q.
b. Druk de dagopbrengst R in euro's uit in q.
c. Welke prijs moet de ijscoman voor een ijsje vragen om een maximale dagopbrengst te verkrijgen?

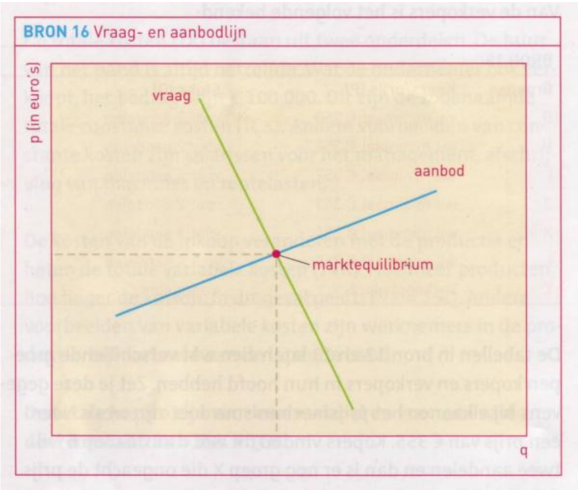
De ijscoman heeft ook kosten, namelijk 60 cent per ijsje en 50 euro per dag aan vaste kosten.

d. Stel de formule op van de dagelijkse kosten K.
e. Stel de formule op van de winst W per dag.
f. Bereken de maximale winst. Hoeveel kost een ijsje dan?

Economie
Bron: *Index* (ThiemeMeulenhoff), De Nederlandse Economie, Memokaart D02 en opdracht 6, blz. 36.
(Onderwerp: de doelstelling van een bedrijf)

Marktevenwicht.
In bron 16 staan geen getallen, dus de evenwichtsprijs blijft onbekend. Voorschriften van een functie of vergelijking zouden kunnen helpen. Maar ook daarvoor ontbreken gegevens.

Stel dat de aanbodlijn bij een prijs van 60 binnenkomt. Anders gezegd: bij $P = 60$ geldt $Q = 0$. Verder is gegeven: als $P = 100$ hoort daarbij $Q = 600$. Twee punten van de lijn zijn bekend dus kan het voorschrift worden gemaakt.



Let op: het is bij het vak economie gangbaar om uit te gaan van het volgende algemene voorschrift: $Q = aP + b$. Dit gaat in tegen het gevoel, ontwikkeld in de lessen wiskunde. Bij wiskunde wordt gewerkt met $Y = aX + b$. Vanuit dit gebruik zou het logisch zijn $P = aQ + b$ te maken. Niet dus.

Om fouten te voorkomen is het daarom handig om in het gekozen voorschrift in te vullen wat bekend is, dan komen de onbekenden (a en b) er vanzelf uit.

Een voorbeeld met de gegeven punten.

$Q = aP + b$

dus
$$\begin{array}{r} 0 = a\,60 + b \\ 600 = a\,100 + b \\ \hline -600 = -40a \end{array} \quad -$$

$-600 = -40a$ dus $a = -600/-40 = 15$

dus $Q = 15P + b$ dus $0 = 15 \cdot 60 + b$ en dus $b = -900$. We krijgen: $Q = 15P - 900$

De aanbodvergelijking heeft zijn voorschrift. Het voorschrift voor de vraaglijn is op dezelfde manier, aan de hand van bekende punten te vinden. Stel de twee voorschriften aan elkaar gelijk en de prijs, waarbij vragers en aanbieders het met elkaar eens zijn, komt er vanzelf uit.

Opdracht

Van de consumenten is bekend

P	Q
0	7.500
100	5.000

a. Bepaal de vergelijking die het gedrag van de consumenten weergeeft ($Q = aP + b$).
   Verklaar het teken van het getal voor de prijs.

b. Bereken met de eerder berekende aanbodvergelijking de prijs en hoeveelheid bij marktevenwicht, ofwel het snijpunt van de twee lijnen.

Discussieopgave 3
Onderwerp: exponentiële functies

Wiskunde
Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, toepassing blz. 139.

Kapitaal
Een kapitaal van 1000 euro staat op een spaarrekening tegen een vaste rente van 8% per jaar. De rente wordt één keer per jaar bijgeschreven.

1. Stel een tabel op voor vijf opeenvolgende jaren waarin het kapitaal in een zekere regelmaat wordt beschreven.
2. Toon aan dat voor het kapitaal na t jaar geldt: $K(t) = 1000 \cdot (1{,}08)^t$.
3. Bereken hoe lang het duurt voordat het kapitaal zich heeft verdubbeld.

Oplossing

	t	K
a.	0	1000
	1	$1000 + 1000 \cdot \frac{8}{100} = 1000 \cdot (1 + 0{,}08) = 1000 \cdot 1{,}08$
	2	$1000 \cdot 1{,}08 + 1000 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{8}{100} = 1000 \cdot 1{,}08 \cdot (1 + 0{,}08) = 1000 \cdot 1{,}08^2$
	3	$1000 \cdot 1{,}08^2 + 1000 \cdot 1{,}08^2 \cdot \frac{8}{100} = 1000 \cdot 1{,}08^2 \cdot (1 + 0{,}08) = 1000 \cdot 1{,}08^3$
	4	$1000 \cdot 1{,}08^4$
	5	$1000 \cdot 1{,}08^5$
	:	
	:	
b.	t	$1000 \cdot 1{,}08^t$

c. $1000 \cdot 1{,}08^t = 2000 \leftrightarrow 1{,}08^t = 2 \leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}08}$ (of $t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}08}$) $\leftrightarrow t = 9{,}01$

Het kapitaal zal dus na 9,01 jaar verdubbeld zijn.

Wiskunde
Bron: *Moderne Wiskunde* (Noordhoff Uitgevers), 9e editie wiskunde A deel 1, blz. 151.

Fotocamera
Een lens van een fotocamera kost € 750,–. Bij aanschaf van deze lens wordt de prijs nog verhoogd met 19% btw. De winkelier geeft echter 10% korting.

a. Bij het berekenen van de uiteindelijke prijs redeneert de winkelier als volgt: De prijs wordt eerst verhoogd met 19% en daarna gaat er 10% af. Dat komt neer op 9% verhoging van de prijs, dus vermenigvuldig ik de prijs met 1,09.

Is deze redenering juist? Leg je antwoord uit.

b. Moet je de prijs eerst verhogen met 19% en daarna de korting toepassen of moet het precies andersom?

c. Je kunt de uiteindelijke prijs in één keer uitrekenen. Welke groeifactor gebruik je dan?

Vervolg discussieopgave 3

Economie
Bron: Concept nieuwe economie (SLO), Experimenteel lesprogramma vwo, *module 4: Sparen en lenen*.

Groeifactor
Bij wiskunde heb je geleerd om met groeifactoren te werken. Ook bij economie werken we hier veel mee. Groeifactoren bij economie zijn meestal klein. Een voorbeeld is de rente die je op een spaarrekening krijgt. Als deze rente 5% per jaar is, is de groeifactor 1,05.

Voorbeeld: Wieneke heeft op haar spaarrekening € 2.000 staan. De rente is 6% per jaar. De groeifactor is dus 1,06. Na 1 jaar staat er op de spaarrekening: € 2000 × 1,06 = € 2.120.
Na 2 jaar staat er op de spaarrekening: € 2000 × 1,06 × 1,06 = € 2000 × 1,062 = € 2.247,20.

Opdracht
In 2002 bedroeg de omzet van een bedrijf € 300 miljoen. In 2003 groeide de omzet met 14 %, in 2004 met 6 %, in 2005 met 25 % en in 2006 daalde de omzet met 5 %.
a. Bepaal voor elk van de jaren (2003, 2004, 2005 en 2006) de groeifactor.
b. Bereken de omzet in elk van de jaren (2003, 2004, 2005 en 2006).

We kunnen ook de groeifactor berekenen. Voorbeeld:
Op 1 januari heeft Frans € 500 op zijn spaarrekening staan. In een jaar wordt er alleen rente bijgeschreven. Op 31 december staat er € 525 op zijn rekening. De groeifactor is 525 : 500 = 1,05.
De groei (= groeipercentage) is dus 5% per jaar.
Aangezien de groei uitsluitend toe te schrijven is aan ontvangen rente, bedraagt de rente blijkbaar 5%.

Opdracht
In 2004 bedroeg de omzet van een bedrijf € 250 miljoen. In 2005 was de omzet € 275 miljoen en in 2006 was dit € 261,25 miljoen.
a. Bereken de groeifactor in 2005.
b. Bereken de groeifactor in 2006.
c. Bepaal de groei in procenten in 2005.
d. Bepaal de groei in procenten in 2006.

In plaats van de groeifactor berekenen we bij economie meestal de procentuele verandering. Als we de groeifactor weten, is de procentuele verandering eenvoudig af te leiden.

Voorbeeld
Een groeifactor van 1,03 is een stijging van 3%.
Een groeifactor van 1,21 is een stijging van 21%.
Een groeifactor van 0,85 is een daling van 15%.
Een groeifactor van 0,20 is een daling van 80%.
Een groeifactor van 2,10 is een stijging van 110%.
Een groeifactor van 11,0 is een stijging van 1.000%.

Je kunt een procentuele verandering dus berekenen door eerst de groeifactor te berekenen.
Maar je kunt de procentuele verandering ook als volgt berekenen:

procentuele verandering = $\frac{verandering}{waarde\, basis} x\, 100\%$ of procentuele verandering =

$\frac{nieuw - oud}{oud} x\, 100\%$

Afsluiting

Afstemming tussen vakken kan bijdragen aan het vormgeven van samenhangend onderwijs. Het uitgangspunt is de leerling, die samenhang moet ervaren. Afstemming kan, hopelijk ondersteund door schoolbeleid, ontstaan door gesprekken tussen vaksecties en binnen vaksecties. Belangrijk is om iets concreets te hebben om een gesprek in te gaan. Dit deel heeft een poging gedaan dit te bieden, evenals aandachtspunten voor een gesprek.
Een gesprek levert bewustwording op, begrip voor elkaars vak, maar hopelijk vooral concrete afspraken. Waarbij de eerste concrete afspraken wellicht weer leiden tot een nieuw gesprek.

foto: humantouchphotography.nl

Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken

Handreiking met voorbeeldmateriaal

Deel C
Samen aan de slag

Deel C | Samen aan de slag

slo

DEEL C Samen aan de slag

"Als u iets door en door wilt leren kennen, onderwijs het dan aan anderen".
T. Edwards

Met de opgaven in dit deel wordt duidelijk gemaakt hoe de wiskunde ingezet kan worden om natuurkundige of economische problemen op te lossen. In deel B is al beschreven hoe deze opgaven gebruikt kunnen worden in een gesprek tussen secties. Dit deel richt zich op het gebruik in de les zelf. Ze kunnen een plek krijgen in de les of dienen als toepassingen bij de afsluiting van een hoofdstuk c.q. onderwerp als een middel om samenhang zichtbaar te maken voor de leerling. Mogelijk zijn ze ook, zulks natuurlijk ter beoordeling van de docent, bruikbaar bij een proefwerk of PTA-toets, al dan niet aangepast.
Dit deel schets eerst kort enkele mogelijkheden om samenhang zichtbaar te maken in de les of leerlingactiviteiten (hoofdstuk 10) en laat vervolgens voorbeeldopgaven natuurkunde en economie zien (hoofdstuk 11 en 12). Voor biologie en scheikunde wordt nog aan een opgavenset gewerkt.

10. Achtergrond

Om verbanden te laten zien tussen verschillende schoolvakken (aan de leerlingen) zijn verschillende vormen mogelijk binnen een school. In deel A onderscheiden we twee benaderingen:

- Activiteiten die buiten de reguliere vaklessen plaatsvinden. Dit lijkt vaak de makkelijkst te organiseren variant.
- Activiteiten die binnen de eigen vakles plaatsvinden.

Drie voorbeelden van uitgewerkte activiteiten zijn te vinden in:

- SaLVO: materiaal, voornamelijk voor de onderbouw en in een leerlijn uitgezet, met als terugkerend thema evenredigheid en verbanden tussen grootheden. Het kan als vervanging van de lesstof worden gebruikt, maar ook als aanvulling. Het materiaal is aan vakken gekoppeld, maar kan ook voor een profielmiddag gebruikt worden. De activiteiten kunnen dus zowel binnen als buiten de eigen vakles gebruikt worden.
- *Samenhangend onderwijs voor wiskunde en natuurkunde* (SLO, 2005): In deze publicatie staan verschillende voorbeelden van initiatieven rond samenhang. Verder worden schoolvoorbeelden uitgewerkt voor combi-uren (dus gedeeltelijk in eigen les) en wordt in een stappenplan uitgewerkt hoe deze projecten vorm te geven.
- *Samenhang in Europees kader* (Compass, 2011): deze publicatie beschrijft materiaal voor onder de 16 jaar. Het gaat om lessenseries waarin biologie, natuurkunde of scheikunde gecombineerd wordt met wiskunde. Vooral aanvullend op eigen materiaal en geschikt voor bijvoorbeeld projectmiddagen.

De voorbeelden in de volgende paragrafen zijn bedoeld om als activiteit in de les te gebruiken om leerlingen de verbindingen tussen de vakken te tonen. Het gaat om contextopgaven uit natuurkunde en economie, waarin wiskunde een belangrijke rol speelt. Voorbespreken met een collega (buiten de les om) heeft meerwaarde voor het gebruik (zie deel B) en kan bijdragen aan het gesprek tussen vaksecties. Wat op één school werkt, werkt op een ander misschien niet (volledig). Welke (eigen) les- en werkvorm gekozen wordt binnen de school, evalueer achteraf! Bespreek de ervaringen en verbeteringen die mogelijk zijn.

11. Voorbeeldopgaven uit de natuurkunde

De voorbeeldopgaven zijn afkomstig uit de wereld van de natuurkunde. De context is dus steeds een natuurkundige, de vragen die gesteld worden, zijn wiskundige vragen. Enkele opgaven gaan verder dan het examenprogramma aangeeft. Wij menen dat ze desondanks goed bruikbaar zijn. Een docent kan ze ter illustratie behandelen in de les. Tegelijkertijd kunnen de opgaven een uitdaging zijn voor de betere leerlingen.

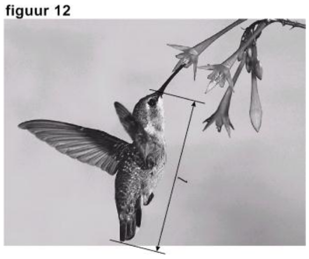
Voor de 15 voorbeeldopgaven is de relatie met de subdomeinen uit de examenprogramma's wiskunde benoemd. Zie tabel 3.

Tabel 3 Relatie met subdomeinen examenprogramma's

nr.	Titel	Onderwerp	Subdomeinen			
			HA	HB	VA	VB
1	Kolibrie	Formules, rekenen	B1	B1	B1	B5
2	Slingerproef	Evenredigheden	—	B3	C2	B2
3	Arbeid	Integraalrekening	—	—	—	C3
4	Kingda Ka	Afgeleide	—	D2	D2	C1
5	Halveringstijd	Exponentiële functies	C5	B1 B2	C1 C2	B2
6	Simulatie van radioactief verval	Exponentiële functies	C2	B1	C1	B3
7	Radioactief verval	Differentiëren, e-machten	—	—	D3	C2
8	Potentiometers 1	Lineaire functies	C4	B1	C2	B3
9	Geluidssterkte	Logaritme	—	B1 B2	C2	B2
10	Potentiometers 2	Logaritme	—	B1	C2	B2
11	Vallend voorwerp	Differentiëren, e-machten	—	—	—	C1 C2
12	Twee voorbeelden	Omzetten van formules	B2 C2	B3	B1	B1
13	Regen en sneeuw	Differentiëren	—	D2	D2	C1
14	Gedempte trilling	Goniometrie, e-machten	—	—	C2	B2 D1
15	Stortbakken	Differentiëren, e-machten	—	—	—	B2 C2

Opgave 1 Kolibrie
Bron: CSE Natuurkunde 1,2 vwo 2007, tijdvak 2.

figuur 12

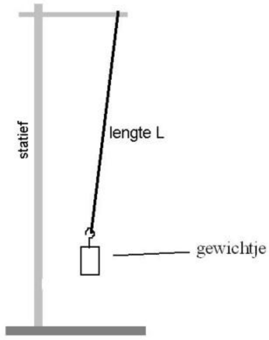


De kolibrie is een klein vogeltje dat door de snelle vleugelslag stil kan blijven hangen in de lucht. Zie: figuur 12. Een onderzoeker maakte deze foto om de lengte l van de vogel te bepalen. Hij gebruikte een telelens met een brandpuntsafstand van 135 mm. De afstand van kolibrie tot lens was 1,80 m. Het beeld werd vastgelegd op een beeldchip. De afmetingen van deze beeldchip zijn 12,8 mm × 9,6 mm. Figuur 12 is een volledige afbeelding van het vastgelegde beeld.
Bepaal de lengte l van de kolibrie.

Opgave 2 Slingerproef
Bron: Practicumvoorschrift Bonhoeffer College, Enschede.

Bij deze proef ga je onderzoeken wat het verband is tussen de trillingstijd T van een slinger en de slingerlengte L.

Werkwijze



- Maak de hiernaaststaande opstelling. Laat het gewichtje slingeren met een kleine amplitude (waarom?).
- Meet de slingertijd voor 5 á 6 slingerlengten. Zorg voor een ruime spreiding in de slingerlengte: van ca. 10 cm tot 1,5 á 2 meter. Meet vaker dan één keer want: *hoe vaker je meet hoe nauwkeuriger het meetresultaat in het algemeen is.*
- Na uitvoering van de proef ga je met je partner je meetgegevens verwerken in een Excel-tabel zoals hieronder *(als voorbeeld)* is aangegeven (vermeld in de kop van de tabel de grootheden én eenheden):

L (m)	$5 \cdot T$ (s) 1e keer	$5 \cdot T$ (s) 2e keer	T (s) gem.	T ^ 2 (s^2)
0,20	…	…	….	…
1,20	11,0	…	2,20	4,83

Zoals je waarschijnlijk gemerkt hebt, is er een verband tussen slingerlengte en trillingstijd.

Voor een niet al te grote uitwijking geldt: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

In deze formule is T = trillingstijd in s
L = slingerlengte in m
g = valversnelling in m/s^2

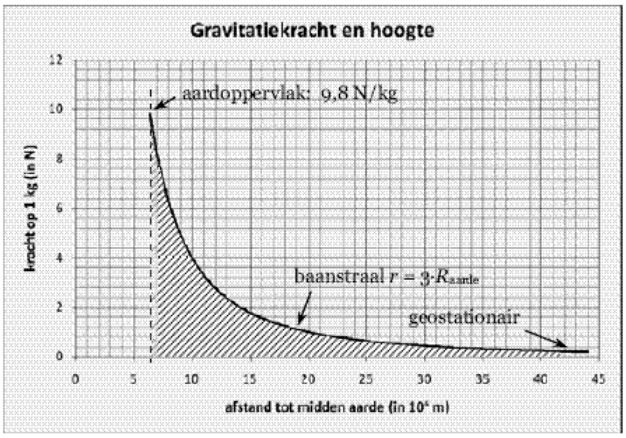
Als je moet onderzoeken hoe de slingerlengte afhangt van de tijd, kun je een grafiek tekenen waarbij je T^2 uitzet tegen L. Want: $T^2 = \dfrac{4 \cdot \pi^2}{g} \cdot L$

Je ziet dat L rechtevenredig is met T^2, dus levert de grafiek T^2 tegen L een rechte op met helling $4\pi^2 / g$.

Bepaal uit deze grafiek de waarde voor g en bepaal ook de nauwkeurigheid in deze waarde.

Opgave 3 Arbeid voor een lancering
Bron: Nieuwe Natuurkunde (www.natuurkunde.nl), *Wisselwerking*, blz. 101.

Bij een lancering is arbeid nodig om tegen de gravitatiekracht in te bewegen.
In de grafiek van figuur 25 is het verband tussen de gravitatiekracht op 1 kg en de afstand tot het midden van de aarde getekend. In deze opdracht kijken we naar een lancering tot een baan met $r = 3 \cdot R_{aarde}$.



Figuur 25 – Gravitatiekracht en de hoogte boven het aardoppervlak.

a. Leg uit dat de arbeid bij de lancering van 1 kg gelijk is aan de oppervlakte onder de grafiek van figuur 25.

Met de grafische rekenmachine is de oppervlakte te berekenen. Invullen van de gegevens van de aarde in de formule voor de gravitatiekracht geeft:

$$F_{grav} = G \cdot \frac{M_{aarde} \cdot 1}{r^2} = 3{,}99 \cdot 10^{14} \cdot \frac{1}{r^2}$$

In deze formule is r de afstand (in 10^6 m) tot het midden van de aarde.

b. Noteer deze formule in de grafische rekenmachine als $Y = 3{,}99 \cdot 10^{14} \cdot 1 / X^2$.

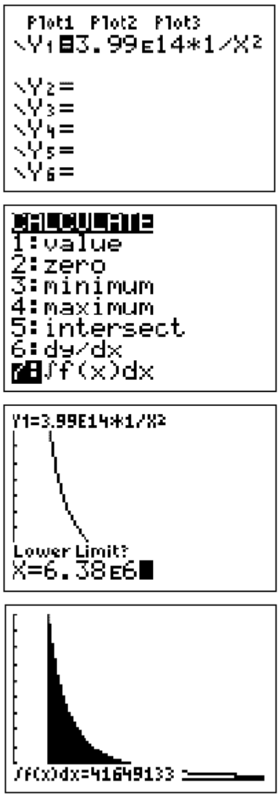
c. Stel het juiste window in: X op [0; 45E6] en Y op [0; 10] en laat de grafiek van F_{grav} tekenen. De horizontale schaal is in m, de verticale schaal is in N/kg.

Bij een lancering naar een baan met $r = 3 \cdot R_{aarde}$ geldt: $r = 19{,}1 \cdot 10^6$ m.

d. Gebruik het menu CALC om de oppervlakte onder de grafiek te berekenen van $r = 6{,}38 \cdot 10^6$ tot $r = 19{,}1 \cdot 10^6$ m.

Geef het antwoord in MJ.

e. Vergelijk het resultaat met de gravitatie-energie op aarde (–62,5 MJ/kg) en in de baan met $r = 3 \cdot R_{aarde}$. Wat is je conclusie?



Figuur 26 – Berekenen van de arbeid via de oppervlakte-methode met de grafische rekenmachine.

Opgave 4 Kingda Ka

Bron: CSE Natuurkunde 1, vwo 2010, tijdvak 1.

Lees het artikel.

> ***Snelste achtbaan ter wereld geopend***
>
> ***New York**. De hoogste en snelste achtbaan ter wereld gaat binnenkort open. Wie in de Kingda Ka stapt, maakt mee dat de trein in 3,5 seconde vanuit stilstand tot 205 km h $^{-1}$ wordt versneld en daarna 139 m omhoog wordt gejaagd. Op het hoogste punt is de snelheid nog zo groot, dat de passagiers loskomen uit hun stoeltje en tegen de sluitbeugels worden gedrukt. Vervolgens stort de trein zich loodrecht in de diepte, waarna een tweede heuvel volgt. De hele rit duurt nog geen minuut.*

Bij de start wordt de trein van de Kingda Ka op een horizontale baan versneld.

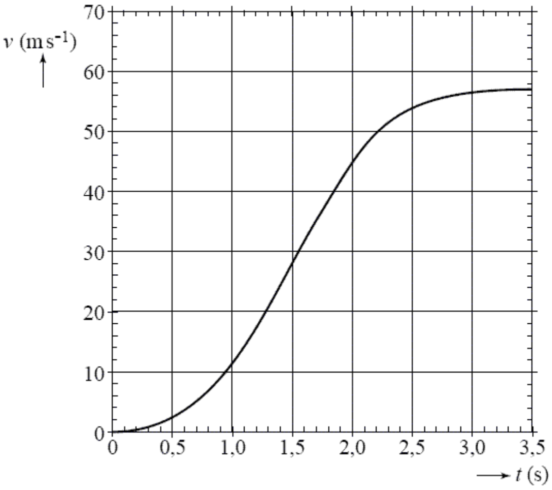
In figuur 1 staat het (v, t)-diagram van de beweging op die horizontale baan.

Tussen $v \approx 20$ ms^{-1} en $v \approx 40$ ms^{-1} is de beweging éénparig versneld. De versnelling is daar maximaal.

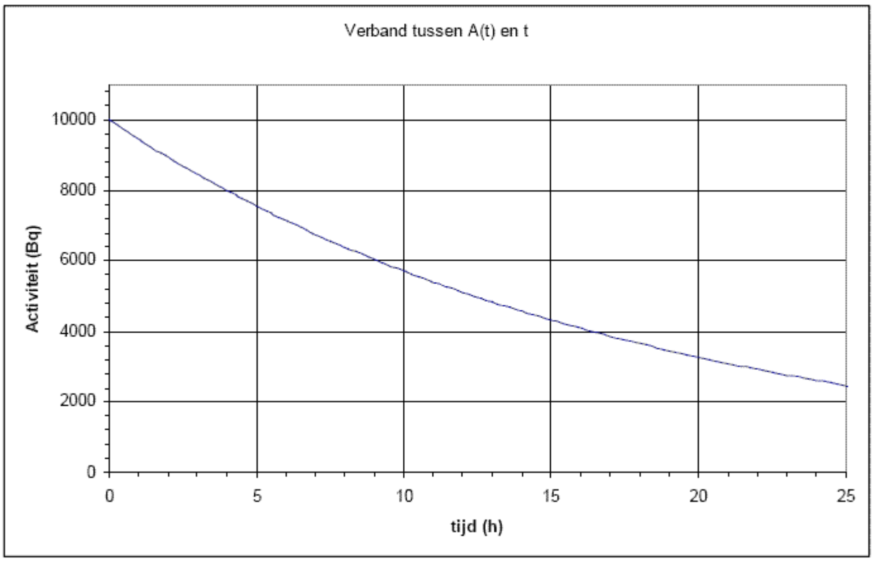
Bij dit soort attracties wordt de versnelling op de passagiers vaak uitgedrukt in de valversnelling g .

Bepaal met behulp van figuur 1 de maximale versnelling die de passagiers ondervinden, uitgedrukt in de valversnelling g .

figuur 1



Opgave 5 Halveringstijd
Bron: Nieuwe Natuurkunde (www.natuurkunde.nl), *Medische Beeldvorming*, blz. 38.



Figuur 2.17

In figuur 2.17 is van een radioactief isotoop het verband tussen de activiteit en de tijd weergegeven.

a. Bepaal uit het diagram de halveringstijd.
b. Bereken na hoeveel uur de activiteit gedaald is tot 625 Bq.
c. Leg uit dat de grafiek van het aantal instabiele kernen als functie van de tijd dezelfde vorm heeft, maar met een ander beginpunt.

Om het aantal instabiele kernen N op $t = 0$ te bepalen kan een schatting gemaakt worden met de volgende gegevens:

- Na één halveringstijd (45000 s) is de helft van het aantal instabiele kernen vervallen.
- In deze periode is de gemiddelde activiteit ongeveer 7,0 kBq.

d. Bepaal uit deze gegevens het aantal instabiele kernen N op $t = 0$.

Neem aan dat $N(0) = 650$ miljoen, zodat geldt:

$$N(t) = 6{,}5 \cdot 10^{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{45000}}$$

e. Gebruik $A(t) = -\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta(t)}$ om te controleren dat de activiteit op $t = 0$ hierbij 10,0 kBq is.

Opgave 6 Simulatie van radioactief verval
Bron: practicumvoorschrift Bonhoeffer College, Enschede.

Het vervalproces van radioactieve stoffen is een statistisch proces. We noemen de tijd waarin de helft van het aantal aanwezige kernen vervalt de halveringstijd. De halveringstijd van een stof is een materiaalconstante.

Om het vervalproces te visualiseren hebben we een emmer met ca. 300 blokjes (dobbelsteentjes). Eén zijde van de blokjes hebben we een kleurtje (blauw) gegeven. De kans dat de blauwe zijde boven komt, is dus 1/6.

Nu gooien we de dobbelstenen uit op een grote tafel. Alle stenen met de blauwe zijde boven halen we er uit en tellen we. We rekenen even uit hoeveel blokjes we overhouden. Dat was worp 1.

Bij de tweede en volgende worp herhalen we dit: iedere keer worden de blokjes met de blauwe zijde boven eruit gehaald; deze doen niet meer mee bij de volgende worp. We gaan verder met de andere blokjes.

We maken een tabel:

worp	**"vervallen kernen"**	**"aantal aanwezige kernen"**
0	0	300
1	50	250
2	20	230
3	…	…

Leerlingen maken een grafiek waarbij het "aantal aanwezige kernen" (3^{e} kolom) wordt uitgezet tegen het "aantal worpen" (1^{e} kolom). Het aantal worpen stelt hier de tijd voor.

Uit de grafiek halen we de "halveringstijd" (na hoeveel worpen is nog maar de helft, een kwart, een achtste, …. over).

Een uitbreiding van deze simulatie is het vergelijken met een situatie waarbij de kans op 'verval' groter is: de blokjes hebben twee bruine zijden. Hoe ziet de grafiek eruit als we het experiment opnieuw uitvoeren en kijken naar de bruine zijde van de blokjes?

Opgave 7 Radioactief verval
Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 2, praktijkprobleem blz. 114.

De snelheid waarmee een radioactief element vervalt is op elk tijdstip evenredig met het nog aanwezige aantal niet vervallen radioactieve atomen.
Van deze praktijksituatie onderzoeken we hier een voorbeeld.

We geven het aantal atomen dat op tijdstip t nog radioactief is, aan met $N(t)$ en we nemen als evenredigheidsconstante $0{,}002$. Dan krijgen we de volgende vergelijking:

$$\frac{dN}{dt} = -0{,}002 \cdot N \cdot$$

Om na te gaan welke formule voor $N(t)$ voldoet aan deze vergelijking zijn verschillende methoden beschikbaar. Een daarvan is de volgende.

Probeer voor $N(t)$ een formule van de vorm $N(t) = e^{kt}$.
Invullen in de vergelijking levert op: $k \cdot e^{kt} = -0{,}002 \cdot e^{kt}$ en dus $k = -0{,}002$.
De formule $N(t) = e^{-0{,}002t}$ voldoet dus aan het genoemde probleem.

Maar er zijn veel meer oplossingen.
Ga zelf na dat voor elke waarde van B de formule $N(t) = B \cdot e^{-0{,}002t}$ ook een oplossing is.
Wanneer we ook nog weten hoeveel radioactieve atomen er zijn op het tijdstip $t = 0$, is daarmee de waarde van B vastgelegd, immers $N(0) = B \cdot e^{0} = B$.
In het algemeen is er bij radioactief verval sprake van de vergelijking $\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$ met als oplossing $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$

Opgave 8 Potentiometers 1
Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, eindopdracht 3, blz. 64.

In de elektronica maakt men veel gebruik van regelbare elektrische weerstanden, die, nogal misleidend, potentiometers worden genoemd. De knop waarmee je de geluidssterkte van een radio of versterker regelt, is in feite zo'n potentiometer.
Het verband tussen de ingestelde hoek φ en de daarbij behorende weerstand r is meestal 'lineair', zodat $r = c \cdot \varphi + d$.

Hierin is :
r de weerstand, in ohm;
c en d positieve constanten, afhankelijk van het type weerstand, in ohm per graad en ohm;
φ de ingestelde hoekverdraaiing, in graden.

Bij een eenvoudige potentiometer is φ instelbaar tussen 0º en 320º à 340º.

a. Geef het verband tussen φ en r bij een lineaire potentiometer als $r(0) = 0\ \Omega$ en $r(330) = 1000\ \Omega$.
b. Hoe groot is r als de knop 100º is gedraaid?

Opgave 9 Geluidssterkte
Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, toepassing 1 blz.117.

Geluidssterkte
Het verband tussen de geluidssterkte L (in decibel) en de intensiteit I in (W/m²) wordt gegeven door de formule $L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

Hierin is I_0 per definitie de standaard-intensiteit van 10^{-12} [W/m²],
zodat $L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$;
het grondtal van de logaritme is 10.

Verder geldt: als een geluidsbron A op een bepaalde plaats een intensiteit I_A veroorzaakt, en een tweede geluidsbron B op diezelfde plaats een intensiteit I_B, dan veroorzaken ze samen een intensiteit $I_{totaal} = I_A + I_B$. Intensiteiten mogen dus opgeteld worden, geluidssterkten niet.

1. Een geluidsbron zorgt voor een intensiteit van $I = 2 \cdot 10^{-5}$ W/m². Bereken de geluidssterkte (in decibel).
2. Een geluidsbron veroorzaakt een geluidssterkte van $L = 70$ decibel. Vervolgens wordt geluidsisolatie toegepast waardoor ter plaatse de intensiteit I wordt gehalveerd. Bereken de nu ter plaats geldende geluidssterkte in decibel.
3. In een ruimte zijn twee geluidsbronnen, A en B. A alleen zorgt voor 70 decibel en B alleen zorgt voor 80 decibel. Voor hoeveel decibel zorgen A en B samen? Geef eerst een schatting van het antwoord.

Oplossing

1. We vullen $I = 2 \cdot 10^{-5}$ in, in de formule voor L; dat geeft:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log\left(2 \cdot 10^{7}\right) = 10 \cdot (\log 2 + \log 10^{7}) = 10 \cdot (0{,}3 + 7) = 73 \text{ [dB].}$$

We moeten L berekenen; daarvoor hebben we I nodig. We weten dat die gezochte I de helft is van de I die hoort bij $L = 70$ dB. De I -waarde bij $L = 70$ vinden we uit het gegeven:

$$70 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \leftrightarrow 7 = \log I + 12 \leftrightarrow \log I = -5 \leftrightarrow I = 10^{-5} \text{ [W/m²].}$$

2. De gevraagde L is dan $10 \cdot \log\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot (7 - \log 2) = 10 \cdot (7 - 0{,}3) = 67$ [dB].

Dat is verrassend: door 'isolatie' wordt de intensiteit gehalveerd, maar de geluidssterkte loopt slechts met ± 5% terug, van 70 naar 67 dB.

3. Gevraagd wordt L_{A+B}. Om dat te berekenen hebben we $I_{A+B} = I_A + I_B$ nodig.

$$L_A = 70 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_A}{10^{-12}}\right) \rightarrow I_A = 10^{-5} \text{ [W/m²]}$$

$$L_B = 80 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_B}{10^{-12}}\right) \rightarrow I_B = 10^{-4} \text{ [W/m²]}$$

Hieruit volgt: $I_{A+B} = I_A + I_B = 10^{-5} + 10^{-4} = 0{,}0011$ [W/m²]

en $L_{A+B} = 10 \cdot \log\left(\frac{0{,}0011}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot (12 - 3{,}96) = 80{,}4$ [dB].

Heb je een verklaring voor deze zeer geringe stijging?

Opgave 10 Potentiometers 2

Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, toepassing blz.129.

In de elektronica maakt men veel gebruik van regelbare elektrische weerstanden, die, nogal misleidend, potentiometers worden genoemd. De knop waarmee je de geluidssterkte van een radio of versterker regelt, is in feite zo'n potentiometer.
Het verband tussen de ingestelde hoek φ en de daarbij behorende weerstand r is meestal 'lineair', zodat $r = c \cdot \varphi + d$.

Hierin is :
r de weerstand, in ohm;
c en d positieve constanten, afhankelijk van het type weerstand, in ohm per graad en ohm;
φ de ingestelde hoekverdraaiing, in graden.

Vooral in de elektronica komen zogenoemde logaritmische potentiometers voor, waarbij het verband tussen de ingestelde hoek φ en de weerstand r in ohms is gegeven door:

$\varphi = k \cdot \log\left(\dfrac{r}{r(0)}\right)$. Hierin is $r(0)$ de weerstand bij $\varphi = 0^0$ (knop geheel 'linksom').

Bij een eenvoudige potentiometer is φ instelbaar tussen 0º en 320º à 340º.

1. Bij een zeker logaritmische potentiometer meet men $r = 10\ 000$ [Ω] bij $\varphi_{\max} = 320^0$ en $r = 1000$ [Ω] bij $\varphi = 160^0$. Ligt hiermee de waarde van r bij $\varphi = 0^0$ vast? Zo ja, bepaal dan $r(0)$ en k .
2. Bepaal $r(30^0)$.
3. Bij welke waarde van φ is $r = 7000$ [Ω]?

Oplossing

1. Gegeven is dat het verloop van $\varphi(r)$ (en *niet* $r(\varphi)$!) logaritmisch is; verder is $\varphi(1000) = 160^0$ en $\varphi(10\ 000) = 320^0$. We krijgen dus twee vergelijkingen met twee onbekenden, en die zijn oplosbaar. Invullen van de gegevens resulteert in:

$160 = k \cdot \log\left(\dfrac{1000}{r(0)}\right)$ en $320 = k \cdot \log\left(\dfrac{10\ 000}{r(0)}\right)$ (1)

Hieruit volgt: $\dfrac{320}{160} = \dfrac{\log\left(\dfrac{10\ 000}{r(0)}\right)}{\log\left(\dfrac{1000}{r(00}\right)}$ dus $2 = \dfrac{\log 10\ 000 - \log r(0)}{\log 1000 - \log r(0)} = \dfrac{4 - \log r(0)}{3 - \log r(0)}$

zodat $\log r(0) = 2$ en $r(0) = 10^2 = 100$ [Ω]. Substitutie van deze waarde in de eerste vergelijking van (1) geeft nu $160 = k \cdot \log 10$ zodat $k = 160^0$.

2. $30 = 260 \cdot \log\left(\dfrac{r(30)}{100}\right)$, dus $\frac{3}{16} = \log r(30) - \log 100$. Hieruit volgt $\log r(30) = \frac{35}{16}$ en $r(30) = 10^{\frac{35}{16}} \approx 154$ [Ω]
3. $\varphi(7000) = 160 \cdot \log \frac{7000}{100} \approx 295{,}2^0$

Opgave 11 Vallend voorwerp

Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, toepassing 1 blz. 234.

Een voorwerp met een massa van 1000 [kg] is in een vrije val. We nemen aan dat de luchtweerstand W evenredig is met de snelheid v van het vallende voorwerp, dus $W = k \cdot v$
k is een positieve constante.

Als $k = 0$ is er geen luchtweerstand en is $v(t) = 10t$, omdat dan alleen de zwaartekracht werkt en de versnelling van de vrije val 10 [m/s²] is.

Is er *wel* luchtweerstand dan wordt gegeven dat de snelheid van het voorwerp op tijdstip t gelijk is aan: $v(t) = \frac{10}{k} \cdot \left(1 - e^{-kt}\right)$.

1. Wat verstaan we onder de uitdrukking $\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ in een tijdsinterval $[t, t + \Delta t]$?
2. Welk begrip gaat er schuil achter $\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$?

Bereken de limiet voor de gegeven $v(t)$ m.b.v. de rekenregels voor het differentiëren (differentieer dus $v(t)$).

3. We weten dat de versnelling van de vrije val ±10 m/s² is. Voor het vallende voorwerp uit deze toepassing hebben we nu ook de versnelling berekend. Kun je aantonen dat die versnelling in dit geval ≤ 10 m/s² is?
4. Hoe groot is de versnelling op tijdstip $t = 0$?
5. Toon aan dat de versnelling van de vrije val van het voorwerp ‘op den duur’ gelijk wordt aan 0 (bereken $a(t)$).
6. Klopt dat met de bewering dat de snelheid van het voorwerp voor $t \to \infty$ constant wordt?

Oplossing:

1. Dit is de (gemiddelde) verandering van de snelheid per tijdseenheid, d.w.z. de gemiddelde versnelling over het tijdsinterval; eenheid $\frac{m/s}{s} = m/s^2$.
2. Als Δt tot 0 nadert, zal de gemiddelde versnelling $\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ overgaan in de versnelling op het tijdstip t (als die limiet bestaat).
3. $\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$; omdat $v(t) = \frac{10}{k} \cdot \left(1 - e^{-kt}\right)$ is $\frac{dv}{dt} = \frac{10}{k} \cdot k \cdot e^{-kt} = 10 \cdot e^{-kt}$
4. De versnelling is gelijk aan $10 \cdot e^{-kt}$; omdat e^{-kt} voor $t > 0$ en $k > 0$ altijd kleiner is dan 1, is de versnelling steeds kleiner dan 10 [m/s²]. We kunnen dit verklaren uit het feit dat het voorwerp luchtweerstand ondervindt, waardoor de versnelling die het krijgt kleiner is dan zonder luchtweerstand.
5. Op $t = 0$ is $10 \cdot e^{-kt} = 10$ [m/s²]. Op tijdstip $t = 0$ is er nog geen luchtweerstand W; W was gelijk aan $k \cdot v$, maar op tijdstip $t = 0$ is (gegeven dat) $v = 0$; dus is ook $W = 0$.
6. Ja, een voorwerp met versnelling 0 heeft een constante snelheid.

Opgave 12 Twee voorbeelden
Bron: Opdrachten Bonhoeffer College, Enschede.

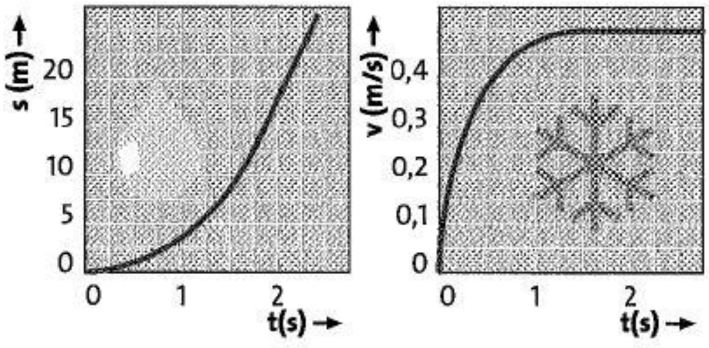
Omzetten van formules

A.
Voor de druk p en het volume V van een gas geldt: $p \cdot V =$ constant.
Bijvoorbeeld $p \cdot V = 10$.
Teken van dit laatste verband de grafiek waarbij je p uitzet tegen V.

B.
Voor de lensformule geldt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$
Teken, bij een gegeven waarde van f, de grafiek waarbij je b uitzet tegen v.
[omwerken geeft: $b = f \cdot \frac{v}{v - f}$]

Opgave 13 Regen en sneeuw
Bron: *Pulsar* (Noordhoff Uitgevers), bovenbouw havo, deel 1, hoofdstuk 1.

Regen klettert naar beneden, sneeuwvlokjes dwarrelen langzaam neer. Hieronder zie je de plaatsgrafiek van een regendruppel en de snelheidsgrafiek van een sneeuwvlok.



a. Hoe groot is de eindsnelheid van de sneeuwvlok?
b. Bepaal ook de eindsnelheid van de regendruppel.
c. Bepaal hoeveel meter de sneeuwvlok na 2,5 s gevallen is.
d. Hoelang doet de regendruppel over dezelfde afstand? Geef een schatting.

Opgave 14 Een gedempte trilling onderzoeken
http://www.samenhangintweedefase.slo.nl/HAVO-VWO/nenT/leerlingmateriaal/
voorbeeldlesmateriaal wiskunde-natuurkunde. In: *'Lessen natuurkunde'*.

De uitwijking van een trillend voorwerp als functie van de tijd voldoet aan de functie:

(1) $u(t) = A\sin(2\pi ft)$ met A: amplitudo (in cm of m)
f : frequentie van de trilling (in Hertz)

Opdracht met je grafische rekenmachine: 1. Teken deze functie u(t) met $A = 5{,}0$ cm en $f = 100$ Hz 2. Teken deze functie u(t) ook met dezelfde A en met $f = 50$ Hz. Beschrijf nu in woorden wat je conclusie is nu je deze twee diagrammen hebt bekeken.

Je ziet dat de trilling van een gewichtje aan een veer vrij snel uitdempt. Blijkbaar verliest het gewichtje vrij snel energie waardoor de amplitudo afneemt. Dat betekent dat de amplitudo blijkbaar ook een functie is van de tijd! De eisen waaraan de functie van de amplitudo moet voldoen zijn:

- de amplitudo is steeds positief;
- de amplitudo wordt niet steeds met hetzelfde getal kleiner, maar zal eerst sterk afnemen, daarna minder sterk;
- de amplitudo heeft de tijdas als asymptoot, als $t \to \infty$, dan $A \to 0$.

Een functie die aan deze eisen voldoet is:

(2) $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$ met A_0: amplitudo op $t = 0{,}0$ s
λ : een tijdsconstante (eenheid 1/s)

Opdracht met je grafische rekenmachine: 3. Teken de functie $A(t)$ met $A_0 = 5{,}0$ cm en $\lambda = 10$ s^{-1}. Neem voor de tijd: $0 < t < 0{,}20$ s 4. Teken de functie $A(t)$ ook met dezelfde A_0 en met $\lambda = 20$ s^{-1}. Beschrijf nu in woorden wat je conclusie is nu je deze twee diagrammen hebt bekeken.

Je hebt nu twee tijdsafhankelijke delen:

- de uitwijking als functie van de tijd: deze varieert vrij snel, de uitwijking kán ook negatief worden;
- de amplitudo als functie van de tijd: deze verandert minder snel.

Als het voorwerp gedempt trilt, zal de uiteindelijke uitwijking als functie van de tijd een combinatie zijn van deze twee functies. De amplitudo A in uitdrukking **(1)** kun je vervangen door de amplitudo in uitdrukking **(2)**.
Je krijgt dan: $u(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sin(2\pi ft)$

Opdracht met je grafische rekenmachine: 5. Teken de functie $u(t)$ met $A_0 = 5{,}0$ cm, $f = 100$ Hz en $\lambda = 10$ s^{-1}. Neem voor de tijd: $0 < t < 0{,}20$ s 6. Teken de functie u(t) ook met dezelfde A_0 en f en met $\lambda = 20$ s^{-1}. Beschrijf nu in woorden wat je conclusie is nu je deze twee diagrammen hebt bekeken. 7. Ga ook na wat er gebeurt als je de dempingsfactor (extreem) groter maakt. Wat betekent dat dan in de praktijk?

Opgave 15 Stortbakken

Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, toepassing 2 blz. 235.

Stortbakken van toiletten zijn altijd voorzien van een watertoevoer, die automatisch wordt afgesloten zodra het vloeistofniveau een bepaalde hoogte heeft bereikt. Dit gebeurt door middel van een drijver, die een kraantje geleidelijk afsluit. We gaan in onze toepassing uit van een bijzondere stortbak, waarbij de 'snelheid' waarmee het water het kraantje passeert, in liter/seconde, op elk moment evenredig is met de hoeveelheid water, in liters, die nog ontbreekt.

1. Probeer die laatste zin te vertalen in een wiskundige vergelijking. Laat het vulproces beginnen op het tijdstip $t=0$; noem de hoeveelheid water in de bak $v(t)$ (liter).

De vergelijking die je hierboven hebt gekregen, heet *differentiaalvergelijking*, omdat er een differentiaalquotiënt in voorkomt. De oplossing ervan is $v(t)=v_{vol}\cdot(1-e^{-kt})$.
Daarbij is v_{vol} de inhoud van de (volle) stortbak.

2. Ga na of dit resultaat wel klopt met de gegevens, zoals $v(\infty)=v_{vol}$, en of het wel voldoet als oplossing van de differentiaalvergelijking.
3. Op welk tijdstip is de bak half vol?
4. Hoe lang duurt het voor de bak geheel gevuld is?
5. Wat kun je zeggen over de constante k ?
6. In welke eenheden (seconden, liter) zou k moeten worden uitgedrukt?

Oplossing:

1. $\dfrac{dv(t)}{dt}=k(v_{vol}-v(t))$
2. Op $t=0$ is $v(0)=v_{vol}(1-e^{-k\cdot 0})=0$. Dit klopt!
   $$\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}(v_{vol}-v_{vol}\cdot e^{-kt})=-v_{vol}\cdot\frac{d}{dt}(e^{-kt})=-v_{vol}\cdot(-k)\cdot e^{-kt}=v_{vol}\cdot k\cdot e^{-kt}$$
   Vullen we dit in in de differentiaalvergelijking dan komt er:
   $v_{vol}\cdot k\cdot e^{-kt}=k(v_{vol}-v_{vol}(1-e^{-kt}))$ en dit is waar.
3. De bak is half vol als $1-e^{-kt}=\frac{1}{2}$, dus als $e^{-kt}=\frac{1}{2}$, dus als $t=\dfrac{\ln 2}{k}$
4. De bak is vol als $e^{-kt}=0$, ofwel …. nooit! Natuurlijk is dit zuiver theoretisch, net zoals de beschreven stortbak.
5. De constante k is maatgevend voor de snelheid waarmee de bak volloopt. Dit blijkt uit de hierboven onder 2 gevonden uitdrukking voor $\dfrac{dv(t)}{dt}$. Met name op $t=0$ geldt:
   $$\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)_{t=0}=v_{vol}\cdot k$$
6. Uit de laatste uitdrukking hierboven blijkt in welke eenheden k moet worden uitgedrukt. In het linkerlid staan liters/seconden, dan moet dat rechts ook zo zijn. De eenheid van k is dus 1/seconde of s^{-1}.

12. Voorbeeldopgaven uit de economie

De opgaven zijn afkomstig uit de wereld van de economie. De context is dus steeds een economische. De vragen die gesteld worden, zijn wiskundige vragen. Met deze opgaven wordt duidelijk gemaakt hoe de wiskunde kan worden ingezet om economische problemen op te lossen. Bij economie wordt veel gerekend en daarbij moeten we dan met name denken aan het rekenen met procenten (en dus ook groeifactoren) en het rekenen met verhoudingen. Een begrip als verhoudingstabel kan daarbij goed gebruikt worden.
Naast het rekenen zijn met name het gebruikmaken en interpreteren van grafieken van lineaire functies vaardigheden die leerlingen niet alleen bij wiskunde oefenen, maar ook bij economie vaak tegenkomen.
Het onderwerp differentiëren kan bij economie binnen het keuzeonderwerp een goede mogelijkheid bieden om de samenhang tussen beide vakken zichtbaar te maken.
Enkele opgaven gaan misschien verder dan het examenprogramma aangeeft. Wij menen dat ze desondanks goed bruikbaar zijn. De docent kan zo'n opgave ter illustratie behandelen in de les. Tegelijkertijd zijn deze opgaven een uitdaging voor de betere leerlingen.

Voor de 9 voorbeeldopgaven is de relatie met de subdomeinen uit de examenprogramma's wiskunde benoemd, zie tabel 4.

Tabel 4 Relatie met subdomeinen examenprogramma's

Nr.	Titel	Onderwerp	Subdomeinen			
			HA	HB	VA	VB
1	Frieten	Lineaire functies	C4	A3, B1	C2	A3, B1
2	Procenten en procentpunten	Procentrekenen	B1	A3	B1	A3
3	Levensloop	Exponentiële functies	C5	B1	B1, C2	B1
4	Een boom op het plein	Combinatoriek	B3	A3	B2	A3
5	Chemisch afval	Gebroken vergelijkingen	—	B1, B2	C2	B5
6	Ondernemer	Optimaliseren	C3, D1	D3, D4	C2, D3	B3, C1
7	Pensioenwijzer	Exponentiële functies	B1, C5	A3, B1	B1, C2	B2
8	Kabeljauw in het nauw	Lineaire functies Procentrekenen	B1, C4	A3, B1	B1, C2	A3, B1
9	Vrije huren?	Lineaire functies Procentrekenen	B1, C4	A3, B1	B1, C2	A3, B1

Opgave 1 Frieten duurder door regen en kou

Bron: Concept nieuwe economie (SLO), Experimenteel lesprogramma vwo, *module 3: markt*.

Een zakje friet wordt duurder. In de oogsttijd van de aardappels was er veel regen. Veel aardappels bleven daardoor in de grond zitten en werden rot waardoor 20% van de oogst verloren ging. De fabrieken die aardappels verwerken tot producten, zoals voorgebakken friet, zagen het aanbod van aardappels daardoor dalen.
In figuur 1 (zie vraag d.) is het aanbod van fabrieksaardappels getekend bij een normale oogst. De vraag naar fabrieksaardappels van de aardappelverwerkende fabrieken wordt weergegeven door de volgende vraagfunctie: $Q_v = -2P + 180$.

Q_v = de totale vraag naar fabrieksaardappels in miljoenen kilogrammen

P = de prijs van fabrieksaardappels in eurocenten per kilogram

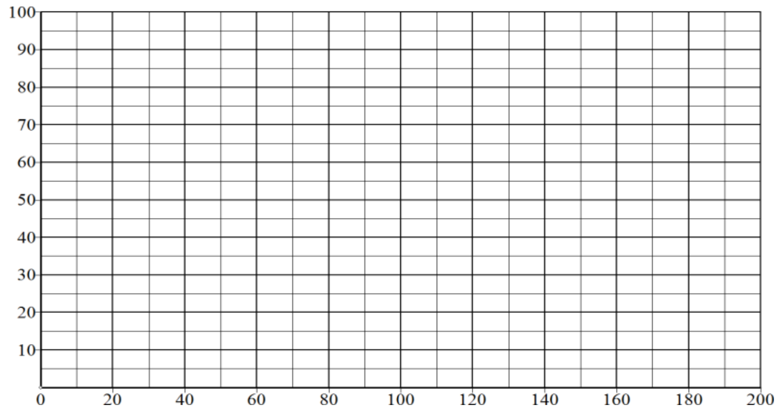
a. Vul onderstaande tabel in met behulp van bovenstaande vergelijking:

P (eurocenten per kg)	Q_v (miljoenen kg)
0	
10	
15	
30	
60	
90	

b. Leg uit dat de vraagfunctie alleen geldt voor P ≤ € 0,90 per kilogram.
c. Kan de vraag hoger worden dan 180 miljoen kilogram? Motiveer het antwoord.
d. Teken in figuur 1 de vraagcurve 1 van fabrieksaardappels. Maak hierbij gebruik van bovenstaande tabel.

Figuur 1 Aanbod in normale situatie

Prijs per kilogram fabrieksaardappels in eurocenten



Hoeveelheid fabrieksaardappels (x 1 miljoen kilogram)

e. Lees uit de grafiek af welke prijs op de markt ontstaat bij een normale oogst.
f. Bereken de procentuele stijging van de prijs die op de markt ontstaat door slechte oogst, als gevolg van regen.

Opgave 2 Procenten en procentpunten
Bron: Concept nieuwe economie (SLO), Experimenteel lesprogramma vwo, *module 4: Sparen en lenen*.

De dagbladen zijn er goed in. Als de VVD in een enquête weer eens is gestegen van 25% naar 27%, is steevast de conclusie dat de VVD zijn stemmenaantal met 2% heeft zien stijgen.
Of als Trichet van de ECB de rente verhoogt van 2,75% naar 3,0%: de rente is verhoogd met 0,25%, heet het dan. Hoewel het taalgebruik heel hardnekkig is, moeten we bij economie toch duidelijk afspreken dat een stijging van 25% naar 27% niet 2% is maar: (27-25)/25 × 100 = 8%.

Omdat het toch wel zinnig is de stijging van 25% naar 27% met twee punten zo te benoemen, kun je wél zeggen: de VVD-aanhang is met 2 procentpunten gestegen.
En de rente van Trichet is dan met 0,25 procentpunt (een kwart procentpunt) gestegen.

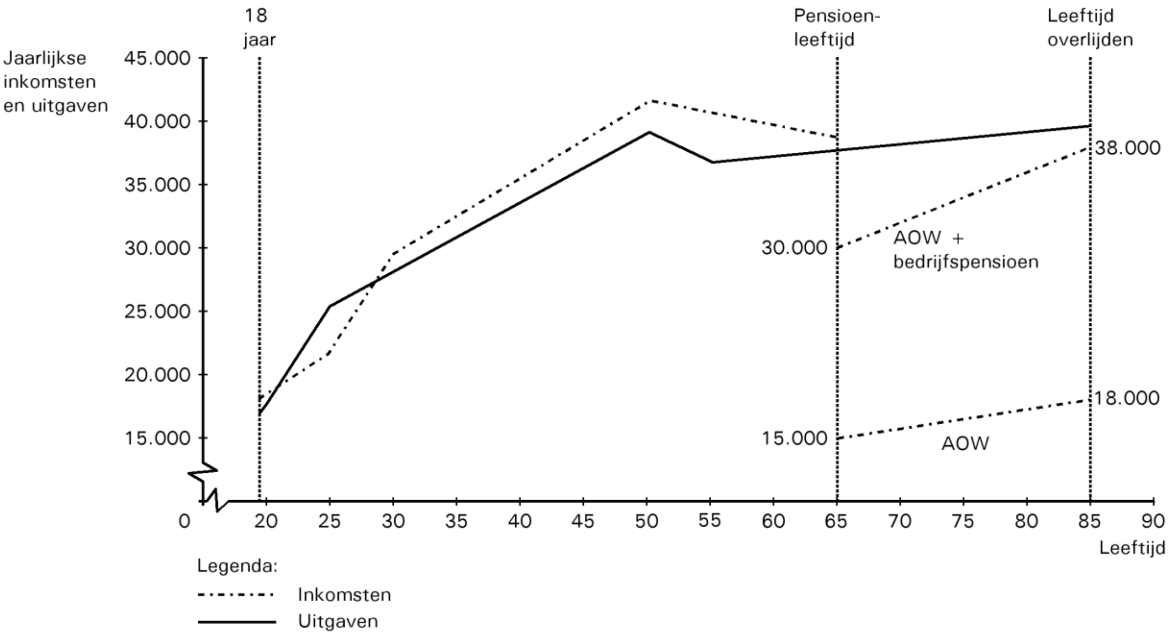
1.11
a. Een bedrijf ziet zijn omzetmarktaandeel stijgen van 15% naar 17,4%.
1) Met hoeveel procentpunten is het marktaandeel toegenomen?
2) Bereken met hoeveel procent het marktaandeel is toegenomen.

b. De bezettingsgraad van een land daalt in een bepaald jaar van 78% naar 77,5%.
1) Bereken met hoeveel procent de bezettingsgraad gedaald is.
2) Met hoeveel procentpunt is de bezettingsgraad gedaald?

c. De ECB verhoogt de rente met een half procentpunt tot 4%. Bereken met hoeveel procent de rente is gestegen.

Opgave 3 Levensloop
Bron: CSE Economie pilot, vwo 2010, tijdvak 1.

In een vwo-klas is gediscussieerd over het onderwerp financiële levensloop en de verschijnselen 'ruilen over de tijd' en 'menselijk kapitaal'. Diana vond dat zo interessant dat ze geprobeerd heeft haar eigen verwachte financiële levensloop schematisch in beeld te brengen (zie grafiek).



Voor het tekenen van de grafiek heeft Diana veel veronderstellingen moeten maken. Enkele daarvan staan hieronder:

- ze gaat na haar vwo-opleiding op haar 18de werken en blijft dat doen tot aan haar pensioen;
- bovenop de AOW ontvangt zij bedrijfspensioen van haar voormalige werkgever(s);
- omdat de grafiek ergens moet eindigen, neemt ze aan dat ze 85 jaar wordt;
- het gaat om haar netto-inkomsten per jaar (na afdracht pensioen- en AOW-premie) en de uitgaven die daarvan betaald moeten worden.

Diana is bij het tekenen van de grafiek de nodige problemen tegengekomen. Zo heeft ze zich bijvoorbeeld afgevraagd of ze − om tot een beter beeld te komen − ook voorraadgrootheden zou moeten opnemen. En of ze uit zou moeten gaan van een waardevast of misschien zelfs wel van een welvaartsvast pensioen. Daarbij rees dan weer de vraag van welke inflatie en inkomensontwikkeling ze zou moeten uitgaan.

1. Leg uit hoe in de grafiek het verschijnsel 'ruilen over de tijd' tot uitdrukking komt.

Diana heeft in de grafiek uitsluitend stroomgrootheden opgenomen.

2. Welke voorraadgrootheid had zij *op basis van de gegevens* in de grafiek kunnen opnemen? Verklaar het antwoord.

Stel dat Diana zou zijn uitgegaan van een jaarlijkse inflatie van 1,75% gedurende de gehele levensloop en een gemiddelde landelijke inkomensstijging van 2,25% per jaar.

3. Bereken of haar bedrijfspensioen dan waardevast genoemd kan worden.

Correctiemodel

1. Voorbeelden van een juist antwoord zijn:

− Een antwoord waaruit blijkt dat er in haar actieve periode soms meer inkomsten dan uitgaven zijn, zodat Diana dan kan sparen voor tijden dat het omgekeerde het geval is.

− Een antwoord waaruit blijkt dat Diana tijdens haar actieve periode pensioenpremies betaalt, waardoor na haar pensionering haar pensioenuitkeringen betaald kunnen worden.

2. Een voorbeeld van een juist antwoord is: ‘vermogen’.

Een voorbeeld van een juiste verklaring is:
een verklaring waaruit blijkt dat er vermogen wordt gevormd als Diana meer inkomsten dan uitgaven heeft / op vermogen wordt ingeteerd als Diana meer uitgaven dan inkomsten heeft.

Opmerking:
Een verwijzing naar pensioenen hier niet goed rekenen, aangezien het daarvoor gevormde vermogen niet uit de gegevens is af te leiden.

3. Een voorbeeld van een juiste berekening is:

Bij een waardevast pensioen had het bedrijfspensioen moeten groeien van € 15.000 tot minimaal
€ 15.000 × $1{,}0175^{20}$ = € 21.222 en het is maar gegroeid tot € 38.000 − € 18.000 = € 20.000.

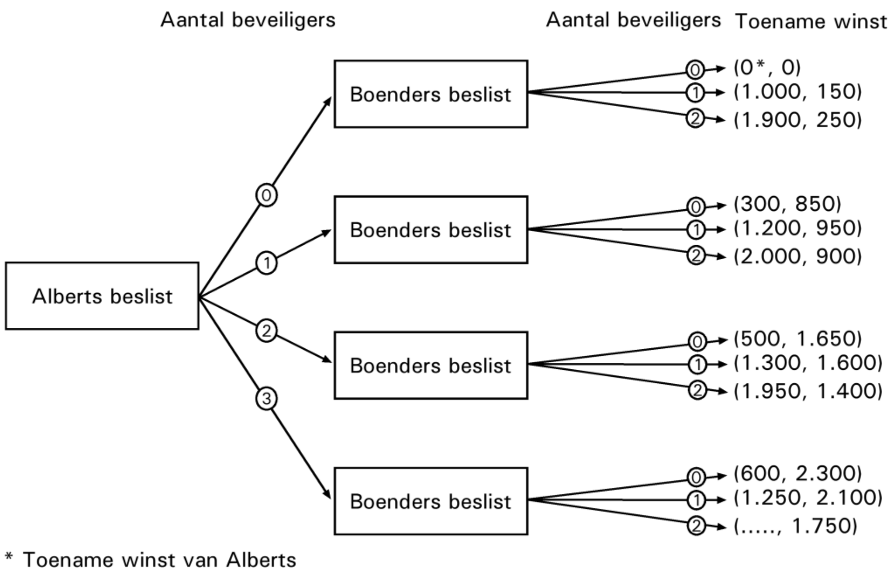
Opmerking:
Als het percentage 2,25 is gebruikt, 1 punt in mindering brengen.

Opgave 4 Een boom op het plein
Bron: CSE Economie pilot, vwo 2010, tijdvak 2.

Rond een plein zijn drie winkels gevestigd. Soms wordt er 's nachts in deze winkels ingebroken. Een beveiligingsbedrijf speelt hierop in en heeft de drie winkeliers een offerte gestuurd voor het bewaken van het plein gedurende de nacht. Beveiliging kan worden ingehuurd voor € 700,- per maand per beveiliger. De beveiliger bewaakt, ongeacht welke winkelier hem heeft ingehuurd, het gehele plein. Een van de winkeliers, Alberts, heeft een inschatting gemaakt van het bedrag dat de winkeliers per maand zouden besparen op de kosten van de inbraak, indien het plein 's nachts bewaakt zou worden. Hij gaat ervan uit dat de twee andere winkeliers dezelfde inschatting maken. In de tabel die hij heeft gemaakt, wordt de marginale kostenbesparing weergegeven bij de inzet van steeds één beveiliger extra.

bij de inzet van de	marginale kosten-besparing Alberts	marginale kosten-besparing Boenders	marginale kosten-besparing Carant
1ste beveiliger	1.000	850	200
2de beveiliger	900	800	150
3de beveiliger	800	650	100
4de beveiliger	650	500	0
5de beveiliger	500	350	0
6de beveiliger	300	150	0

Alberts wil als eerste een beslissing nemen en verwacht dat Boenders daarna beslist. Dit levert de volgende beslissingsboom op waarbij de beslissingen van Carant niet zijn weergegeven.



De drie winkeliers in deze opgave beschikken ten aanzien van deze beslissing over dezelfde informatie.

1. Leg aan de hand van de tabel uit waarom de beslissingen van Carant niet in de beslissingsboom zijn weergegeven.
2. Bereken de, in de beslissingsboom ontbrekende, toename van de winst van Alberts.
3. Leg met behulp van de beslissingsboom uit welk aantal beveiligers Alberts respectievelijk Boenders zal inhuren.

Opgave 5 Chemisch afval
Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 0, toepassing blz. 80.

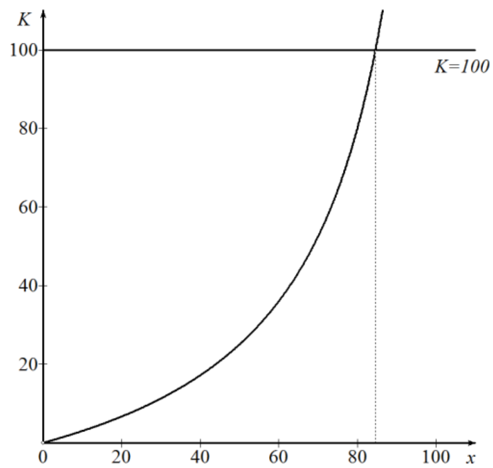
Bij een productieproces in een fabriek ontstaat jaarlijks een hoeveelheid chemisch afval. Een gedeelte hiervan wordt door derden afgevoerd; de rest wordt in eigen beheer verbrand. Voor de kosten K (in miljoenen euro's) om $x\%$ van het afval te laten afvoeren geldt:

$$K = \frac{30x}{110-x}.$$

Hoeveel procent kan de fabrikant laten afvoeren als hij hiervoor niet meer dan 100 miljoen euro over heeft?

Oplossing: (moderne variant)
Er geldt dan dat $K \le 100$.
We lossen eerst op $K = 100$, dus $\frac{30x}{110-x} = 100$

$$\leftrightarrow 30x = 100(110-x)$$
$$\leftrightarrow 130x = 11\,000$$
$$\leftrightarrow x \approx 84{,}6$$



Nu tekenen we, eventueel met de GR, de grafiek van K en de lijn $K = 100$.

De grafiek van K is alleen maar zinvol voor waarden van x waarvoor geldt: $0 \le x \le 100$

Uit de grafiek lezen we af dat $K \le 100$ als $0 \le x \le 84{,}6$

De fabrikant kan dus maximaal 84,6% van de chemische verontreiniging laten afvoeren voor die 100 miljoen euro.

Opgave 6 Ondernemer
Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 1, toetsopgave blz. 253.

Een ondernemer heeft de volgende gegevens ter beschikking:

$p = 120 - \frac{2}{3}q$

$c = \frac{1}{3}q^2 + 100$

Hierin is:
q = de totale hoeveelheid van een gefabriceerd product;
p = de verkoopprijs van één product;
c = het bedrag van de totale kosten.

Voor welke prijs is de winst maximaal? Hoe groot is q dan?

Opgave 7 Pensioenwijzer
Bron: CSE Economie pilot, vwo 2010, tijdvak 1.

In het industriële bedrijf Amocco zijn de werknemers volgens de collectieve arbeidsovereenkomst (cao) van Amocco verplicht deel te nemen aan de bedrijfspensioenregeling. In deze bedrijfspensioenregeling worden de pensioenen gefinancierd volgens het kapitaaldekkingstelsel.
…….
…….
…….

Een werkneemster van Amocco heeft een erfenis ontvangen en wil daarvan een bedrag rentedragend op de bank zetten. Dat bedrag moet zo groot zijn dat er bij haar pensionering over 35 jaar € 100.000 op de bank staat. Zij houdt rekening met een jaarlijkse inflatie van 2,1% en een jaarlijkse reële inkomensgroei van 1,9%. Ze vindt een bank die een rente geeft die precies hoog genoeg is om haar spaargeld gedurende die 35 jaar welvaartsvast te houden. De werkneemster moet dan € 25.341,55 op de bank zetten. Stel echter dat de bank na precies 10 jaar de rente vaststelt op 3% voor de rest van de looptijd.

Bereken het bedrag dat de werkneemster na 10 jaar moet bijstorten om bij haar pensionering €100.000 op de bank te hebben staan.

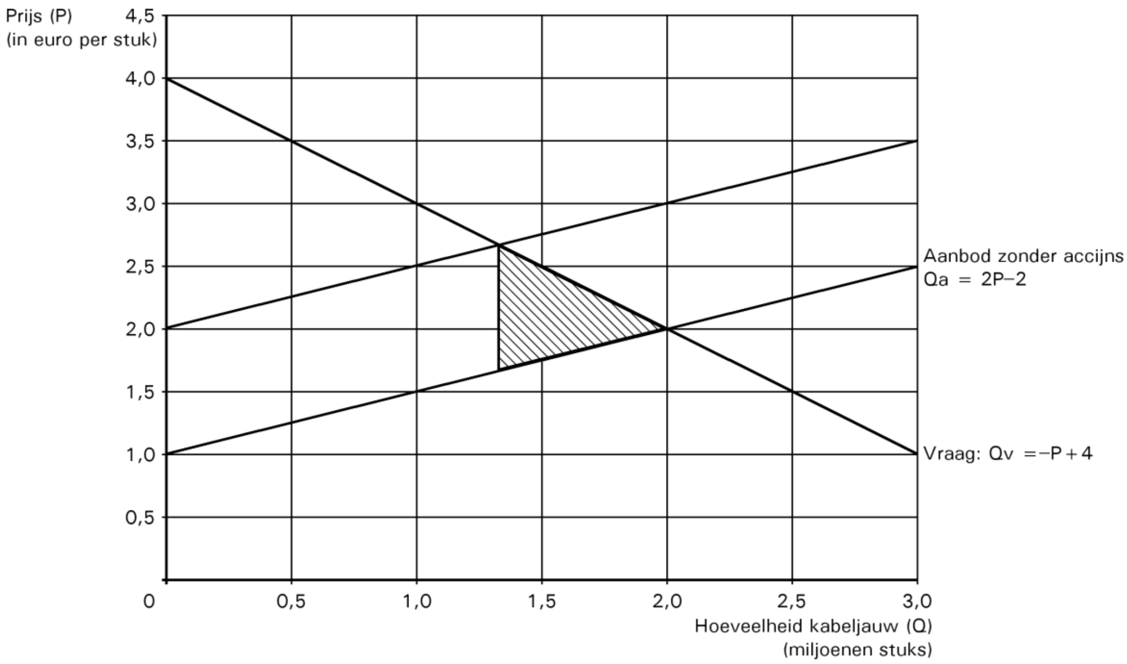
Correctiemodel

Een voorbeeld van een juiste berekening is:

- rente eerste 10 jaar: $1{,}021\, x\, 1{,}019 = 1{,}0404 \quad \rightarrow 4\%$
  beschikbaar over 10 jaar: $€\ 25.341{,}55 \cdot 1{,}04^{10} = €\ 37.511{,}68$
- benodigd bedrag over 10 jaar: $\dfrac{100.000}{1{,}03^{25}} = €\ 47.760{,}56$
- bijstorten $€\ 47.760{,}56 - €\ 37.511{,}68 = €10.248{,}88$

Opgave 8 Kabeljauw in het nauw
Bron: CSE Economie pilot, vwo 2010, tijdvak 1.

Door langdurige overbevissing is kabeljauw een van de meest bedreigde vissoorten in Europa geworden. Daardoor wordt niet alleen het voortbestaan van de kabeljauw ernstig bedreigd, maar ook dat van veel andere vissoorten. Verschillende deskundigen waarschuwen dat daardoor het biologisch evenwicht in de oceanen ernstig verstoord dreigt te raken. De Europese autoriteiten willen dat proberen te voorkomen en vragen aan een panel van deskundigen een advies.
De economen in dat panel stellen voor het marktmechanisme een deel van het werk te laten doen. Door het instellen van een accijns op kabeljauw zal volgens hen de overbevissing worden afgeremd. Zij illustreren hun voorstel met de onderstaande figuur.



[……]
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid gevangen kabeljauw afneemt als het voorstel van de economen wordt uitgevoerd.

Correctiemodel

3. Een voorbeeld van een juiste berekening is:

(1) • aanbodlijn met accijns: $Q_a = 2P - 4$

(1) • nieuwe evenwichtsprijs: $2P - 4 = -P + 4 \rightarrow P = 2{,}67$

(1) • nieuwe evenwichtshoeveelheid: $-2{,}67 + 4 = 1{,}33$

(1) • procentuele afname $\frac{2-1{,}33}{2} \cdot 100\% = 33{,}5\%$

Opmerkingen:

- *Als de nieuwe hoeveelheid niet is berekend maar op basis van de figuur is geschat, voor een juiste schatting 1 punt toekennen. De maximumscore wordt dan 2. Een juiste schatting ligt tussen 1,3 en 1,4.*
- *Als de nieuwe hoeveelheid berekend is via de aanbodlijn levert dat door afrondingsverschillen 1,34 op en een afname van 33%.*

Opgave 9 Vrije huren?
Bron: CSE Economie pilot, vwo 2011, tijdvak 1.

In een land is een tekort aan huurwoningen. Om de huurquote (huur in procenten van het inkomen) voor mensen met lage inkomens aanvaardbaar te houden, reguleert de overheid in dit land de markt voor huurwoningen. Daartoe zijn de onderstaande maatregelen genomen:

- alle huurwoningen worden verhuurd door niet-commerciële instellingen;
- de overheid stelt de maximumhuur vast;
- alle huurders ontvangen een huursubsidie in de vorm van een vast bedrag.

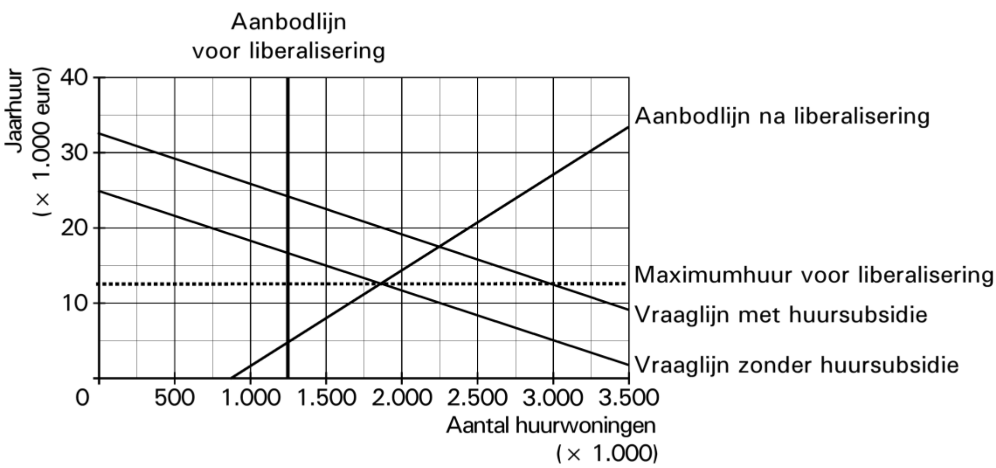
Drie onderzoekers Jans, Vries en Timmer hebben de markt voor huurwoningen in dit land geanalyseerd en bespreken enkele bevindingen.

− Jans stelt dat de overheid het tekort aan huurwoningen zelf veroorzaakt. Zij vindt dat de markt voor huurwoningen moet worden geliberaliseerd: de verhuur moet op commerciële basis plaatsvinden en de maximumhuur en de huursubsidie moeten worden afgeschaft. Met de onderstaande figuur brengt zij de gevolgen van deze liberalisering in beeld.

− Vries zegt dat de door Jans voorgestelde liberalisering ertoe leidt dat de omvang van de welvaart van de huurders, gemeten als consumentensurplus, afneemt. Hij wil wel liberaliseren maar daarbij de huursubsidie handhaven.

− Timmer reageert op Vries door te zeggen dat na de liberalisering de huursubsidie niet volledig ten goede komt aan de huurders doordat de huur stijgt.

Markt voor huurwoningen



[…]

2p 2. Hoe groot is bij overheidsregulering het tekort aan huurwoningen? Licht het antwoord toe en gebruik daarbij de gegeven cijfers.

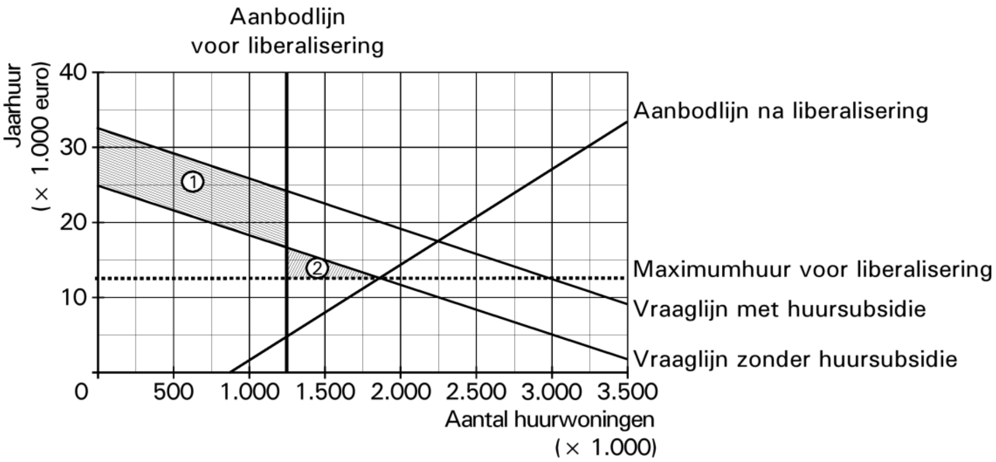
2p 3. Laat in de figuur op de bijlage met arcering de verandering van het consumentensurplus zien bij de door Jans voorgestelde liberalisering. Licht de arcering toe.

2p 4. Bereken − bij liberalisering maar met behoud van huursubsidie. − hoeveel procent van de huursubsidie volgens Timmer niet ten goede komt aan de huurders doordat de huur stijgt.

Correctiemodel

(2) 2. 1.750.000.
Een voorbeeld van een juiste toelichting is:
Een toelichting waaruit blijkt dat bij maximale huur en huursubsidie de gevraagde hoeveelheid 3.000.000 bedraagt bij een aangeboden hoeveelheid van 1.250.000.

(2) 3. Een voorbeeld van een juiste arcering is:



Een voorbeeld van een juiste toelichting is:
Een toelichting waaruit blijkt dat het consumentensurplus afneemt met vlak 1 en toeneemt met vlak 2.

(2) 4. Een voorbeeld van een juiste berekening is:
huur bij volledige liberalisering: € 12.500
huur bij liberalisering met huursubsidie: € 17.500
huursubsidie: € 7.500
van de subsidie gaat $\frac{€\,17.500 - €12.500}{€\,7.500} \cdot 100\% = 66{,}7\%$ verloren

Literatuur

Boersma, K., Bulte, A., Krüger, J., Pieters, M., & Seller, F. (2011). *Samenhang in het natuurwetenschappelijk onderwijs voor havo en vwo.* Utrecht: Stichting Innovatie van Onderwijs in Bètawetenschappen en Technologie (IOBT).

Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs (2007). *Rijk aan betekenis*, Utrecht: cTWO.

COMPASS (2011). *Samenhang tussen de bètavakken in Europees perspectief*, Compass-project.

Krüger, J., Paus, J., & Zwaart, P. van der (2005). *Samenhangend onderwijs voor wiskunde en natuurkunde*, Enschede: SLO.

Roorda, G., & Streun, A. van (2002). *Criteria voor samenhangend (wiskunde)onderwijs*. In J.F. Deinum, J. van Maanen, A. van Streun & J. Tolboom (red.). *Werken aan de kwaliteit van het onderwijs in de bètavakken*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen, UCLO.

Roorda, G. (2012). *Ontwikkeling in verandering. Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide*. (Proefschrift, Rijksuniversiteit Groningen). Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Vos, P., Braber, N.S. den., Roorda G., & Goedhart, M.J., (2010). *Hoe begrijpen en gebruiken docenten van de schoolvakken natuurkunde, scheikunde en economie het wiskundige concept 'afgeleide'*? Tijdschrift voor Didactiek der Bètawetenschappen, 27, 37-62.

Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde. (2007). *Eindverslag van Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde aan Vernieuwingscommissies Wiskunde* (cTWO) *en Natuurkunde* (NiNa). Rapport. Utrecht: WAWN.

Bijlagen

In de volgende bijlagen vindt u overzichten van de mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en bètavakken (en economie). De voorbeelden zijn gekoppeld aan de (sub)domeinen van de wiskunde examenprogramma's (voor havo a/b en vwo a/b). Deze overzichten bieden aanknopingspunten om samenhang en afstemming vorm te geven. Er is uitgegaan van de (concept)examenprogramma's wiskunde (start 2015), de examenprogramma's natuurkunde, scheikunde, biologie (OCW, juli 2011) en de examenprogramma's voor economie (start 2012).

De volgende overzichten zijn opgenomen:

Bijlage 1 havo wiskunde en natuurkunde
Bijlage 2 vwo wiskunde en natuurkunde
Bijlage 3 havo wiskunde en economie
Bijlage 4 vwo wiskunde en economie
Bijlage 5 havo wiskunde en scheikunde
Bijlage 6 vwo wiskunde en scheikunde
Bijlage 7 havo wiskunde en biologie
Bijlage 8 vwo wiskunde en biologie

Bijlage 1 – havo wiskunde en natuurkunde

In de laatste kolom staan verwijzingen naar het examenprogramma natuurkunde (advies OCW, juli 2011).

havo wiskunde A en natuurkunde

Domein examenprogramma wiskunde A	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en natuurkunde**	***Domein examenprogramma natuurkunde***
Domein B Algebra en tellen		
B1 Rekenen	• Rekenen met decimale getallen, betekenis van significantie en eenheden in natuurkunde-contexten (geen exacte waarden).	
B2 Algebra	• Omzetten (vrijmaken) van variabelen. In de formulebladen uit de natuurkundesyllabi staan voorbeelden van formules waarbij geoefend kan worden in het omzetten (vrijmaken) van variabelen.	
B3 Telproblemen		
Domein C Verbanden		
C1 Tabellen		
C2 Grafieken vergelijkingen en ongelijkheden	• Grafieken tekenen, aflezen, schalen bepalen, interpoleren, ongelijkheden op te lossen (bijvoorbeeld bij s-t, v-t en p-V tabellen en diagrammen)	• Domein C: Beweging en energie o C1: Kracht en beweging • Domein D: Materialen o D1: Eigenschappen van stoffen en materialen
C3 Formules met 1 variabele	• Zie ook onder B2 • Meer uitgewerkte contexten zijn te vinden bij de onderwerpen: o mechanica, (eenparige) beweging o kracht en massa o hefbomen o slingerformule	• Domein C: Beweging en energie o C1: Kracht en beweging • Domein B: Beeld- en geluidstechniek o B1: Informatieoverdracht
C4 Lineaire verbanden	• Redeneren, herkennen en gebruiken van evenredige, omgekeerd evenredige verbanden uit de natuurkunde (“hoeveel verandert y als x met … verandert?”). (Voldoende voorbeelden binnen de natuurkunde)	
C5 Exponentiële verbanden	• Berekenen van halveringstijden (i.c. deze numeriek uit een gegeven (fysisch) exponentieel verband berekenen.	• Domein B: Beeld- en geluidstechniek o B2: Medische beeldvorming
Domein D Veranderingen		

D1 Helling	• Binnen de natuurkunde zijn voldoende voorbeelden voorhanden om toe- en afnames m.b.v. wiskundig instrumentarium toe te lichten in termen van bijna alle beschreven eindtermen D1. • Contexten waarbij steilheid of helling een rol speelt (niet het begrip richtingscoëfficiënt).	
Domein E Statistiek en kansrekening		
E1 Presentatie van statistische data interpreteren		
E2 Statistische data verwerken		
E3 Data en kansen		
E4 Data-analyse		

havo wiskunde B en natuurkunde

Domein examenprogramma wiskunde B	Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en natuurkunde	*Domein examenprogramma natuurkunde*
Domein B Functies, grafieken en vergelijkingen		
B1 Standaardfuncties	• Begrip (on)afhankelijke variabele in natuurkundige context toepassen, dus niet alleen het x,y-verband, maar juist met de fysische symbolen. • Bij goniometrische functies meer aandacht bij wiskunde voor definities en voor praktisch gebruik van sin-, cos- en tan-waarden in fysische contexten. • Aandacht voor “translatie van grafieken” m.b.t. faseverschuivingen in fysische processen. • Verband tussen grenshoek en brekingsindex.	• Domein B: Beeld- en geluidstechniek ○ B1: Informatie-overdracht • Domein D: Materialen ○ D1: Eigenschappen van stoffen en materialen
B2 Vergelijkingen en ongelijkheden	• (Numerieke) berekeningen met beginwaarden, groeifactoren, groeipercentages, halverings- en verdubbelingstijd uit het fysicaprogramma. • Manipulaties met de lenzenformule • Zie de formules uit de syllabus natuurkunde, ook m.b.t. B3.	• Domein B: Beeld- en geluidstechniek ○ B2: Medische beeldvorming ○ B3[15]: Optica (keuze subdomein)
B3 Evenredigheden	• Evenredigheid en omgekeerd	• Domein D: Materialen

[15] Keuze(sub)domein, voor havo: twee kiezen uit B3, E2, F en G2

	evenredigheden, inclusief de omzetting van pV=c naar p=c/V. • Evenredigheden met machten.	○ D1: Eigenschappen van stoffen en materialen
B4 Periodieke functies	• Alleen grafische en kwalitatieve toepassing mogelijk. • Aandacht voor begrip radiaal als aanvulling op het wiskundig gradengebruik op havo. • Bij eerdere behandeling van periodieke functies op havo (bij wiskunde) wellicht meer kwantitatief gebruik in fysica mogelijk.	• Domein B: Beeld- en geluidstechniek ○ B1: Informatieover-dracht
Domein C Meetkundige berekeningen		
C1 Afstanden en hoeken in concrete situatie	• Ontbinden van krachten.	
C2 Analytische methoden		
C3 Vectorrekening		• Domein C: Beweging en energie ○ C1: Kracht en beweging
Domein D Toegepaste analyse		
D1 Veranderingen	• Het differentiequotiënt kent nuttige fysische toepassingen, bijv. in s-t en v-t diagrammen. • Naast veranderingen in (naar) de tijd ook bij andere onafhankelijke (fysische) grootheden de veranderingen berekenen.	• Domein C: Beweging en energie ○ C1: Kracht en beweging • Domein D: Materialen ○ D1: Eigenschappen van stoffen en materialen
D2/3 Afgeleide functies en bepaling ervan	• Contexten waarbij steilheid of helling een rol speelt (niet het dimensieloze begrip richtingscoëfficiënt) • Er is niet altijd een “netjes” wiskundig functievoorschrift voorhanden om de afgeleide “exact” te vinden in het VO-natuurkundeprogramma, maar mogelijk wel te leveren vanuit natuurkunde.	• Domein C: Beweging en energie ○ C1: Kracht en beweging
D4 Toepassingen afgeleide functie	• Aandacht voor goede vertaling/toepassing van het begrip “rate of change” in de wiskunde. • Snelheidsgrafiek kwalitatief afleiden van de plaatsgrafiek; kan in de wiskunde als illustratie dienen. • Het bepalen van minimale en maximale waarden in fysische processen.	• Domein C: Beweging en energie ○ C1: Kracht en beweging

Bijlage 2 – vwo wiskunde en natuurkunde

vwo wiskunde A en natuurkunde

Domein examenprogramma wiskunde A	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en natuurkunde**	***Domein examenprogramma natuurkunde***
Domein B Algebra en tellen		
B1 Algebra	• (Aandacht voor) het werken met decimale getallen, significantie, onnauwkeurigheden en vermelding van de (juiste) eenheden in (natuurkunde-)toepassingen. • Uit een gegeven exponentieel verband de halveringstijd bepalen.	• Domein B: Golven ○ B1: Informatieover-dracht ○ B2: Medische beeldvorming
B2 Telproblemen		
Domein C Verbanden		
C1 Standaardfuncties	• Ook: ${}^{g}\log(x)$, e^{x} en $\ln(x)$. • Met standaardfuncties ook algebraïsch kunnen werken en niet alleen met de GR.	• Domein B: Golven ○ B1: Informatieover-dracht • Domein E: Straling en materie ○ E3*: Kern- en deeltjesproces-sen
C2 Functies, grafieken en (on)gelijkheden	• Diverse typen van evenredige en omgekeerd evenredige, lineaire, kwadratische en wortel-verbanden, zie daarvoor de formulebladen uit de syllabi natuurkunde. • pV=c snel kunnen omzetten naar p=c/V. • Diverse toepassingen te vinden bij: mechanica, kracht en massa, hefbomen, trillingen en slingerformule. • Toepassingen waarbij (bijv.) de vergelijking $y = kx^2$ grafisch als een rechte wordt voorgesteld door y tegen x^2 uit te zetten. • Het vertalen van grafieken naar formules.	• Domein B: Golven ○ B1: Informatieover-dracht • Domein C: Beweging en wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging • Domein E*: Straling en materie ○ E1: Eigenschappen van stoffen en materialen
Domein D Veranderingen		
D1 Rijen		
D2 Helling	• Contexten waarbij steilheid of helling een rol spelen (niet het begrip richtingscoëfficiënt).	• Domein C: Beweging en wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging
D3 Afgeleide	• Dynamische modellen uit de	• Domein C: Beweging en

* Keuze (sub)domein: voor vwo: twee kiezen uit E3, F2, G1 en G2

	natuurkunde kunnen het gebruik van het begrip afgeleide verhelderen; gebruik bijv. Powersim of Coach. • Grafisch bepalen van de raaklijn aan een kromme binnen een natuurkundige context. • Voorbeelden uit natuurkunde over gemiddelde, relatieve veranderingen bij de introductie van differentiequotiënten. • Waar mogelijk de discrete aanpak van fysische processen laten zien a.d.h.v. differentiëren.	wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging • Domein B: Golven ○ B2: Medische beeldvorming
Domein E Statistiek en kansrekening		
E1 Probleemstelling en onderzoeksontwerp		
E2 Visualisatie van data	• Het (wiskundig) verwerken van fysische meetresultaten in grafieken en statistieken.	
E3 Kwantificering	• Analyseren en verwerken van meetresultaten, bijvoorbeeld met Coach.	
E4 Kansbegrip		
E5 Kansverdelingen		• Domein F: Quantumwereld en relativiteit ○ F2*: Relativiteitstheo-rie • Domein G: Leven en aarde ○ G1*: Biofysica ○ G2*: Geofysica
E6 Verklarende statistiek	• Mogelijk dat het thema 'Natuur en Klimaat' zich leent voor gezamenlijke Profielwerkstukken of wiskunde schoolexamens.	
Domein F Keuzeonderwerpen		

vwo wiskunde B en natuurkunde

Domein examenprogramma wiskunde B	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en natuurkunde**	***Domein examenprogramma natuurkunde***
Domein B Functies, formules en grafieken	***Dit domein(B) heeft raakvlakken met alle natuurkundedomeinen!***	
B1 Formules en functies	• Verbanden/formules m.b.t. mechanica, eenparige beweging, kracht en massa, hefbomen, slingerformule, C-14 methoden, dikte van een muur bij stralingsbronnen etc. (zie ook de formules uit de syllabus natuurkunde) • (Omgekeerd) evenredige en -kwadratische verbanden, wortelvormen (slingertijd); en dan de vraag: hoeveel verandert y als x met … verandert?	• Domein B: Golven ○ B1: Informatieover-dracht ○ B2: Medische beeldvorming
B2 Standaardfuncties	• Kwalitatieve en grafische toepassingen van harmonische bewegingen kunnen in de wiskunde worden versterkt door exactere berekeningen. • Eigenschappen van golven.	• Domein B: Golven ○ B1: Informatieover-dracht ○ B2: Medische beeldvorming • Domein E: Straling en materie ○ E3*: Kern- en deeltjesproces-sen
B3 Functies en grafieken	• Coördinatentransformaties komen in de natuurkunde voor ($y = kx^2$ uitzetten als rechte lijn). • Vormen van grafieken kunnen voorspellen a.d.h.v. het functievoorschrift en omgekeerd.	• Domein B: Golven ○ B1: Informatieover-dracht ○ B2: Medische beeldvorming
B4 Inverse functie		
B5 Vergelijkingen en ongelijkheden		
B6 Asymptoten en limietgedrag van asymptoten	• Snelheid van een vallende parachutist (eigenlijk geen asymptoot in wiskundige zin); radioactief verval.	• Domein C: Beweging en wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging • Domein B: Golven ○ B2: Medische beeldvorming
Domein C Differentiaal en integraalrekening		
C1/2 Afgeleide functie en techniek voor het differentiëren	• Snelheidsgrafiek kwalitatief afleiden van de plaatsgrafiek; kan in de wiskunde als illustratie dienen en kan opmaat zijn voor v = ds/dt en a = dv/dt. • Radioactief verval. • Binnen wiskunde liggen mogelijkheden om de herkomst van fysische formules	• Domein C: Beweging en wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging • Domein B: Golven ○ B2: Medische beeldvorming

	en wetmatigheden wiskundig te onderbouwen en toe te lichten. • Afstemming van diversiteit aan begrippen rond ‘afgeleide’.	
C3 Integraalrekening	• Bepaalde integraal wordt in de fysica (arbeid, beweging) bepaald door oppervlakteschattingen. In klas 6 vwo zijn er relevante toepassingen van bepaalde integralen te geven. (voor de natuurkunde zelf is eerdere eenvoudige behandeling in 4/5 van groot belang) • Gezamenlijk onderwijs in en gebruik van numerieke methoden is te overwegen.	
D. Goniometrische functies		
E. Meetkunde met coördinaten		
E1 Meetkundige vaardigheden	• Ontbinden en samenstellen van krachten uit een tekening. • Inhouden en oppervlakten van meetkundige ruimtefiguren.	• Domein C: Beweging en wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging
E2 Algebraïsche methoden en vlakke meetkunde	• Gebruik van sin, cos en tan in natuurkundige context, vaak ontbinden of projecties van grootheden langs één as.	• Domein C: Beweging en wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging
E3 Vectoren en inproduct	• Ontbinden en samenstellen van krachten m.b.v. vectoren en/of coördinaten.	• Domein C: Beweging en wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging
E4 Toepassingen		• Domein C: Beweging en wisselwerking ○ C1: Kracht en beweging ○ C3: Gravitatie

Bijlage 3 – havo wiskunde en economie

Overzicht van mogelijkheden tot samenhang tussen wiskunde en economie, uitgaande van de subdomeinen van de verschillende wiskundevakken.

havo wiskunde A en economie

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en economie**
Domein B Algebra en tellen	
B1 Rekenen	• Basisrekenvaardigheden toepassen op economische relaties (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen). • Positieve en negatieve getallen/breuken/decimalen. • Procenten en promillen. • Onderscheid procentuele mutatie en procentpunt verandering. • Verhoudingen en schattingen. • Toepassingen: wisselkoersberekening. • Werken met grote getallen: miljoenen, miljarden. • Rekenen met verhoudingen, bijv. indexcijfers: partieel, samengesteld (gewogen) en het basisjaar verleggen.
B2 Algebra	
B3 Telproblemen	• Telproblemen structureren en schematiseren.
Domein C Verbanden	
C1 Tabellen	
C2 Grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden	• Werken met assenstelsels (x en y) en kwadranten. • Vraag- en aanbodfuncties zowel rekenkundig als grafisch kunnen weergeven. Alleen lineair. • Informatie uit grafieken interpreteren en analyseren. • Transformeren (manipuleren) van lineaire functies. • Horizontale aggregatie van functies. • Berekenen van het break-even-punt.
C3 Formules met 1 variabele	• Werken met eerstegraadsvergelijkingen. • Oplossen van een stelsel van vergelijkingen via substitutie.
C4 Lineaire verbanden	• Werken met lineaire verbanden. • Oplossen van een lineaire vergelijking.
C5 Exponentiële verbanden	• Werken met exponentiële verbanden bijv. eindwaarde-berekening van een rente (alleen op schoolexamen, mogelijkerwijs).
Domein D Veranderingen	
D1 Helling	• Toename/afname, stijging/daling.
Domein E Statistiek en kansrekening	
E1 Presentatie van statistische data interpreteren	• Rijen/kolommen, indeling in klassen (decielen e.d.), cumuleren.
E2 Statistische data verwerken	• Gemiddeldes: gewogen en ongewogen.
E3 Data en kansen	• Eenvoudige kansberekening (risicoberekening bij verzekering).
E4 Data-analyse	

havo wiskunde B en economie

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en economie**
Domein B Functies, grafieken en vergelijkingen	
B1 Standaardfuncties	• Lineaire functies en exponentiële functies (bij berekening van eindwaarde rente). • Transformeren van functies. • Aangeven wat de autonome en wat de geïnduceerde grootheden zijn in een functie.
B2 Vergelijkingen en ongelijkheden	• Oplossen van vergelijkingen. • Oplossen van stelsel van vergelijkingen via substitutie.
B3 Evenredigheden	• Fishervergelijking (MV = PT). • Inkomen = productie. • Som van de inkomens = som van de toegevoegde waarden.
B4 Periodieke functies	
Domein C Meetkundige berekeningen	
C1 Afstanden en hoeken in concrete situatie	
C2 Analytische methoden	• Methode van de best respons bij pay-off matrices (vinden van een Nash-evenwicht).
C3 Vectorrekening	
Domein D Toegepaste analyse	
D1 Veranderingen	• Toenemende/afnemende stijging/daling.
D2/3 Afgeleide functies en bepaling ervan	
D4 Toepassingen afgeleide functie	• Techniek van differentiëren van functies kunnen toepassen bijv. bij marginale kostenfunctie. (schoolexamen, keuzeonderwerp).

Bijlage 4 – vwo wiskunde en economie

vwo wiskunde A en economie

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en economie**
Domein B Algebra en tellen	
B1 Algebra	• Het schatten, benaderen van grootheden. • Onderscheid autonome en geïnduceerde grootheden. • Omwerken van (lineaire) formules. • Als uitkomst gegeven is dan terugrekenen wat de inputgetallen zijn. • Basisrekenvaardigheden toepassen op economische relaties. (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen). • Positieve en negatieve getallen/breuken/decimalen. • Procenten en promillen. • Onderscheid procentuele mutatie en procentpunt verandering. • Verhoudingen en schattingen. • Toepassingen: wisselkoersberekening. • Werken met grote getallen: miljoenen, miljarden. • Onderscheid autonome en geïnduceerde grootheden.
B2 Telproblemen	• Beslissingsboom.
Domein C Verbanden	
C1 Standaardfuncties	• Werken met lineaire verbanden. • Werken met exponentiële verbanden bijv. eindwaarde-berekening van een rente (alleen op schoolexamen, mogelijkerwijs).
C2 Functies, grafieken en (on)gelijkheden	• Informatie uit grafieken interpreteren en analyseren. • Werken met assenstelsel (x en y) en kwadranten. • Transformeren (manipuleren) van lineaire functies. • Horizontale aggregatie van functies. • Lineaire vergelijkingen oplossen: bijvoorbeeld Break-even-punt. • MO = MK voor maximale winst. • MV = PT verkeersvergelijking van Fisher. • Evenredigheid en omgekeerd evenredigheid gebruiken. • Gebruik van vraag- en aanbodfuncties. • Grafische voorstellingen kritisch beoordelen.
Domein D Veranderingen	
D1 Rijen	
D2 Helling	• Toenemende/afnemende stijging/daling.
D3 Afgeleide	• Techniek van differentiëren van functies kunnen toepassen bijv. bij marginale kostenfunctie (schoolexamen, keuzeonderwerp).
Domein E Statistiek en Kansrekening	
E1 Probleemstelling en onderzoeksontwerp	
E2 Visualisatie van data	• Gebruik van staaf- en cirkeldiagrammen.
E3 Kwantificering	• Gemiddeldes: gewogen en ongewogen.
E4 Kansbegrip	• Bij onderwerp verzekeren eenvoudige kansberekeningen.
E5 Kansverdelingen	
E6 Verklarende statistiek	

vwo wiskunde B en economie

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en economie**
Domein B Functies, formules en grafieken	
B1 Formules en functies	• Vraag- en aanbodfuncties zowel rekenkundig als grafisch kunnen weergeven. • Elasticiteitsformules, formules m.b.t. arbeidsinkomensquote en ruilvoet kunnen toepassen.
B2 Standaardfuncties	• Werken met lineaire functies. • Exponentiële functies gebruiken bij de berekening van de eindwaarde van een rente.
B3 Functies en grafieken	• Werken met assenstelsel (X en Y) en kwadranten. • Informatie uit grafieken interpreteren en analyseren. • Transformeren (manipuleren) van functies. • Horizontale aggregatie van functies.
B4 Inverse functie	
B5 Vergelijkingen en ongelijkheden	• Werken met eerstegraadsvergelijkingen. • Oplossen van stelsel van vergelijkingen via substitutie.
B6 Asymptoten en limietgedrag van asymptoten	
Domein C Differentiaal en integraalrekening	
C1/2 Afgeleide functie en techniek voor het differentiëren	• Differentiëren, alleen eerste afgeleide bij veeltermfuncties met één variabele (schoolexamen, keuzeonderwerp). • Techniek van differentiëren van functies kunnen toepassen bijv. bij marginale kostenfunctie (schoolexamen, keuzeonderwerp).
C3 Integraalrekening	
D. Goniometrische functies	
E. Meetkunde met coördinaten	
E1 Meetkundige vaardigheden	• Arceren van oppervlakten en berekenen van oppervlakten om het consumentensurplus en het producentensurplus aan te geven.
E2 Algebraïsche methoden en vlakke meetkunde	
E3 Vectoren en inproduct	
E4 Toepassingen	

Bijlage 5 – havo wiskunde en scheikunde

Overzicht van mogelijkheden tot samenhang tussen wiskunde en scheikunde, uitgaande van de subdomeinen van de verschillende wiskundevakken.

havo wiskunde A en scheikunde

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en scheikunde**
Domein B Algebra en tellen	
B1 Rekenen	• Werken met percentages en omgaan met eenheden en dimensies; omrekenen van bijv. kg/m^3 naar g/l; (i.c. omrekenen van binas-notaties); aandacht voor mol/(mol/l) = l e.d.
B2 Algebra	• Werken met negatieve machten van 10 en toepassen in expressies daarvan.
B3 Telproblemen	• Een mogelijk onderwerp is isomerie. • Aantal protonen, neutronen en elektronen in atomen.
Domein C Verbanden	
C1 Tabellen	• Temp.-tijd diagrammen, concentratieverloop, ordenen van meetresultaten zijn geschikt om (alle) onderwerpen uit dit subdomein van voorbeelden te voorzien.
C2 Grafieken vergelijkingen en ongelijkheden	• Grafieken kunnen 'lezen' gericht op het grafisch verloop en de trends, maar wel formuleloos. • Globaal grafieken uit meetresultaten schetsen en ermee redeneren, mogelijk classificeren.
C3 Formules met 1 variabele	
C4 Lineaire verbanden	• Alleen lineaire vergelijkingen, zoals bij ijklijnen en hardheid van water (eventuele stelsels) (Y = aX + b met veeltal b= 0).
C5 Exponentiële verbanden	• Komt voor bij omzetting van stoffen.
Domein D Veranderingen	
D1 Helling	
Domein E Statistiek en kansrekening	
E1 Presentatie van statistische data interpreteren	
E2 Statistische data verwerken	
E3 Data en kansen	
E4 Data-analyse	

havo wiskunde B en scheikunde

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en scheikunde**
Domein B Functies, grafieken en vergelijkingen	
B1 Standaardfuncties	• Functiebegrip wordt in de scheikunde gebruikt, hier dus contextvoorbeelden mogelijk. • Bij scheikundevoorbeelden aandacht voor gebruik van eenheden van de (on)afhankelijke variabelen.
B2 Vergelijkingen en ongelijkheden	• Alleen lineaire vergelijkingen, zoals bij ijklijnen en hardheid van water (eventuele stelsel) (Y = aX + b met veelal b= 0)
B3 Evenredigheden	
B4 Periodieke functies	
Domein C Meetkundige berekeningen	
C1 Afstanden en hoeken in concrete situatie	
C2 Analytische methoden	
C3 Vectorrekening	
Domein D Toegepaste analyse	
D1 Veranderingen	• Inzicht in de toe- of afname van een verandering in chemische processen.
D2/3 Afgeleide functies en bepaling ervan	
D4 Toepassingen afgeleide functie	

Bijlage 6 – vwo wiskunde en scheikunde

vwo wiskunde A en scheikunde

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en scheikunde**
Domein B Algebra en tellen	
B1 Algebra	• Het werken met significant aantal decimalen; ook aandacht in de wiskundedeles voor afronden en afkappen van (meet)getallen. • Het werken met en het schatten van grootheden.
B2 Telproblemen	• Toepassingen te vinden bij isomerie en opbouw van eiwitten (permutaties). Zeer beperkt.
Domein C Verbanden	
C1 Standaardfuncties	• Logaritmische functies.
C2 Functies, grafieken en (on)gelijkheden	• M.u.v. de ongelijkheden zijn relevante toepassingen: verdunningen, extinctie (heel beperkt), evenwichten, lineaire verbanden bij colorometrie en ijklijnen, pH-. • Het kunnen oplossen van eerste- en tweedegraadsvergelijkingen.
Domein D Veranderingen	
D1 Rijen	
D2 Helling	
D3 Afgeleide	
Domein E Statistiek en Kansrekening	
E1 Probleemstelling en onderzoeksontwerp	
E2 Visualisatie van data	• Het (wiskundig) verwerken van meetgegevens uit scheikundige experimenten.
E3 Kwantificering	
E4 Kansbegrip	• Bij botsing(skans) van deeltjes, alleen kwalitatief.
E5 Kansverdelingen	
E6 Verklarende statistiek	
Domein F Keuzeonderwerpen	

vwo wiskunde B en scheikunde

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en scheikunde**
Domein B Functies, formules en grafieken	
B1 Formules en functies	• Het functiebegrip (relaties tussen onafhankelijke en afhankelijke grootheden) komt vaak voor in de scheikunde. • Bij pH-berekeningen domein en bereik kunnen vaststellen; werken met buffers. • Begrip (omgekeerd) evenredig (pV=RT).
B2 Standaardfuncties	• Lineaire functies (bij ijklijnen, colorometrie), kwadratische (bij evenwichten) en gebroken functies, logaritmische (bij pH en extinctie) en exponentiële functies. • Absolute waarde als afstand tussen punten op getallenrechte, bijvoorbeeld bij het bepalen van V_{bron} uit elektrodepotentialen.
B3 Functies en grafieken	• Globale grafiek (diagram) tekenen, interpreteren en erover redeneren.

B4 Inverse functie	• Bij definitie van pH (pKz) en ionenconcentraties.
B5 Vergelijkingen en ongelijkheden	• 1 vgl. met 1 onbekende (mengproblemen) en kwadratische vergelijkingen kunnen oplossen (evenwichten).
B6 Asymptoten en limietgedrag van asymptoten	• In scheikunde vooral kwantitatief; begrippen limiet en asymptoot wel belangrijk, bijv. in aflopende reacties of evenwichtsreacties.
Domein C Differentiaal en integraalrekening	
C1/2 Afgeleide functie en techniek voor het differentiëren	
C3 Integraalrekening	• Oppervlakte onder een grafiek is een maat voor de uitkomsten van gaschromatografen en massaspectrometers. Hierop zou in de toepassingen/voorbeelden in de wiskunde met het begrip bepaalde integraal kunnen worden doorgerekend, of in een PWS. Vaak alleen vergelijkend en dus niet kwantitatief.
D. Goniometrische functies	
E. Meetkunde met coördinaten	
E1 Meetkundige vaardigheden	
E2 Algebraïsche methoden en vlakke meetkunde	
E3 Vectoren en inproduct	• Uitsluitend kwantitatief vergelijkend toepassing Binasboek.
E4 Toepassingen	

Bijlage 7 – havo wiskunde en biologie

Overzicht van mogelijkheden tot samenhang tussen wiskunde en biologie, uitgaande van de subdomeinen van de verschillende wiskundevakken.

havo wiskunde A en biologie

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en biologie**
Domein B Algebra en tellen	
B1 Rekenen	• Het rekenen met getallen, m.n. in breuken en machten; rekenen met verhoudingen. • Rekenen met pCO_2 – en PH-waarden.
B2 Algebra	• Kunnen rekenen met verhoudingen, m.n. in populaties / oppervlakte en volumes / genetica.
B3 Telproblemen	• Werken met en in diagrammen, zoals bij erfelijkheid.
Domein C Verbanden	
C1 Tabellen	• Alle onderwerpen uit de biologie m.b.t. processen in de tijd lenen zich als context voor deze wiskunde eindtermen; i.h.b. kan gedacht worden aan groei, fotosynthese, regulering.
C2 Grafieken vergelijkingen en ongelijkheden	• Grafieken uit de biologie 'lezen' gericht op het grafisch verloop en de trends, maar wel formuleloos. • Groeicurves als context. • Als opmaat naar het begrip 'verband' kunnen biologische termen als evenwichten, duurzame ontwikkelingen, in de wiskundeles worden gebruikt.
C3 Formules met 1 variabele	
C4 Lineaire verbanden	• Voorbeelden van praktische inter- en extrapolatie van (meet)gegevens.
C5 Exponentiële verbanden	• S- en J-curves, predator-prooirelatie, maar wel formuleloos. • Groeipercentages, halverings- en verdubbelingstijden uit biologische processen. • Dateringsmethode(n).
Domein D Veranderingen	
D1 Helling	• Analyse van grafische weergave van biologische processen m.b.v. een differentiequotiënt.
Domein E Statistiek en kansrekening	•
E1 Presentatie van statistische data interpreteren	• Presentatie van data m.b.v. een ethogram. • Aandacht voor significantie en betrouwbaarheid van data.
E2 Statistische data verwerken	• In de biologie wordt gewerkt met Excel, wellicht liggen hier ICT-verbindingen.
E3 Data en kansen	• Voorbeelden uit de erfelijkheidsleer, genetica en ecologie.
E4 Data-analyse	

havo wiskunde B en biologie

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en biologie**
Domein B Functies, grafieken en vergelijkingen	
B1 Standaardfuncties	• Begrip (on)afhankelijke variabele uit de biologie. • Trends en periodiciteit in biologische verschijnselen kunnen "lezen" en benoemen (in bijv. populatiedynamica en groeicurves). • Met lineaire en exponentiële verbanden uit de biologie werken. • S- en J-curves, predator-prooirelatie. • pH- en pCO2-waarden evalueren//analyseren.
B2 Vergelijkingen en ongelijkheden	• Groeipercentages, halveringstijden, verdubbelingstijden. • Evenwichten. • Homeostase.
B3 Evenredigheden	• Lineaire verbanden, interpoleren en extrapoleren. • Rekenen met verhoudingen (populaties, oppervlakten, volumina, genetica).
B4 Periodieke functies	• Voorbeelden van periodieke en cyclische processen uit de biologie wiskundig(er) beschrijven.
Domein C Meetkundige berekeningen	
C1 Afstanden en hoeken in concrete situatie	• Meetkundige vormen van eiwitten, structuur en celskeletten. •
C2 Analytische methoden	• Meetkundige onderwerpen bij verhoudingen, zoals bij volumeberekeningen en haarvatstelsels.
C3 Vectorrekening	
Domein D Toegepaste analyse	
D1 Veranderingen	• Termen biologische groei en ontwikkeling als context voor verandering. • Groeicurven en populatiedynamica als voorbeeld.
D2/3 Afgeleide functies en bepaling ervan	• Begrip helling en helling(coëfficiënt), i.v.m. de vorm van een grafiek.
D4 Toepassingen afgeleide functie	• Optimumcurve.

Bijlage 8 – vwo wiskunde en biologie

vwo wiskunde A en biologie

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en biologie**
Domein B Algebra en tellen	
B1 Algebra	• Werken met het begrip “variabele” grootheid. • Concentratievraagstukken. • Berekeningen met (kleine) getallen. • Berekenen van/met verhoudingen, oppervlakte en volumes[16]. • Binnen het onderwerp homeostase: rekenen aan pCO_{2-} en PH-waarden. • Het omwerken van formules.
B2 Telproblemen	• Combinaties en permutaties in de genetica.
Domein C Verbanden	
C1 Standaardfuncties	• Periodieke verschijnselen beschrijven. • e-machten als afname concentratie medicijn in bloed. • Het rekenen met lineaire en exponentiële verbanden uit de biologie. • Duurzame ontwikkeling.
C2 Functies, grafieken en (on)gelijkheden	• Lezen en interpreteren van grafieken. • Werken met (on)afhankelijke grootheden in de biologie/natuur. • Verwerken van meetresultaten in een grafiek. • Werken met (functie)tabellen over groei, fotosynthese en (alle) tijdafhankelijke processen. • S- en J-curve herkennen en verklaren. • Optimumkromme. • Dateringen als toepassing van exponentiële verbanden.
Domein D Veranderingen	
D1 Rijen	
D2 Helling	• Voorbeelden van veranderingen in de biologie rond het begrip groei(curves) en populatiedynamica. Nader te onderzoeken: “hellingscoëfficiënten”.
D3 Afgeleide	
Domein E Statistiek en Kansrekening	
E1 Probleemstelling en onderzoeksontwerp	• Voorbeelden uit de genetica en de stofwisseling.
E2 Visualisatie van data	• Tabelvoorbeelden uit de biologie (genetica, groei, ontwikkeling en ecologie). • Toepassen van een ethogram.
E3 Kwantificering	
E4 Kansbegrip	• Kansberekening in de genetica (en ecologie).
E5 Kansverdelingen	
E6 Verklarende statistiek	• Steekproeven en hypotheses uit (het) biologie(programma).
Domein F Keuzeonderwerpen	

16 uit de onderbouw, dient te worden onderhouden in bovenbouw!

vwo wiskunde B en biologie

Domein examenprogramma wiskunde	**Mogelijkheden tot samenhang en afstemming tussen wiskunde en biologie**
Domein B Functies, formules en grafieken	
B1 Formules en functies	• Bij populatiedynamica en groeicurves wordt een vorm van het functie- en veranderingsbegrip gebruikt. • Mogelijk dat oorzaak-effect relaties en duurzaamheid binnen functieverband kunnen worden geïllustreerd.
B2 Standaardfuncties	• E-machten (afname concentratie medicijnen in bloed). • Periodieke functies voor beschrijving periodieke processen. • Begrip pH.
B3 Functies en grafieken	• Grafieken kunnen lezen. • Begrippen halveringstijd, verdubbelingstijd; groeipercentages. • S- en J- curve; predator-prooirelaties. • Dateringen (van bijv. fossielen) hebben realties met exponentiële functies.
B4 Inverse functie	
B5 Vergelijkingen en ongelijkheden	• Homeostase. • Toepassingen rond evenwicht in de biologie.
B6 Asymptoten en limietgedrag van asymptoten	• Evenwichten.
Domein C Differentiaal en integraalrekening	
C1/2 Afgeleide functie en techniek voor het differentiëren	• Begrip helling en hellingcoëfficiënt, i.v.m. de vorm van een grafiek, bijvoorbeeld bij groei. • Optimumkromme bij (A-)biotische factoren.
C3 Integraalrekening	
D. Goniometrische functies	
E. Meetkunde met coördinaten	
E1 Meetkundige vaardigheden	• Vorm van eiwitten, structuur van een celskelet. • Raakvlakken met verhoudingen, bijv. volume-berekeningen en haarvatstelsel.
E2 Algebraïsche methoden en vlakke meetkunde	
E3 Vectoren en inproduct	
E4 Toepassingen	

SLO heeft als nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling een publieke taakstelling in de driehoek beleid, praktijk en wetenschap. SLO heeft een onafhankelijke, niet-commerciële positie als landelijke kennisinstelling en is dienstbaar aan vele partijen in beleid en praktijk.

Het werk van SLO kenmerkt zich door een wisselwerking tussen diverse niveaus van leerplanontwikkeling (stelsel, school, klas, leerling). SLO streeft naar (zowel longitudinale als horizontale) inhoudelijke samenhang in het onderwijs en richt zich daarbij op de sectoren primair onderwijs, speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs en beroepsonderwijs. De activiteiten van SLO bestrijken in principe alle vakgebieden.

SLO

Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
F 053 430 76 92
E info@slo.nl

www.slo.nl

slo