Goed voorbereid verder met wiskunde

Verrijking van het leerplan wiskunde voor een betere aansluiting vmbo-tl - vervolgonderwijs

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

slo

Goed voorbereid verder met wiskunde

Verrijking van het leerplan wiskunde voor een betere aansluiting vmbo-tl - vervolgonderwijs

Maart 2015

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

2015 SLO (nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling), Enschede

Mits de bron wordt vermeld, is het toegestaan zonder voorafgaande toestemming van de uitgever deze uitgave geheel of gedeeltelijk te kopiëren en/of verspreiden en om afgeleid materiaal te maken dat op deze uitgave is gebaseerd.

Auteur: Victor Schmidt
Redactie: Jan Sniekers

Informatie
SLO
Afdeling: Vmbo
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 660
Internet: www.slo.nl
E-mail: vmbo@slo.nl

AN: 5.7337.631

Inhoud

Voorwoord **5**

1. Inleiding **7**
1.1 Aanleiding 7
1.2 Doel en doelgroep 8
1.3 Totstandkoming van deze publicatie 8
1.4 Leeswijzer 9

2. Verrijking van een tl-leerplan wiskunde **11**
2.1 Noodzaak en wenselijkheid van verrijking 11
2.2 Verrijkingsrichtingen 11
2.3 Formeel en abstract denken en handelen 13
2.4 Probleemoplossend vermogen 15
2.5 Verrijking en doorstroomrichtingen 18
2.6 Succes van verrijking 20
2.7 Examenprogramma en verrijkingsrichtingen 21
2.8 Verrijkingsvoorbeelden 21

3. Vormgeving van verrijking **23**
3.1 Programmeren van verrijking 23
3.2 Verrijking in de les 24
3.3 Toetsing 26

4. Conclusies **29**

5. Literatuurlijst **31**

Bijlage A Tussendoelen havo en examenprogramma wiskunde-tl **33**

Bijlage B Examenprogramma wiskunde en referentieniveau 3F **45**

Bijlage C Verrijkingsmogelijkheden formalisatie en abstractie **47**

Bijlage D Voorbeelduitwerkingen van verrijkingsmogelijkheden **53**

Bijlage E Gebruik determinatie-instrument tl - vervolgonderwijs **67**

Bijlage F Pilots Montessori College Twente **71**

Bijlage G Wiskundeleerplannen van wiskunde-intensieve mbo-opleidingen **79**

Voorwoord

De theoretisch leerweg (tl) van het vmbo heeft een bijzondere positie in het Nederlandse onderwijsbestel. Vmbo-tl maakt deel uit van het voorbereidend middelbaar beroepsonderwijs, maar kent alleen theoretische vakken. Net als de andere vmbo-leerwegen is de tl een tussenstation naar vervolgonderwijs, maar in dit geval kan dat zowel mbo als havo zijn.
Dit alles stelt tl-scholen, tl-afdelingen en mavo's voor een bijzondere opgave.

Hoe bereid je je leerlingen voor op deze overgang? Moeten ze zich bij loopbaanoriëntatie en -begeleiding (LOB) op zowel mbo als havo oriënteren? Bied je ze verzwaarde programma's aan voor bijvoorbeeld Nederlands en wiskunde, om hun kans op succes op het havo groter te maken? Wat doe je dan met de andere vakken? Krijgen de leerlingen, ter voorbereiding op het mbo, naast de theoretische vakken ook een praktijkvak? Laat je ze oefenen met zelfstandig leren en samenwerken? En hoe determineer je je leerlingen? Allemaal aspecten die aan de orde zijn als een school werk wil maken van de schakelfunctie van vmbo-tl naar vervolgonderwijs.

In deze publicatie staat de vraag centraal wat voor programma wiskunde je tl-leerlingen zou kunnen aanbieden als zij de overstap maken naar mbo of havo. Havo-wiskunde is formeler en abstracter dan tl-wiskunde. Hoe zit het met de overgang naar het mbo? Hoe organiseer je een gedifferentieerd aanbod in de school en toets je dat? Vragen die onder meer op basis van uitgevoerde pilots op een drietal vmbo/tl-scholen worden beantwoord.

Ik hoop dat de hier gepresenteerde analyses en voorbeelduitwerkingen docenten en schoolleiders in vmbo-tl stimuleren hun wiskundeprogramma eens tegen het licht te houden en er ideeën uit te putten voor de eigen situatie.

Jan Sniekers
Projectleider Doorstroom vmbo-tl naar mbo en havo

1. Inleiding

1.1 Aanleiding

De theoretische leerweg van het vmbo bereidt leerlingen voor op een specialisten- of middenkaderopleiding in het mbo (= niveau 4) en naar de tweede fase van het havo. Ongeveer 80% van de leerlingen met een tl-diploma stroomt door naar het mbo; tussen 15 en 20% naar 4-havo. In de onderstaande tabel staan de doorstroompercentages in de jaren 2010 tot en met 2013.

Tabel 1: *Doorstroompercentages vanuit vmbo-tl naar vervolgopleidingen*

Jaar	2010	2011	2012	2013
Doorstroom naar mbo	77,3%	80,0%	81,3%	82,7%
Doorstroom naar havo	19,7%	17,5%	16,2%	14,3%

Bron: Kerncijfers 2009 – 2013, onderwijs, cultuur en wetenschap

Doorstroomrichtingen

In het middelbaar beroepsonderwijs zijn er 231 kwalificaties op niveau 4. Hiervoor geldt referentieniveau 3F voor rekenen en wiskunde. Elke kwalificatie kent daarnaast ook beroepsspecifieke vereisten voor rekenen en wiskunde. Deze worden in het kwalificatiedossier van een kwalificatie beschreven. Bij ongeveer driekwart van deze kwalificaties zijn de beroepsspecifieke reken/wiskundevereisten lager dan of gelijk aan referentieniveau 3F. Kwalificaties waarvoor dit geldt, heten in deze publicatie "wiskunde-neutraal". In het resterende kwart van de kwalificaties vereist uitoefening van het beroep meer rekenen en wiskunde dan referentieniveau 3F. Deze kwalificaties worden in deze publicatie "wiskunde-intensief" genoemd.

In 2013 studeerde ongeveer 4% van de studenten aan een wiskunde-intensieve middenkader- of specialistenopleiding in het mbo. In de kwalificatiedossiers van deze opleidingen worden als specifieke wiskundevaardigheden onder andere genoemd: geavanceerde berekeningen met goniometrische verhoudingen, bijvoorbeeld bij toepassing van de wet van Snellius, gebruik van logaritmische schaalverdelingen en toepassing van vectorrekening in de natuurkunde.

Wiskunde-intensieve middenkader- en specialistenkwalificaties zijn onder andere Audicien, Opticien en enkele kwalificaties in het technisch domein.

Als gevolg hiervan zijn er voor tl-leerlingen drie doorstroomrichtingen:

- naar een wiskunde-neutrale mbo-opleiding;
- naar een wiskunde-intensieve mbo-opleiding;
- naar 4 havo.

Het examenprogramma wiskunde in de theoretische leerweg
Het examenprogramma stamt uit het begin van de jaren negentig en wordt gekenmerkt door gebruik van relatief elementaire wiskunde in praktische situaties, zoals die zich in een toekomstig beroep op mbo-niveau 4 voor zouden kunnen doen. Daardoor heeft het vak een minder formeel en abstract karakter dan wat vaak van wiskunde gedacht wordt. Leerlingen die goed zijn in tl-wiskunde, zijn vooral toegerust om wiskunde te gebruiken in functionele situaties. Hun wiskundig denk- en handelingsniveau is meestal beperkt. Het examenprogramma past daarom goed bij doorstroom naar een wiskunde-neutrale mbo-opleiding.

Het karakter van tl-wiskunde kan geïllustreerd worden door de wijze waarop tweedegraads vergelijkingen opgelost worden. Daartoe bestaat een aantal oplossingsroutines. Tl-leerlingen hoeven deze routines niet te kennen en lossen dergelijke vergelijkingen op door middel van "inklemmen", dat beschouwd kan worden als systematisch trial-and-error.

Voor leerlingen die een van de andere twee doorstroomrichtingen kiezen, is het de vraag of het examenprogramma wiskunde hen hierop voldoende voorbereidt. Er zijn veel tl-scholen die deze leerlingen een verrijkt leerplan wiskunde willen bieden. Deze publicatie gaat over de inhoud en vormgeving van zo’n schoolleerplan wiskunde.

1.2 Doel en doelgroep

Deze publicatie informeert tl-opleidingen over mogelijkheden om hun leerplan voor het vak wiskunde te verrijken voor leerlingen die doorstromen naar een wiskunde-intensieve mbo-opleiding of naar 4 havo. Daarbij gaat het zowel over de inhoudelijke als de uitvoerende kant van verrijking. De publicatie is bedoeld voor vaksecties wiskunde die verrijkte leerplannen willen of moeten ontwikkelen voor leerlingen uit de beschreven doelgroepen.

In deze publicatie komen de volgende vragen aan de orde:

- In hoeverre is het noodzakelijk leerlingen verrijking van het wiskundeleerplan op school aan te bieden?
- In welke richtingen kan een schoolleerplan wiskunde in het algemeen verrijkt worden?
- Voor welke doorstroomrichting is welke verrijkingsrichting het meest geëigend?
- Welke hoofdonderwerpen uit het examenprogramma lenen zich voor welke verrijkingsrichtingen?
- Wanneer begin je met welke verrijkingsonderdelen en hoe kan verrijking geprogrammeerd worden?
- Hoe krijgt verrijking van een leerplan wiskunde gestalte in de wiskundelessen?
- Hoe worden verrijkingsonderdelen uit het leerplan getoetst? En in hoeverre dragen toetsresultaten en andere observaties bij aan een adequate determinatie van leerlingen?

1.3 Totstandkoming van deze publicatie

Deze publicatie is het resultaat van een SLO-project dat liep in de periode 2011 – 2014. In dit project stond de schakelfunctie van de theoretische leerweg naar het middelbaar beroepsonderwijs en de tweede fase van het havo centraal. Betrokken schoolvakken waren Nederlands, geschiedenis en wiskunde.

Doorstroom naar 4 havo
In dezelfde periode kwamen er tussendoelen wiskunde voor de onderbouw van havo en vwo beschikbaar. Analyse van overeenkomsten en verschillen tussen het examenprogramma wiskunde-tl en deze tussendoelen was een belangrijk startpunt van het wiskundedeel van dit project. Deze analyse is gebruikt bij een drietal pilots, waarbij in twee gevallen een aansluitingsmodule tl – havo voorzien is van havo-specifieke onderdelen. In het andere geval is een aantal lessenseries ontwikkeld en uitgeprobeerd voor een tl-programma dat doorstroom naar havo beoogt. Conclusies naar aanleiding van deze pilots zijn verder in een workshop voorgelegd aan een groep docenten wiskunde uit het SLO-Netwerk theoretische leerweg, die deze conclusies in grote lijnen bleken te onderschrijven.

Deelnemende scholen waren het Mondriaan College in Oss, Het Hooghuis in Heesch en het Montessori College Twente in Hengelo.

Doorstroom naar mbo
Andere vraag: welke verrijking van het wiskundeleerplan is noodzakelijk en relevant is voor leerlingen die naar een wiskunde-intensieve mbo-opleiding doorstromen? Eerst hebben we in de kwalificatiedossiers onderzocht welke middenkader- of specialistenkwalificaties vanuit het beroep meer rekenen en wiskunde voorschrijven dan referentieniveau 3F én dan in de theoretische leerweg wordt aangeboden. Kenniscentrum Fundeon, dat een aantal van deze kwalificaties onder zijn hoede heeft, is vervolgens benaderd voor nadere informatie over de wiskundevereisten van acht kwalificaties in de bouw- en infrastructuurtechniek. Naar aanleiding daarvan hebben we drie wiskundedocenten van deze opleidingen gevraagd in hoeverre tl-leerlingen voldoende voorbereid zijn op deze wiskundelessen in het mbo. De twee belangrijkste conclusies uit deze interviews zijn ten slotte voorgelegd aan een kleine twintig docenten wiskunde op andere roc's. Vier van deze docenten hebben hun instemming betuigd met de conclusies. Andere docenten hebben geen reactie gegeven.

De geïnterviewde docenten waren werkzaam op het ROC van Twente in Hengelo, ROC Kop van Noord Holland in Den Helder en ROC Mondriaan in Den Haag.

1.4 Leeswijzer
Deze publicatie bestaat uit vier hoofdstukken en een aantal bijlagen. Hoofdstuk 2 gaat in op de noodzaak en de mogelijke inhouden van een verrijkt leerplan. Na een korte theoretische beschouwing en een toelichting op verschillende richtingen waarin leerplanverrijking voor wiskunde plaats kan vinden, wordt beschreven welke verrijkingsrichting het meest past bij welke doorstroomrichting en welke onderdelen van het examenprogramma zich lenen voor welk soort verrijking. In een bijlage staan verrijkingsvoorbeelden en wordt verder verwezen naar andere bronnen.
Hoofdstuk 3 biedt scholen en teams handreikingen voor het vormgeven van verrijking. Aan bod komen aspecten als de wijze waarop verrijkingsonderdelen in een leerplan geprogrammeerd kunnen worden, toetsing van verrijkingsonderdelen en determinatie van leerlingen. Bij toetsing wordt ook aangegeven hoe een docent wiskunde op basis van toetsresultaten en leerlingobservaties de cognitieve ontwikkeling van een leerling vanuit zijn perspectief kan inschatten met behulp van een door SLO ontwikkeld determinatie-instrument (Sniekers, Jansma & Van Lanschot Hubrecht, 2015).
Hoofdstuk 4 bevat een slotbeschouwing met enkele conclusies en aandachtspunten.

2. Verrijking van een tl-leerplan wiskunde

2.1 Noodzaak en wenselijkheid van verrijking

Verrijking van een leerplan wil zoveel zeggen als het wijzigen en aanvullen van het schoolleerplan voor (een deel van) de leerlingenpopulatie. Het doel van verrijking is leerlingen beter voor te bereiden op een vervolgopleiding dan in het examenprogramma is voorzien. Of verrijking noodzakelijk is, wordt bepaald door de mate waarin het examenprogramma wiskunde in de theoretische leerweg toereikend is. Uit de resultaten van het project blijkt het volgende:

- Leerlingen die een wiskunde-neutrale mbo-opleiding kiezen, zouden in theorie geen wiskundeaansluitingsproblemen hoeven te ondervinden, omdat het examenprogramma wiskunde rekenreferentieniveau 3F omvat. In bijlage B staat een analyse waaruit dit geconcludeerd kan worden.
- Voor leerlingen die een wiskunde-intensieve mbo-opleiding kiezen, is het examenprogramma wiskunde-tl volgens elk van de drie geïnterviewde mbo-docenten toereikend. Op een enkele uitzondering na blijken al hun studenten in staat te zijn het wiskundeprogramma op het mbo succesvol af te ronden, ook als er een 6 voor wiskunde-tl op hun cijferlijst staat.
- Leerlingen die doorstromen naar 4 havo, ondervinden wiskundeaansluitingsproblemen, zeker als zij wiskunde B kiezen (Onderwijsraad, 2009). In bijlage A staat een vergelijking van de eindtermen uit het examenprogramma wiskunde-tl en de (concept-)tussendoelen wiskunde voor de onderbouw havo (en vwo). Ook in deze vergelijking treden hiaten aan het licht.

Verrijking is daarmee wenselijk voor doorstroom naar 4 havo. De geïnterviewde mbo-docenten vinden verrijking niet noodzakelijk voor wiskunde-intensieve mbo-opleidingen. Desgevraagd konden ze wel aangeven hoe een tl-school haar leerplan wiskunde zou kunnen verrijken als ze daar gelegenheid toe ziet.

2.2 Verrijkingsrichtingen

Verrijking van een schoolleerplan kan op twee manieren: door leerinhoud aan te bieden die geen deel uitmaakt van het formele leerplan en/of door (nieuwe of bestaande) leerinhoud op een hoger niveau aan te bieden. Wat dat "hoger niveau" inhoudt, kan per vak verschillen. Voor het vak wiskunde kan niveauverhoging zich enerzijds richten op versterking van het formeel en abstract denk- en handelingsvermogen van leerlingen en anderzijds op versterking van het vermogen van leerlingen om problemen op te lossen.

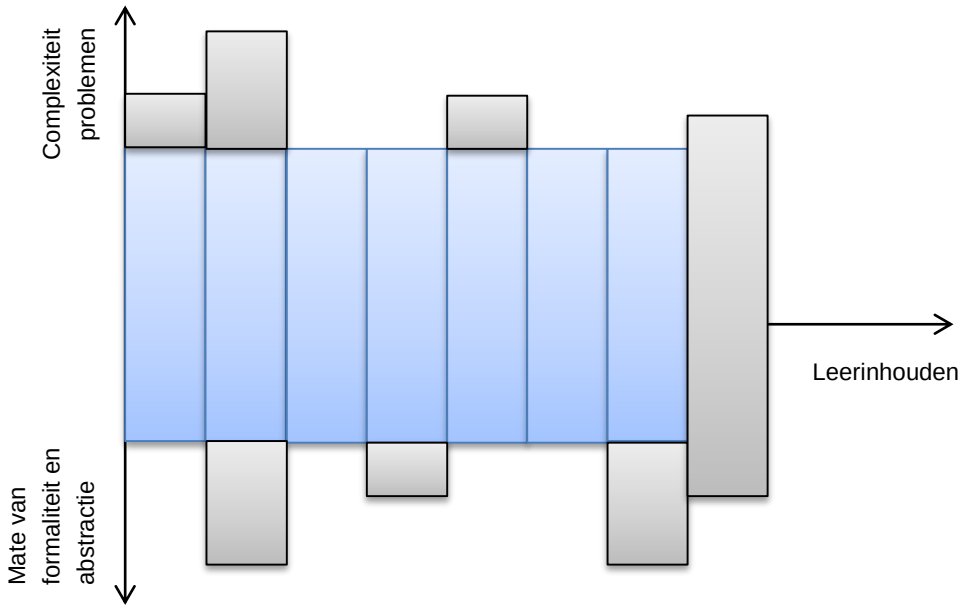
Voorbeelden

- Kansrekening is een voorbeeld van een nieuwe leerinhoud in een leerplan wiskunde-tl.
- Notatie en gebruik van de stelling van Pythagoras in de vorm $a^2 + b^2 = c^2$ in plaats van in de vorm van een werkschema is een voorbeeld van niveauverhoging in formeel denken.
- Berekening van de lengte van de hoogtelijn vanuit de top van een gelijkbenige driehoek vereist dat een leerling twee rechthoekige driehoeken in de gelijkbenige driehoek herkent en vervolgens op een ervan de stelling van Pythagoras toepast. Dit is een voorbeeld van een hoger niveau van probleem oplossen dan enkel deze stelling toe te passen op een gegeven rechthoekige driehoek.

Verrijking van een leerplan wiskunde kan in het algemeen plaatsvinden door:

- aanvullende leerinhouden aan te bieden;
- leerinhouden op een meer formele en abstracte wijze aan de leerlingen aan te bieden dan in het huidige leerplan het geval is;
- leerlingen complexere problemen voor te leggen dan die in het huidige leerplan voorkomen.

Zodoende kan een leerplan wiskunde in drie richtingen verrijkt worden. In de onderstaande figuur wordt een bestaand leerplan voorgesteld als een soort staafdiagram waarin horizontaal de leerinhouden en verticaal beheersingsniveaus worden weergegeven. Verrijking wordt uitgebeeld door verlenging van kolommen van het diagram in een of twee richtingen en toevoeging van nieuwe kolommen.



Figuur 1: Grafische voorstelling van leerplanverrijking

In het vervolg van dit hoofdstuk wordt ingegaan op versterking van formeel en abstract denken en handelen en van probleemoplossend vermogen. Over aanvullende leerinhouden valt in algemene zin niet veel te zeggen.

2.3 Formeel en abstract denken en handelen

Vergroting van het formeel en abstract denk- en handelingsvermogen van leerlingen heeft op zijn beurt betrekking op wiskundige kennis, wiskundig inzicht en/of wiskundige vaardigheden.

Kennis

Wiskundige kennis bestaat uit definities, namen, schrijfwijzen en uitspraken van wiskundige objecten, zoals getallen, variabelen, verbanden, van wiskunde routines en van wiskundige eigenschappen. Het gebruik van formele namen en schrijfwijzen en van meer formele definities van wiskundige objecten, routines en eigenschappen is een manier om formeel denken te stimuleren.

Voorbeelden

De richtingscoëfficiënt van een rechte lijn wordt in tl-methoden "hellinggetal" of "stapgrootte" genoemd, omdat zeker de eerste naam meer recht doet aan wat bedoeld wordt. Gebruik van de naam richtingscoëfficiënt vereist dat leerlingen een term hanteren waarvan niet op voorhand duidelijk is waarom die weergeeft wat er bedoeld wordt, wat een kenmerk is van formeel wiskundig denken.

In de theoretische leerweg wordt gebruik gemaakt van woordformules of van formules met lettervariabelen, waarbij de letter een relatie heeft met de grootheid die beschreven wordt, bijvoorbeeld h = hoogte en a = aantal. Een formeler denkniveau kan bereikt worden door variabelen met namen te benoemen waarbij deze relatie afwezig is, bijvoorbeeld x = hoogte en y = aantal.

Een lineair verband kan worden beschreven als een "verband met een startgetal en een hellinggetal". Een formelere definitie luidt: een lineair verband is een verband met een formule van de vorm $y = ax + b$ of $y = b + ax$.

Hoe haakjes in een expressie weggewerkt kunnen worden, kan genoteerd worden met behulp van onderstaand voorbeeld, maar ook met de formele schrijfwijze $a(b + c) = ab + ac$

$$2(3x + 4) = 2 \cdot 3x + 2 \cdot 4 = 6x + 8$$

Een cirkel kan gedefinieerd worden door middel van een voorbeeld of door de meer formele definitie: een vlakke figuur waarvan alle punten een vaste afstand hebben tot een gegeven punt.

Inzicht

Wiskunde-inzicht houdt onder meer in dat een leerling ziet dat aan verschillende situaties een zelfde principe ten grondslag kan liggen en dat hij dit principe vervolgens kan toepassen in een nieuwe situatie. Leerlingen met dit inzicht beschikken over abstract denkvermogen. Verrijking van een leerplan kan tot doel hebben dit denkvermogen van leerlingen te verhogen.

Voorbeeld
Onderstaande rekenopgaven zijn elk van de vorm 3*x* + 5*x* en kunnen worden opgelost door 8*x* te berekenen.

$3 \times 2 + 5 \times 2 = 8 \times 2 = 16$
$3 \times 1{,}25 + 5 \times 1{,}25 = 8 \times 1{,}25 = 10$
$3 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} = 8 \times \frac{3}{8} = 3$

Het besef dat de drie rekenopgaven "eigenlijk hetzelfde zijn" en op dezelfde manier opgelost kunnen worden, is een voorbeeld van abstract denkvermogen.

Verdere abstractie wordt bereikt door in te zien dat de 3 en de 5 er niet toe doen en dat elke opgave van de vorm *px* + *qx* op deze manier berekend kan worden.

Een leerling die goed abstract kan denken, zal gemakkelijk inzien dat de drie rekensommen uit het voorbeeld niet alleen opgaven zijn die kunnen worden opgelost, maar ook zelfstandige wiskundige objecten die geanalyseerd en geclassificeerd kunnen worden. Dit besef is vooral van nut als voor een bewerking en zijn uitkomst dezelfde notatie gebruikt wordt.

Voorbeeld
Voor de deling 3 : 7 wordt ook de notatie $\frac{3}{7}$ gebruikt. De uitkomst wordt genoteerd als de breuk $\frac{3}{7}$ en uitgesproken als "drie zevende". Met deze breuk kunnen desgewenst vervolgberekeningen uitgevoerd worden. Een leerling met een beperkt abstract denkvermogen begrijpt het onderscheid tussen deling en breuk niet en zal naar zijn rekenmachine grijpen om "de uitkomst te vinden". Wie wel over voldoende abstract denkvermogen beschikt, neemt genoegen met de breuk als uitkomst en neemt alleen de rekenmachine ter hand als de situatie daarom vraagt (bijvoorbeeld: omdat de uitkomst een geldbedrag voorstelt).

Leerlingen met een goed ontwikkeld abstract denkvermogen kunnen in voorkomende gevallen vlot schakelen tussen bewerking en object en kunnen objecten als breuken en irrationale wortels gebruiken in berekeningen, herleidingen en redeneringen.

Vaardigheden
Een leerling beschikt over een wiskundige vaardigheid als hij in staat is routineproblemen van een bepaald type op te lossen. De oplossingswijzen voor een probleem kennen verschillende niveaus van formaliteit. Hoe formeler een oplossingswijze is, des te efficiënter en effectiever hij meestal is. Vaak is een formele oplossingswijze daarentegen ook het moeilijkst te begrijpen en te onthouden. Een leerling die daartoe in staat is, beschikt over een goed ontwikkeld formeel niveau van handelen.

Voorbeeld
Berekening van de top van de parabool met formule $y = -x^2 + 6x - 8$ kan op de onderstaande wijzen plaats vinden. Deze wijzen zijn geordend van minder naar meer formeel.

1. Aflezen uit onderstaande tabel met als resultaat (3, 1)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	−8	−3	0	1	0	−3	−8

2. De nulpunten van de parabool berekenen: $x = 2$ en $x = 4$. De top bevindt zich precies tussen de nulpunten bij $x = 3$ en de bijbehorende y-coördinaat kan berekend worden door deze waarde van x in de vullen in de formule met als resultaat 1.

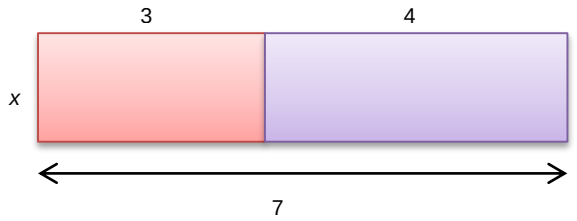
3. $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3$ en $y_{top} = 1$

Naast wiskundige vaardigheden dient een leerling ook domeinonafhankelijke redeneer- en probleemoplossingsvaardigheden te verwerven. Ook wijzen van redeneren en probleem oplossen kunnen verschillen in de mate van formaliteit.

Voorbeeld
Beredeneer dat $3x + 4x = 7x$

1. Kijk maar:
   3 x 2 + 4 x 2 = 6 + 8 = 14 en 7 x 2 = 14
   3 x 5 + 4 x 5 = 15 + 20 = 35 en 7 x 5 = 35
   Voor andere getallen zal het ook wel kloppen.

2. Dat kun je beredeneren aan de hand van het onderstaande plaatje. De rechthoeken hebben oppervlakte $3x$ respectievelijk $4x$ en als je beide rechthoeken als één rechthoek beschouwt, is zijn oppervlakte $7x$.



3. Dit volgt uit de algemene regel $a(b + c) = ac + bc$ als je voor a x, voor b 3 en voor c 4 invult en de regel van rechts naar links leest.

Een leerplan wiskunde kan onder andere verrijkt worden door leerlingen formelere redeneer- en oplossingswijzen aan te bieden.

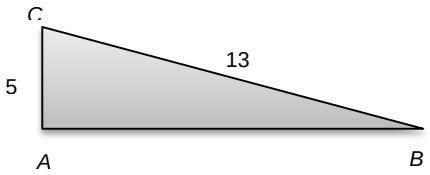
2.4 Probleemoplossend vermogen

Versterken van het probleemoplossend vermogen van een leerling is mogelijk door hem telkens complexere problemen voor te leggen. Deze problemen kunnen wiskundig van aard zijn, maar ook afkomstig uit een praktische situatie die wiskundig opgelost worden.

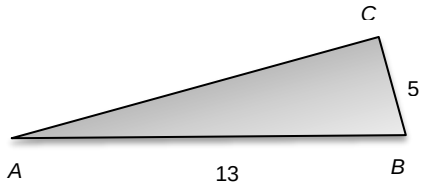
Voorbeeld

In elk van de onderstaande opgaven dient een leerling met behulp van de Stelling van Pythagoras van een rechthoekige driehoek de lengte van een rechthoekszijde te berekenen als de lengte van de twee andere zijden gegeven zijn. De opgaven staan in opklimmende volgorde van complexiteit.

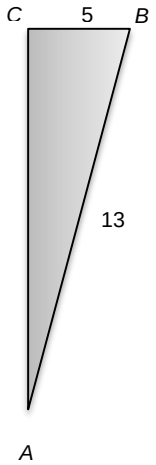
1 Bereken de lengte van de zijde AB in de onderstaande figuur.



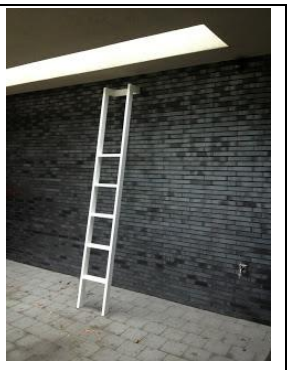
2 Bereken de lengte van de zijde *AC* in de onderstaande figuur.



3 Bereken de lengte van de zijde *AC* van in de onderstaande figuur.

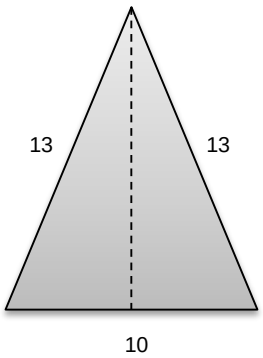


4 De ladder op deze foto is 3,20 m lang en de muur is 2,40 m hoog. Hoe ver staat de onderkant van de ladder van de muur af?



Bron: foto door Joris Bökkerink, www.laddertjes.net

5 Bereken de lengte van de getekende hoogtelijn van onderstaande driehoek.



6 Bereken hoe hoog iemand van 1,80 m kan reiken als hij boven op deze keukentrap staat, waarvan de voeten 1,20 m uit elkaar staan en de afstand tussen de traptreden 20 cm groot is.

Bron: http://www.butsmeulepas.nl/nieuw-in-ons-assortiment-faraone-klimmaterialen/

In deze voorbeelden neemt de complexiteit van het probleem telkens toe, terwijl de toe te passen wiskundevaardigheid hetzelfde is. In de eerste voorbeelden verandert de oriëntatie van de driehoek. In het vierde voorbeeld moet een leerling zelf de rechthoekige driehoek herkennen die gevormd wordt door de ladder, de muur en de vloer. In de laatste twee voorbeelden moet een leerling in de figuur twee rechthoekige driehoeken ontdekken en vervolgens de Stelling van Pythagoras toepassen.

Bij nog complexere problemen dient een leerling meer dan één wiskundige structuur of concept in een probleem te herkennen en in samenhang te gebruiken om het probleem op te lossen.

Voorbeeld
Bereken hoe ver de man op de foto kan reiken als hij 1,80 m en de ladder 2,60 m lang is en als de ladder 1,20 m van de muur af staat.

Bron: http://www.krause-systems.com/

In dit voorbeeld moet de Stelling van Pythagoras worden toegepast om uit te rekenen hoe hoog de ladder reikt (= 2,31 m). Omdat de man halverwege de ladder staat, reiken zijn voeten tot de helft van deze hoogte (= 1,15 m). Hij kan dus reiken tot 1,15 m + 1,80 m = 2,95 m.

De leerling moet in het voorbeeld een rechthoekige driehoek op de foto herkennen, maar ook gebruik maken van het wiskundige concept van gelijkvormigheid van driehoeken. Hoe beter een leerling wiskundige structuren in probleemstelling herkent en in staat is die in samenhang te gebruiken, des te groter is zijn probleemoplossend vermogen.

2.5 Verrijking en doorstroomrichtingen

Verrijking van een leerplan wiskunde kan zich in drie richtingen uitstrekken: toevoeging van nieuwe leerinhoud, verhoging van het formeel en abstract denk- en handelingsniveau van leerlingen en versterking van het probleemoplossend vermogen van leerlingen. De vraag is welke verrijking voor welke doorstroomrichting het meest geëigend is.

Doorstroom naar het mbo
De meerderheid van de leerlingen met een tl-diploma stroomt door naar een wiskunde-neutrale middenkader- of specialistenopleiding in het mbo. Deze leerlingen dienen aan het eind van hun mbo-opleiding rekenreferentieniveau 3F te beheersen. In bijlage B wordt het examenprogramma wiskunde voor vmbo-tl vergeleken met referentieniveau 3F met behulp van het raamwerk rekenen/wiskunde. Dit raamwerk is voorloper van het referentiekader rekenen. Daaruit blijkt dat dit referentieniveau door het examenprogramma wiskunde wordt afgedekt en dat verrijking van wiskunde-tl voor deze doelgroep niet noodzakelijk is.

Een school die tl-leerlingen die opteren voor een wiskunde-neutrale mbo-opleiding, toch meer wiskunde-uitdaging wil bieden, kan gebruikmaken van de volgende observatie.

In de kwalificatiedossiers van managers- en ondernemersopleidingen blijkt dat de beroepen waar deze opleidingen op voorbereiden, vaak overeenkomstige rekentaken kennen, zoals het analyseren van verkoopcijfers en het maken van prognoses. Een tl-school kan ervoor kiezen deze rekentaken te gebruiken om het schoolexamenonderwerp Informatieverwerking en statistiek in een context van een beroep aan te bieden en daarmee het probleemoplossend vermogen van deze leerlingen te bevorderen.

Evenmin blijkt verrijking noodzakelijk te zijn in de voorbereiding op een doorstroom naar een wiskunde-intensieve mbo-opleiding. Dat laat onverlet dat verrijking volgens de geïnterviewde mbo-docenten wel van nut kan zijn voor doorstromers naar een dergelijke opleiding. Deze docenten gaven tamelijk eensluidend onderstaande twee suggesties:

- Schenk aandacht aan verhoging van het formeel en abstract denkniveau van leerlingen.
- Besteed aandacht aan formulevaardigheid, met name ten aanzien van formules met meer dan twee variabelen. Daaronder valt onder andere: substitutie van variabelen, formules algebraïsch omwerken tot gelijkwaardige formules, werken met formules met andere variabelen dan *x* en *y*.

Een van de geïnterviewde docenten sprak van een meer "wiskundige manier" van denken en handelen.

Een andere docent gaf als voorbeeld van formeel handelen: lineaire interpolatie met een formule in plaats van aan de hand van een tabel.

Voorbeelden van formulevaardigheid zijn $a^2 + b^2 = c^2$ kunnen herleiden tot $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ of uitrekenen hoeveel graden Celsius 0 ºF is aan de hand van de formule $^{o}F = 1{,}8 \times {}^{o}C + 32$.

In bijlage G wordt ter informatie inhoud en niveau van het wiskundeleerplan op de drie roc's geschetst.

Doorstroom naar havo

De tussendoelen wiskunde voor de onderbouw havo/vwo beschrijven wat een leerling moet kennen, kunnen en begrijpen aan het einde van de onderbouw havo/vwo
Als het examenprogramma wiskunde-tl naast deze tussendoelen gelegd wordt, valt een aantal zaken op:

- Een aantal leerinhouden uit de tussendoelen ontbreekt in het examenprogramma vmbo-tl. In sommige gevallen betreft dat relatief kleine onderwerpen. Grotere onderwerpen die ontbreken zijn:
    - algebra
    - elementaire combinatoriek en kansrekening
    - kwadratische verbanden, kwadratische vergelijkingen en dito ongelijkheden
- Uit de tussendoelen blijkt een meer formele insteek met betrekking tot de leerinhouden die wel overeenkomen met het tl-programma. Dat komt vooral tot uitdrukking in tussendoelspecificaties voor te hanteren vaktaal en in specificaties van de te gebruiken oplossingsroutines.

De vergelijking tussen de tussendoelen voor onderbouw havo en het examenprogramma wiskunde-tl staat in bijlage A. Uit bovenstaande bevindingen en de bijlage kan geconcludeerd worden dat een hoger niveau van formeel en abstract denken en handelen voor leerlingen die naar het havo denken door te stromen, wenselijk is.

De vraag kan opgeworpen worden in hoeverre dit noodzakelijk is voor leerlingen die van plan zijn op het havo wiskunde A te kiezen. Wiskunde A doet een sterker beroep op probleemoplossend vermogen dan op formeel en abstract denken en handelen. Men zou hieruit kunnen concluderen dat formeel denken en handelen voor wiskunde A minder nodig is dan voor wiskunde B. Deze redenering is niet zonder risico, want ze houdt er geen rekening mee dat docenten wiskunde in 4 havo – hoewel het examenprogramma wiskunde A dat misschien niet strikt vereist – toch gebruikmaken van meer formele vaktaal en formele oplossingsroutines bij het oplossen van problemen.

In de workshop van het SLO-Netwerk TL bevestigden de deelnemers deze observatie voor wiskunde A. Voor wiskunde B meende de meerderheid van de deelnemers dat gebrek aan zowel probleemoplossend vermogen als formeel en abstract kunnen denken en handelen even sterke oorzaken kunnen zijn voor aansluitingsproblemen tl – havo.

Merk op dat de verrijkingssuggesties ten behoeve van doorstroom naar wiskunde-intensieve mbo-opleidingen passen in wat hier beschreven staat. Dat maakt het voor een tl-school mogelijk een gecombineerde leerroute te maken voor doorstromers naar havo en doorstromers naar een wiskunde-intensieve mbo-opleiding.

2.6 Succes van verrijking

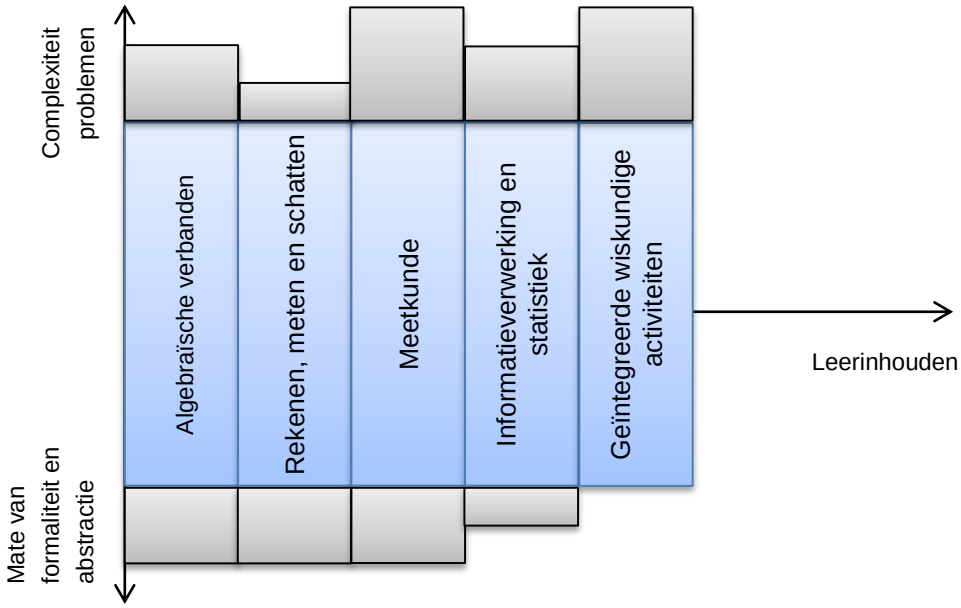
Welke verrijkingsrichting is het meest succesvol? Uit de pilots van het project komt het volgende beeld naar voren.

- Leerlingen die goede wiskunderesultaten behalen op tl-toetsen, geven daarmee vooral blijk van een goed probleemoplossend vermogen, omdat wiskunde-tl zich met name op versterking van dit vermogen richt. Van verrijking van een tl-leerplan in deze richting mag voor hen een zekere mate van succes verwacht worden.
- Verhoging van het formeel en abstract denk- en handelingsniveau is voor tl-leerlingen moeilijker haalbaar. Een reden hiervoor is dat formeel en abstract denken en handelen nauwelijks deel uitmaakt van het tl-programma. Het vormt een apart leerspoor, dat vooral in havo/vwo aan bod komt. Het meeste succes op dit terrein kan verwacht worden van leerlingen die in de onderbouw – bijvoorbeeld in een dakpanklas tl/havo, waarin op havo-niveau wiskunde is gegeven – kennis gemaakt hebben met meer formele en abstracte wiskunde.
- Of verwerving van nieuwe leerinhouden succesvol zal zijn, hangt vooral af van hoe sterk deze inhouden een beroep doen op probleemoplossend vermogen of op formeel en abstract denken en handelen en in hoeverre een leerling daar reeds over beschikt.

Deze inzichten zijn voortgekomen uit twee verrijkingspilots op het Montessori College Twente. De eerste pilot had Lineaire Verbanden als onderwerp. Leerlingen kregen op de eindtoets een aantal extra opgaven voorgelegd van een formeler en abstracter niveau dan dat van wiskunde-tl. De toetsresultaten van de leerlingen vielen erg tegen. Slechts een enkele van de 120 deelnemende leerlingen bleek op de toets de verrijkingsopgaven te kunnen maken. De tweede pilot vond later in het schooljaar plaats met het onderwerp Goniometrie. In deze pilot bleek een derde deel van de leerlingen in staat te zijn verrijkingsopgaven op de eindtoets goed te maken. Deze opgaven vereisten vooral een hoger probleemoplossend vermogen van de leerlingen.

2.7 Examenprogramma en verrijkingsrichtingen

Het examenprogramma wiskunde-tl kent een aantal hoofdonderwerpen en elk van deze hoofdonderwerpen leent zich in meerdere of mindere mate voor verrijking. In onderstaande figuur wordt bij elk hoofdonderwerp weergegeven in welke richtingen dit verrijkingsmogelijkheden biedt. De mate waarin verrijking mogelijk is, wordt tot uitdrukking gebracht door middel van de grijs gekleurde extensies van de staven die elk een hoofdonderwerp voorstellen.



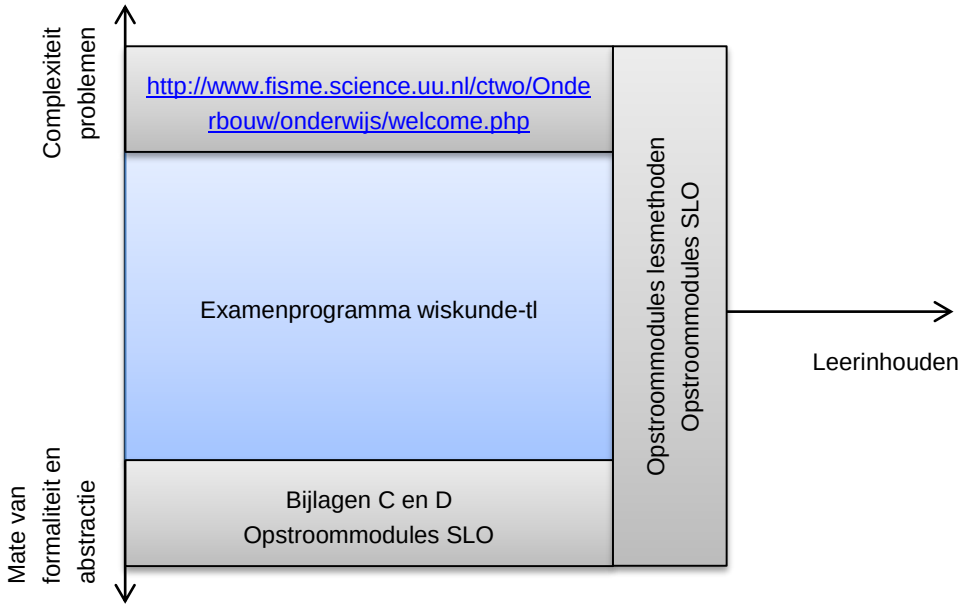
Figuur 2: Mogelijke verrijkingsrichtingen in het examenprogramma wiskunde-tl

In dit project is gebleken dat Meetkunde en Geïntegreerde wiskundige activiteiten zich het meest lenen voor versterking van het probleemoplossend vermogen van leerlingen. Verhogen van formeel en abstract denk- en handelingsniveau van leerlingen is bij alle inhoudelijke hoofdonderwerpen mogelijk, maar bij Informatieverwerking en statistiek het minst.

2.8 Verrijkingsvoorbeelden

Er zijn diverse bronnen voor voorbeelden van verrijkingsonderdelen voor een leerplan wiskunde-tl. In deze publicatie staan in bijlagen C en D voorbeelden die gebruikt kunnen worden om het niveau van formeel en abstract denken en handelen van een leerling te verhogen. Voorbeelden die tot doel hebben het probleemoplossend vermogen van leerlingen te versterken staan onder andere op http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/Onderbouw/onderwijs/welcome.php. De opstroommodules van twee grote lesmethoden hebben vooral tot doel leerlingen ontbrekende leerstof aan te bieden. De *Opstroommodules van vmbo g/tl naar havo 4 voor het vak wiskunde* die door SLO zijn uitgebracht, bieden gelegenheid tot versterking van formeel en abstract denken van leerlingen en bieden daarnaast aanvullende leerstof.

In de onderstaande figuur worden de verschillende doelen van het genoemde verrijkingsmateriaal in beeld gebracht.



Figuur 3: Bronnen voor verrijkingsvoorbeelden

3. Vormgeving van verrijking

3.1 Programmeren van verrijking

Een tl-school die leerlingen verrijking wil bieden, moet een keus maken uit de verschillende wiskundeleerroutes en nadenken over programmering en determinatie.

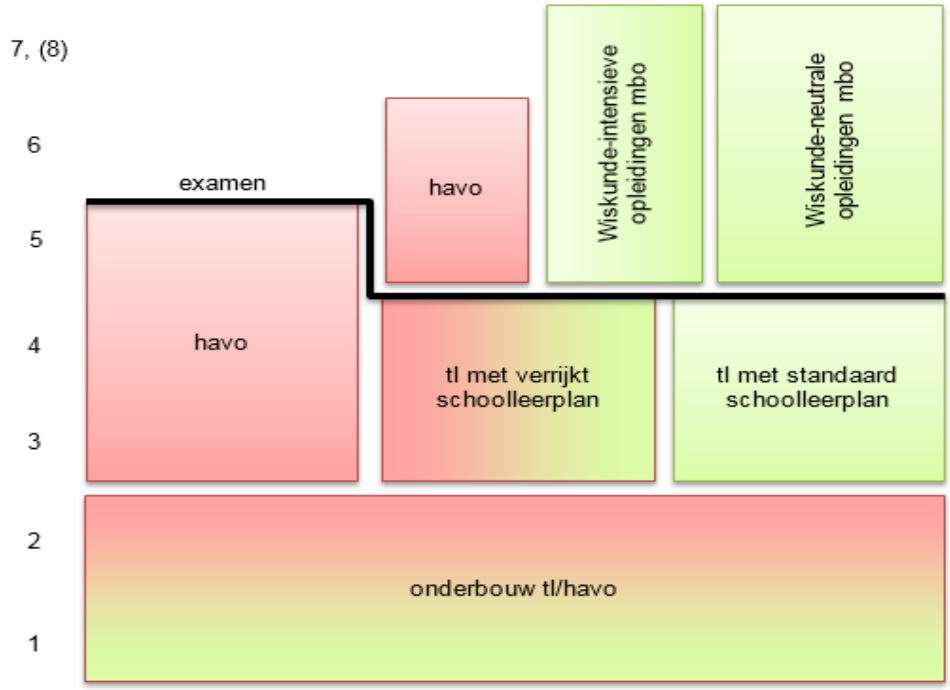
Wiskundeleerroutes

Het is mogelijk voor leerlingen van elk van de drie doorstroomrichtingen (wiskunde-neutraal mbo, wiskunde-intensief mbo en havo) een leerroute aan te bieden. Vindt een school drie leerroutes te veel, dan kan hij twee leerroutes overwegen:

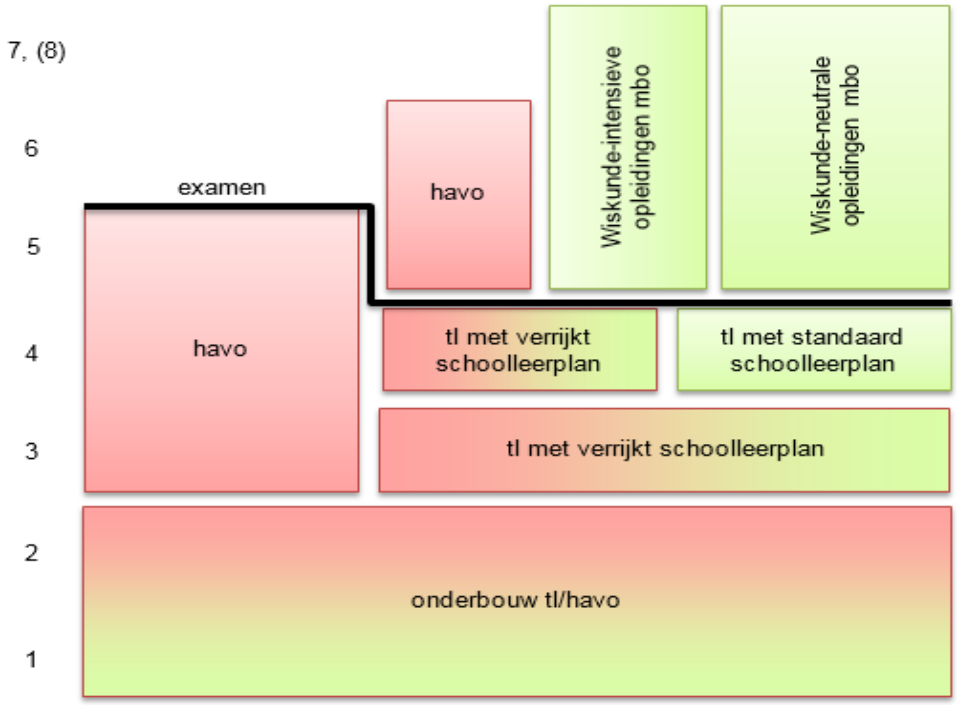
- een standaard tl-leerroute voor leerlingen die doorstromen naar een wiskunde-neutrale mbo-opleiding zonder verrijking van het schoolleerplan;
- een leerroute ten behoeve van doorstroom naar havo en naar een wiskunde-intensieve mbo-opleiding met verrijking gericht op doorstroom naar havo; zoals eerder beschreven is dergelijke verrijking ook relevant voor doorstroom naar wiskunde-intensieve mbo-opleidingen.

Programmering van leerroutes

Hoe worden de verschillende leerroutes geprogrammeerd? In onderstaande figuren wordt een aantal varianten geschetst met twee leerroutes. Uitgangspunt daarbij is een dakpanklas tl/havo in de onderbouw, waarna leerlingen doorstromen naar havo of naar de theoretische leerweg.



Figuur 4: Variant A met enkelvoudige determinatie na de onderbouw



Figuur 5: Variant B met getrapte determinatie

Bij de keuze van een programmeringsvariant kan een school zich laten leiden door de volgende overwegingen.

- Leren formeel en abstract denken en handelen kan het beste zo vroeg mogelijk beginnen. Dit kost tijd en aandacht, omdat leerlingen dit niet van nature beheersen en hier als het ware "in moeten groeien". Stap voor stap en onder leiding van een docent vanuit concrete situaties en informeel denken en handelen naar een formeler en abstracter denk- en handelingsrepertoire.
- In de theoretische leerweg moeten leerlingen al beschikken over een zeker niveau van probleemoplossend vermogen. Dit houdt in dat ze beschikken over probleemoplossingsstrategieën en zogenaamde heuristieken. Heuristieken zijn handvatten en vuistregels die bij oplossing van problemen gebruikt kunnen worden. Een leerling die een hoger niveau wil of moet bereiken op dit gebied, bouwt voort op wat hij al kan. Daarom is het niet noodzakelijk vroegtijdig met versterking van het probleemoplossend vermogen te beginnen.

Determinatie
In beide programmeringsvarianten vindt determinatie plaats. Bij variant A gebeurt dat aan het einde van de onderbouw en nadien niet meer. In variant B is determinatie meer een proces, omdat er voor tl-leerlingen twee determinatiemomenten zijn. Leerlingen die na de onderbouw niet rechtstreeks doorstromen naar het havo, kunnen via de verrijkingsroute alsnog een havodiploma behalen, zij het dat ze er dan een jaar langer over doen. Voor een aantal leerlingen kan dit een voordeel zijn.

3.2 Verrijking in de les

Als verrijking aan alle leerlingen aangeboden wordt, zitten alle leerlingen bij elkaar in de klas. De lessen kennen leerinhouden en –activiteiten op tl-niveau plus verrijkingsonderdelen. De docent kan deze expliciet als zodanig presenteren, maar kan ook doen alsof ze deel uitmaken van de leerinhouden op tl-niveau. Dat laatste kan voorkomen dat leerlingen die al gekozen

hebben voor een wiskunde-neutrale vervolgopleiding in het mbo hun interesse in de verrijkingsonderdelen verliezen.

Wordt verrijking aan slechts een beperkt deel van de leerlingen aangeboden, dan zijn er verschillende differentiatievormen mogelijk:

- De leerlingen die verrijkingsonderdelen volgen, worden in aparte groepen geplaatst.
- Alle leerlingen zitten bij elkaar en de verrijkingsonderdelen worden in extra lessen aangeboden. Deze vorm wordt veel toegepast op scholen die hun havo-doorstromers een aansluitingsprogramma aanbieden.
- Alle leerlingen zitten bij elkaar en de verrijkingsonderdelen worden aan betrokken leerlingen aangeboden; de andere leerlingen werken op deze momenten zelfstandig.

In het project is op twee scholen geëxperimenteerd met een aansluitingsprogramma tl-havo. Conclusie: het is nauwelijks mogelijk in een kortlopend aansluitingsprogramma leerlingen op een hoger niveau van formeel en abstract denken en handelen te brengen. Dat blijkt in 4 havo vooral bij de beheersing van algebraïsche vaardigheden. Er is wel sprake van enig effect als er meer tijd beschikbaar is (bijvoorbeeld dertig lesuren, verdeeld over het vierde leerjaar), en als de docent expliciet aandacht besteedt aan formele en abstracte wiskunde, bijvoorbeeld in taal en notatie.

Op het Montessori College Twente is geëxperimenteerd met onderstaand model voor gedifferentieerde lessen in leerjaar drie van een verrijkte leerroute.

Figuur 6: Gedifferentieerd lesmodel uit de pilot op het Montessori College Twente

Het lesmodel had niet de beoogde uitwerking. De mavo-leerlingen die zelfstandig eenvoudige opgaven moesten maken op de momenten dat de docent havo-doorstromers bediende, misten de hulp van de docent. Misschien moeten leerlingen wennen aan een lesmodel waarin ze niet altijd op de volle aandacht van de docent kunnen rekenen. Ook kan in een dergelijk model overwogen worden uitleg van havo-stof op een andere manier te doen, bijvoorbeeld met behulp van filmpjes of andere vormen van ict.

3.3 Toetsing

Als verrijkingsonderdelen niet getoetst worden, nemen leerlingen de verrijkingsonderdelen waarschijnlijk niet serieus. Verrijkingsonderdelen mogen aan het (school)examenprogramma worden toegevoegd op grond van het examenprogramma[1]. Dit is echter niet wenselijk, want het leidt tot een verzwaring van het examen. De resultaten die een leerling behaalt op verrijkingsonderdelen in een toets kunnen verder een rol spelen in de determinatie van leerlingen.

Als verrijkingsonderdelen getoetst worden in het kader van determinatie, is voorzichtigheid geboden. Een leerling die voldoet aan de afspraken uit de toelatingscode tl-havo van de VO-raad kan op een havo-afdeling van een school niet geweigerd worden, ook al is de tl-afdeling op grond van zijn determinatiesystematiek van mening dat hij ongeschikt is om door te stromen naar 4 havo Bovendien is wiskunde niet voor alle havo-profielen vereist.

Een school kan ervoor kiezen naast tl-toetsen afzonderlijke verrijkingstoetsen af te nemen. Dit zal vooral het geval zijn als verrijkingsonderdelen slechts aan een beperkt deel van de leerlingen aangeboden worden.
Worden verrijkingsonderdelen mee getoetst in reguliere toetsen, dan zijn er meerdere toetsvarianten.

Opgaven toegoegen

Opgaven over verrijkingsonderdelen worden toegevoegd aan de toets. Leerlingen die deze verrijkingsopgaven willen maken, moeten dat in dezelfde tijd doen als de andere leerlingen. Daarmee wordt eveneens getoetst in hoeverre deze leerlingen de opgaven op tl-niveau vlotter kunnen maken dan de andere leerlingen.

Voorbeeld van een toetsopgave met een toegevoegde verrijkingsopgave (cursief weergegeven)

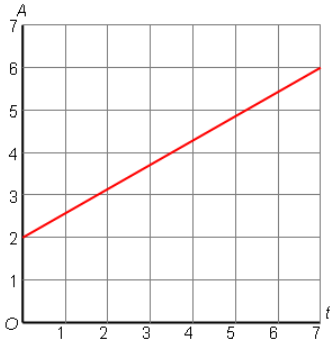
De vader van Naomi heeft een auto gekocht.
De waarde van deze auto daalt elk jaar.
Hierbij hoort de formule **waarde in € = 10 000 – 1500 × aantal jaren**.

1p	**M1**	Hoeveel heeft de vader van Naomi voor de auto betaald?
1p	**M2**	Hoeveel euro daalt de auto elk jaar in waarde?
2p	**M3**	Hoeveel is de waarde van de auto na drie jaar?
4p	**M4**	Teken de grafiek bij de formule op het werkblad.
2p	**M5**	Wat is het maximum van de grafiek?
2p	***H6***	*Schrijf de formule in de vorm y = ax + b*

[1] Uit het examenprogramma wiskunde vmbo-tl (*cursivering door de auteur*): "Daarnaast heeft het schoolexamen betrekking op:

- ten minste die exameneenheden die deel uitmaken van het examenprogramma van deze leerweg voor zover zij niet deel uitmaken van het centraal examen voor die leerweg;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer exameneenheden waarop het centraal examen betrekking heeft;
- *indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen die relevant zijn voor het betreffende vak of examenprogramma, die per kandidaat kunnen verschillen.*"

Voorbeeld van een toetsopgave met een toegevoegde verrijkingsopgave



Een grafiek loopt evenwijdig aan de grafiek in de figuur en gaat door het punt (0, 5). Schrijf de formule op van deze grafiek.

Stel een formule op van de lijn die evenwijdig loopt aan de lijn in de grafiek en door (9,-4) gaat.

Testing by outcome

De toets bevat opgaven waarvan de uitwerking door een leerling een indicatie geeft in hoeverre hij verrijkingsonderdelen uit het leerplan beheerst. Dit heet "testing by outcome" en heeft niet het bezwaar van toegevoegde verrijkingsopgaven.

Welke formule hoort bij de tabel? Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

t	1	2	3
inhoud in cm³	280	260	240

Kies uit:

I *inhoud* in $cm^3 = 200 + 30t$

II *inhoud* in $cm^3 = 300 - 20t$

III *inhoud* in $cm^3 = 300 + 20t$

IV *inhoud* in $cm^3 = 200 - 30t$

Volgens de lesmethode kan deze opgave opgelost worden door middel van trial-and-error. Formules I, III en IV vallen af omdat de uitkomst voor $t = 1$ niet overeenstemt met die in de tabel. De juiste formule moet daarom wel II zijn.

Een alternatieve oplossingswijze bestaat eruit de afname van de uitkomsten in de tabel te bepalen (= 20) en daaruit de concluderen dat formules I en IV afvallen. De derde formule valt af omdat de richtingscoëfficiënt positief is en de uitkomsten in de tabel afnemen.

Een leerling die de tweede oplossingswijze volgt, geeft er daarmee blijk van dat hij de formules als zelfstandige objecten kan analyseren. In de eerste oplossingswijze worden formules enkel als rekenvoorschriften gebruikt. De tweede oplossingswijze vereist een abstracter denkniveau ten aanzien van lineaire formules.

De resultaten op verrijkingsopgaven vormen een indicatie voor welke leerroute het meest passend voor een leerling is. Dat betekent niet dat dit de enige indicator is. Veel factoren bepalen het succes van een leerling in zijn vervolgonderwijs: zijn vakspecifieke cognitieve ontwikkeling, zijn leer- en andere vaardigheden en zijn leerhouding. Over al deze factoren kan

een wiskundedocent zich een oordeel vormen op basis van enerzijds toetsresultaten en anderzijds observatie van leerlingen en leerlingwerk. Wil een docent door middel van observatie een beeld krijgen van de wiskundespecifieke cognitieve ontwikkeling van een leerling, dan kan hij kijken naar de manier waarop een leerling de opgaven heeft opgelost, naar diens notatie van die oplossingswijze en het gebruik van vaktermen.

SLO heeft in 2015 *Een instrumentarium voor determinatie in de theoretische leerweg van het vmbo* uitgebracht. In bijlage E wordt uitgelegd hoe een wiskundedocent dit instrument kan gebruiken.

4. Conclusies

De doorstroomproblematiek is in de theoretische leerweg complexer dan in andere leerwegen en onderwijssectoren, omdat er sprake is van zowel doorstroom *binnen* de opleidingskolom (naar het mbo) als doorstroom naar een *andere* opleidingskolom (havo – hbo). Doorstroom naar een andere opleidingskolom geeft vaak aanleiding tot aansluitingsproblemen, terwijl die in mindere mate voorkomen bij doorstroom in dezelfde opleidingskolom.

De aansluiting naar de vervolgopleidingen van de theoretische leerweg vormt daarop geen uitzondering. Het examenprogramma wiskunde van de theoretische leerweg biedt voldoende voorbereiding voor leerlingen die doorstromen naar een wiskunde-neutrale mbo-opleiding. Voor wiskunde-intensieve mbo-opleidingen is dat ook het geval. Maar als de mogelijkheid er is, kan het geen kwaad leerlingen die naar dergelijke opleidingen doorstromen, een verrijkt wiskundeleerplan aan te bieden. Voor doorstromers naar 4 havo ten slotte is verrijking wenselijk. Zowel doorstromers naar wiskunde-intensieve mbo-opleidingen als naar 4 havo kunnen baat hebben bij versterking van hun formeel en abstract denk- en handelingsvermogen. Daarom is het mogelijk doorstromers naar havo en doorstromers naar een wiskunde-intensieve mbo-opleiding min of meer hetzelfde verrijkingsprogramma aan te bieden.

Het formeel en abstract denk- en handelingsniveau van tl-leerlingen kan op verschillende manieren worden verhoogd. Daarbij zijn er volgende aandachtspunten.

- Leerlingen met een hoog wiskundecijfer in de theoretische leerweg geven daarmee vooral blijk van een groot probleemoplossend vermogen, maar niet noodzakelijk van een hoog niveau van formeel en abstract denken en handelen.
- Verhoging van het niveau van denken en handelen is niet iets dat in een korte wiskundecursus na afloop van het eindexamen bereikt kan worden, maar vergt doorgaans meer inspanning en doorlooptijd.
- Werken aan niveauverhoging kan gecombineerd worden met verwerving van wiskundeleerstof die geen deel uitmaakt van het examenprogramma. Dit leidt tot een dubbele leerinspanning: formeler of abstracter moeten leren denken en handelen én zich een nieuw onderwerp eigen moeten maken. Om deze reden verdient het aanbeveling voor betreffende leerlingen niveauverhoging na te streven met bekende leerstof als basis.

5. Literatuurlijst

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R. et al. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives.* New York NY: Addison Wesley Longman, Inc.

Drost, M., & Verra, P. (2013). *Handboek RTTI.* Bodegraven: Docentplus.

Groenestijn, M. van, Huisman, J., Jonker, V., Wijers, M., & Zwaart, P. van der. (2007). *Raamwerk rekenen/wiskunde mbo.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Haan, D. de, & Spijkerboer, L. (2013). Tussendoelen havo/vwo-3, voorbeeldopgaven. *Euclides, 88*,4, 169 - 172.

Halewijn, M. (z.d.). *RTTI voor Wiskunde NVvW*. Geraadpleegd op 20 november 2014 van http://prezi.com/vlyvvjrsyu9u/rtti-voor-wiskunde-nvvw/.

Jansma, N., Kleunen, E. van, & Schmidt, V. (2011). *Scenario's voor de aansluiting tussen vmbo-tl en havo*. Enschede: SLO.

Lahuis, A. (1986). *De beschrijving van onderwijsdoelstellingen in schoolwerkplanpublikaties. Over affectieve en andere onderwijsdoelstellingen.* Enschede: SLO.

Onderwijsraad. (2009). *Ervaren deficiënties door havo en mbo-opleidingen in de basisbagage van vmbo'ers*. Den Haag: Onderwijsraad.

SLO. (2012). *Concept-tussendoelen wiskunde havo/vwo*. Geraadpleegd op 20 november 2014 van http://www.slo.nl/downloads/documenten.

Sniekers,J., Jansma,N., & Lanschot Hubrecht, V. van SLO (2015). *Een instrumentarium voor determinatie in de theoretische leerweg van het vmbo*. Geraadpleegd van http://www.slo.nl/theoretischeleerweg

Son, H. van. (2012). *Opstroommodules van vmbo g/tl naar havo 4 voor het vak wiskunde* (herziene versie). Enschede: SLO.

Spijkerboer, L., Bootsma, G. & Denijs, W. (2007). *Determinatie en toetsen.* Utrecht: APS.

Wolters, C. (2013). *Verder leren op de havo met vmbo-diploma op zak*. (masterthese). Hogeschool van Amsterdam.

Bijlage A Tussendoelen havo en examenprogramma wiskunde-tl

In deze bijlage staan alle inhoudelijke tussendoelen voor de onderbouw havo met hun specificaties. Bij elke specificatie wordt vermeld of ze deel uitmaakt van het examenprogramma vmbo-tl.

Domein B: Getallen en Variabelen

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein B1: Getallen, getalsystemen en -relaties 5. De leerling kan positieve en negatieve getallen, grote getallen, breuken en decimale getallen gebruiken en hun onderlinge samenhang toelichten en beschrijven. **De leerling kan:**		
5.1	Structuur en opbouw van het tientallig stelsel beschrijven en gebruiken: tientallig stelsel, gehele getallen, natuurlijke getallen.	Formeel niet, maar vormt noodzakelijke voorkennis
5.2.	Relaties tussen getallen of expressies benoemen en beschrijven met passende symbolen: tegengesteld, groter dan, kleiner dan, gelijk aan, ongelijk aan, >, <, ≤, ≥, ≠, ≈, =.	Ja
5.3	Eigenschappen noemen van een getal (even, oneven, veelvoud, deler, priemgetal): deelbaar, even, oneven, veelvoud, deler, priemgetal.	Nee
5.4	Passende vaktaal voor getallen herkennen en gebruiken in een probleemsituatie: wortel, kwadraat, macht, grondtal, exponent, breuk, teller, noemer, deelstreep, positief, negatief, decimaal.	Ja
5.5	De schrijfwijze van breuken en decimale getallen herkennen en gebruiken.	Ja
5.6	Breuken en decimale getallen in elkaar omzetten, vergelijken, ordenen en plaatsen op een getallenlijn.	Ja
5.7	Benoemen dat er getallen zijn zoals het getal π en wortels die niet te schrijven zijn als breuk en deze getallen ordenen, vergelijken en plaatsen op een getallenlijn.	Nee
5.8	De schrijfwijze van negatieve getallen herkennen en gebruiken, negatieve getallen plaatsen op een getallenlijn en negatieve getallen benoemen als een uitbreiding van een getalsysteem.	Ja

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein B2: Rekenen met getallen 6. De leerling kan berekeningen uitvoeren met breuken, machten, wortels, negatieve getallen, decimale getallen, grote en kleine getallen en daarbij gebruik maken van de eigenschappen van getallen en bewerkingen. **De leerling kan:**		
6.1	Voorrangsregels voor een volgorde van bewerkingen beschrijven en gebruiken, ook bij het plaatsen en wegwerken van haakjes: haakjes, som, product, quotiënt, verschil.	Ja, met uitzondering van wegwerken van haakjes
6.2	Situaties vertalen naar een bewerking, deze uitvoeren en het resultaat van een berekening afronden in overeenstemming met de gegeven situatie: afronden, schatten.	Ja
6.3	Een uitkomst van een berekening vooraf schatten en de correctheid van rekenkundige redeneringen en de uitkomst verifiëren.	Ja, met uitzondering van de correctheid van rekenkundige redeneringen verifiëren
6.4	Bij berekeningen de rekenmachine vaardig gebruiken en met beleid en begrip inzetten en gegeven uitkomsten kritisch beoordelen: verschil – en (-).	Ja
6.5	De wetenschappelijke notatie van grote en kleine getallen beschrijven en gebruiken inclusief de vertaling naar de rekenmachine.	Ja
6.6	Getallen substitueren voor variabelen in algebraïsche expressies en hiermee rekenen.	Ja

	Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein B3: Rekenen met variabelen 7. De leerling kan berekeningen uitvoeren met variabelen en daarbij gebruik maken van de algebraïsche basisbewerkingen. **De leerling kan:**	
7.1 Passende vaktaal voor algebraïsche vaardigheden herkennen en gebruiken: gelijkwaardig met, term, factor, variabele.	Nee
7.2 Expressies herleiden door haakjes weg te werken, ontbinden in factoren, gelijksoortige termen samennemen en rekenregels voor machten toe te passen.	Nee, hoewel sommige lesmethoden wel aandacht schenken aan letterrekenen
7.3 Verschil van twee kwadraten als $a^2 - b^2$ herkennen en gebruiken als merkwaardig product.	Nee

	Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein B4: Tellen **De leerling kan:**	
8. Bij telproblemen de situatie ordenen door systematisch uitschrijven of met een schema of diagram.	Nee, maar kan deel uit maken van het onderwerp grafen

Domein C: Verhoudingen

	Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Domein C: Verhoudingen 9. De leerling kan verhoudingsvraagstukken herkennen en oplossen door gegevens te ordenen en gebruik te maken van de relaties tussen verhoudingen, breuken, decimale getallen en percentages. **De leerling kan:**	
9.1 Passende vaktaal voor verhoudingen herkennen en gebruiken in probleemsituaties: relatief, absoluut, per, deel van, op de, van de, staat tot, procent, percentage, evenredigheid, in verhouding.	Ja
9.2 Percentages (ook boven de 100) omzetten in een vermenigvuldigingsfactor en omgekeerd en daarmee rekenen (ook met machten), evenals met percentages van percentages.	Ja
9.3 Een berekening met procenten uitvoeren.	Ja
9.4 Bepalen op welke schaal iets getekend is en een tekening op schaal maken.	Ja, met uitzondering van bepalen op welke schaal iets getekend is
9.5 Verhoudingen toepassen bij het oplossen van problemen (ook in meetkunde en statistiek): vergrotingsfactor, (verhoudings)factor, verhoudingstabel.	Ja
8.6 De uitkomst van een toevalsexperiment uitdrukken in een verhouding en een percentage.	Nee, maar sommige methoden schenken aandacht aan kansrekening

Domein D: Meten en meetkunde

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein D1: Rekenen in de meetkunde 10. De leerling kan meten met liniaal en geodriehoek, structuur en samenhang van het metriek stelsel beschrijven en rekenen met maten voor grootheden die gangbaar zijn in relevante toepassingen. **De leerling kan:**		
10.1	Passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het rekenen in de meetkunde: rechte hoek, stompe hoek, scherpe hoek, gestrekte hoek, graden, □ , ∟ (┐), ⊥, ^{0}.	Ja
10.2	Een geschikte maateenheid kiezen bij een situatie of berekening, deze maten voor lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht gebruiken en deze in gelijkwaardige maten omrekenen met gebruik van de voorvoegsels milli-, centi-, deci-, deca-, hecto-, kilo-.	Ja, met uitzondering van deci, deca, hecto en van een geschikte maateenheid kiezen
10.3	Lengte (van lijnstukken), oppervlakte en omtrek (van driehoek, vierkant, rechthoek, parallellogram, ruit, cirkel en figuren die daaruit zijn opgebouwd) en inhoud (van kubus, balk, cilinder, piramide, prisma en kegel) berekenen met de stelling van Pythagoras en/of relevante formules.	Ja, maar tl-leerlingen hoeven oppervlakte- en inhoudsformules niet uit het hoofd te kennen
10.4	De grootte van hoeken berekenen met behulp van de regel “de som van de hoeken in een driehoek is 180°” en met F-hoeken, Z-hoeken, overstaande hoeken, en de verhouding van twee zijden van een (rechthoekige) driehoek: F-hoeken, Z-hoeken, overstaande hoeken, goniometrische verhoudingen, sinus, cosinus, tangens, hellingshoek.	Ja

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein D2: Vormen en figuren 11. De leerling kan gebruiken van en kijken naar vlakke en ruimtelijke vormen en structuren, daarvan afbeeldingen of een ruimtelijke voorstelling maken, interpreteren en redeneren met hun eigenschappen. **De leerling kan:**		
11.1	Meetkundige afbeeldingen en ruimtelijke situaties, ook op schaal, interpreteren. En kan hierbij gebruik maken van aanzichten, uitslagen, doorsneden, plattegronden, symmetrie en kaarten: kijklijn, aanzicht, uitslag, draai-, lijn- en puntsymmetrie, meetkundige constructie, doorsnede, plattegrond.	Ja
11.2	Meetkundige tekeningen maken, beschrijven en voorzien van inhoudelijke toelichting en ruimtelijke situaties in tekeningen weergeven, zo nodig op schaal. Hierbij gebruik maken van aanzichten, uitslagen, doorsneden, plattegronden en kaarten: in- en omgeschreven cirkel van een driehoek, de deellijn van een hoek, de loodlijn op een lijnstuk.	Ja, met uitzondering van in- en omgeschreven cirkel en loodlijn
11.3	Ruimtelijke en vlakke figuren herkennen, benoemen, beschrijven, onderscheiden en tekenen: driehoek, parallellogram, vierkant, rechthoek, ruit, cirkel, kubus, balk, prisma, piramide, cilinder, kegel, bol, trapezium, veelhoek.	Ja
11.4	Passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het beschrijven en tekenen van en het redeneren met meetkundige figuren: straal, middelpunt, diameter, middellijn, gelijkbenig, gelijkzijdig, rechthoekig, (lichaams)diagonaal, diagonaalvlak, loodlijn, middelloodlijn (van een zijde), deellijn (van een hoek), zwaartelijn, zwaartepunt, hoogtelijn (in een driehoek), symmetrieas, uitslag, zijvlak, ribbe, hoekpunt, loodrecht, evenwijdig, // en Δ.	Ja, met uitzondering van loodlijn, middelloodlijn, zwaartelijn en zwaartepunt
11.5	Gebruiken van en redeneren over gelijkvormigheid: evenwijdige lijnen, snijdende lijnen, richting, afstand, gelijkvormigheid.	Ja

Domein E: Verbanden en formules

	Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein E1: Grafieken, tabellen en formules 12. De leerling kan een grafiek, tabel, (woord)formule en situatiebeschrijving met elkaar in verband brengen, vergelijken en in een probleemsituatie een adequate keuze voor een representatie maken. **De leerling kan:**	
12.1 Bij een situatiebeschrijving, tabel of (woord)formule met de hand een passende grafiek tekenen.	Ja
12.2 Een geschikte vorm kiezen om een patroon of structuur te beschrijven (met tabel, woordformule of grafiek).	Nee
12.3 Globale en lokale informatie uit een grafiek aflezen, interpreteren en beschrijven met behulp van passende terminologie: stijgen, dalen, constant, minimum, maximum, top, dal, helling, periode, amplitude, evenwichtsstand.	Ja
12.4 Passende vaktaal voor grafieken, tabellen en formules herkennen en gebruiken in een probleemsituatie: snijden, snijpunt, assenstelsel, coördinaten, afhankelijke en onafhankelijke variabele, grootheid, eenheid.	Ja, met uitzondering van grootheid en eenheid
12.5 De som of het verschil maken van twee gegeven verbanden met tabellen, grafieken of formules en het resultaat interpreteren.	Ja
12.6 Grafieken van lineaire en kwadratische verbanden verticaal verschuiven en vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as en het effect op de formule beschrijven.	Ja
12.7 Interpoleren en extrapoleren in een grafiek door aflezen.	Ja, met uitzondering van extrapoleren
12.8 Passende vaktaal herkennen en gebruiken voor verbanden in een probleemsituatie en vertalen naar die situatie: omgekeerd evenredig, hyperbool, wortelformule, machtsverband, periodiek.	Ja, met uitzondering van de termen omgekeerd evenredig en hyperbool
12.9 Op grond van de structuur van grafiek, tabel of formule redeneren over het onderliggende verband: constant verband, wortelverband, omgekeerd evenredig verband, periodiek verband of machtsverband.	Genoemde verbanden maken deel uit van het examenprogramma tl, maar er over redeneren niet

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein E2: Lineaire verbanden 13 De leerling kan een lineair verband aan de hand van de grafiek, situatie en/of tabel herkennen, beschrijven en onderscheiden van andere typen verbanden. **De leerling kan ….**		
13.1	in een veelheid aan lineaire contexten het 'vaste deel' en het 'variabele deel' benoemen en berekenen en met passende vaktaal beschrijven: steilheid, rechte lijn, startgetal (vast deel), richtingscoëfficiënt of helling, (variabel deel), lineair.	Ja, met uitzondering van de termen richtingscoëfficiënt en evenredig
13.2	een formule in de vorm $y = ax + b$ opstellen bij een door een situatie, tabel of grafiek gegeven lineair verband.	Ja
13.3	de overgangen tussen de verschillende representaties (formule, tabel, grafiek, situatiebeschrijving) van een lineair verband in alle richtingen maken.	Ja
13.4	een lineair verband herkennen aan de formule in de vorm $y = ax + b$.	Ja
13.5	recht evenredigheid herkennen.	Nee, maar wel in andere vakken

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein E3: Exponentiële verbanden 14 De leerling kan exponentiële groei in eenvoudige situaties (eventueel met daarin een tabel) onderzoeken, herkennen en beschrijven. **De leerling kan ….**		
14.1	passende vaktaal herkennen en gebruiken voor exponentiële verbanden in een eenvoudige situatie en vertalen naar die situatie: groeifactor, beginhoeveelheid, exponentieel.	Ja
14.2	vanuit een situatie, tabel of grafiek de groeifactor en beginhoeveelheid bepalen en een passende exponentiële formule (van de vorm $y = ax^b$) opstellen.	Ja, met uitzondering van groeifactor en beginhoeveelheid vanuit situatie of grafiek bepalen
14.3	bij een exponentiële formule de grafiek tekenen met behulp van een tabel.	Ja
14.4	het kenmerk van exponentiële groei omschrijven en herkennen bij een gegeven tabel of grafiek en het verschil met lineaire groei beschrijven.	Ja, met uitzondering van verschil met lineaire groei beschrijven

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein E4: Kwadratische verbanden 15 De leerling kan in een daarvoor geschikte context, bijvoorbeeld die van oppervlakte, een kwadratisch verband herkennen, beschrijven en gebruiken voor het oplossen van problemen. **De leerling kan ….**		
15.1	passende vaktaal herkennen en gebruiken rond grafieken van kwadratische verbanden: dalparabool, bergparabool, symmetrieas, top, kwadratisch.	Nee, maar sommige methoden noemen deze begrippen wel
15.2	een kwadratisch verband herkennen aan de vorm van de formules $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x – b)^2 + q$ en $y = a(x – c)(x – d)$ en de bijbehorende grafiek tekenen.	Nee, maar in recente examens komen kwadratische formules van de eerste vorm voor

	Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein E5: Patronen en regelmaat 16. De leerling kan regelmaat in (meetkundige) patronen en tabellen herkennen, voortzetten en beschrijven. **De leerling kan:**	
16. Regelmaat in (meetkundige) patronen en tabellen herkennen, voortzetten en beschrijven.	Ja

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Subdomein E6: Vergelijkingen en ongelijkheden 17 De leerling kan de waarde(n) van een variabele berekenen door de waarde(n) van één of meer andere variabelen in een formule te substitueren, of door twee formules met elkaar te vergelijken. **De leerling kan ….**		
17.1	Twee verbanden vergelijken met behulp van grafiek of tabel en een conclusie trekken over de beschreven situatie.	Ja
17.2	Eerstegraadsvergelijkingen oplossen en interpreteren binnen de context.	Ja
17.3	Het snijpunt van twee rechte lijnen berekenen en interpreteren binnen de context.	Ja
17.4	kwadratische vergelijkingen oplossen met een geschikte oplossingsstrategie en vereiste precisie zoals direct aflezen, ontbinden in factoren of de abc-formule en interpreteren binnen de context.	Nee, met uitzondering van direct aflezen
17.5	exponentiële vergelijkingen van de vorm $a^x = p$ oplossen door een numerieke benadering met behulp tabel en/of grafiek.	Ja
17.6	vergelijkingen van het type $x^3 = c$ ($c > 0$) exact oplossen: derdemachtswortel.	Nee
17.7	lineaire en kwadratische ongelijkheden oplossen met behulp van een grafische aanpak.	Ja, met uitzondering van kwadratische ongelijkheden

		Komt voor in het examenprogramma wiskunde-tl?
Domein F: Informatieverwerking en onzekerheid 18 De leerling kan data verzamelen, ordenen, interpreteren en vergelijken en grafische representaties van data maken, ook met behulp van technologie. **De leerling kan ….**		
18.1	grafische weergaven van data (tabel, diagram) aflezen en interpreteren.	Ja
18.2	data verzamelen, ordenen, samenvatten en vergelijken met behulp van centrummaten: gemiddelde, modus, mediaan en spreidingsmaten: spreidingsbreedte en kwartielafstand en conclusies trekken.	Ja, maar de genoemde centrum- en spreidingsmaten staan niet vermeld in het examenprogramma
18.3	bij datasets (van eenvoudige, praktische contexten) uitspraken doen over kansen beoordelen en voorspellingen doen.	Nee
18.4	passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het verwerken, aflezen, representeren en vergelijken van dataverzamelingen: absolute en relatieve frequentie, frequentietabel, staafdiagram, cirkeldiagram, boxplot, steelbladdiagram, histogram, lijndiagram, klassenbreedte, klassenmidden.	Ja, maar de genoemde termen staan niet vermeld in het examenprogramma

Bijlage B Examenprogramma wiskunde en referentieniveau 3F

Mbo-kwalificaties van niveau 4 zijn voor een groot deel wiskunde-neutraal, dat wil zeggen: vereisen voor de beoefening van het beroep beheersing van reken-/wiskundevaardigheden op een niveau dat het wettelijk voorgeschreven niveau 3F niet overschrijdt. Daarnaast zijn er wiskunde-intensieve mbo-kwalificaties van niveau 4, waarbij het beroep beheersing van reken-/wiskundevaardigheden op een hoger niveau dan 3F vereist. In een aantal gevallen gaat het hier om een losse vaardigheid die niet in referentieniveau 3F beschreven wordt, zoals logaritmische schaalverdelingen of toepassing van goniometrische verhoudingen bij de brekingswet van Snellius.

Bij negen van de 231 kwalificaties van dit niveau vermeldt het kwalificatiedossier dat 3F niet voldoende is voor beoefening van het beroep en dat er "meer wiskunde noodzakelijk is". Acht van deze kwalificaties vallen onder kenniscentrum Fundeon. Dit kenniscentrum beschikt over meer informatie welke reken-/wiskundeniveaus het voor deze kwalificaties noodzakelijk acht.

Deze vereisten zijn beschreven met behulp van een voorloper van het Referentiekader rekenen, te weten het Raamwerk rekenen / wiskunde mbo. Dit raamwerk is in 2007 ontwikkeld door een aantal samenwerkingspartners en is in 2008 en 2009 gebruikt om de reken-/wiskundevereisten van mbo-kwalificaties vast te leggen. Toen in 2010 het Referentiekader rekenen voorgeschreven werd, zijn alle vereisten beschreven in termen van referentieniveaus uit dit referentiekader. Daartoe zijn destijds referentieniveaus 2F en 3F geconverteerd naar dit raamwerk. Deze "conversietabel" is door kenniscentra, ook door Fundeon, vaak gebruikt om de reken-/wiskundevereisten van kwalificaties in termen van referentieniveaus te beschrijven.

Het Raamwerk rekenen / wiskunde mbo kent vier inhoudsdomeinen: Getallen, hoeveelheden en maten ("Rekenen"), Ruimte en vorm ("Meetkunde"), Gegevensverwerking en onzekerheid ("Statistiek en kansrekening") en Verbanden, veranderingen en formules ("Algebra en analyse") en zes beheersingsniveaus: van onder naar boven X1, X2. Y1, Y2, Z1 en Z2. Van elke combinatie van inhoudsdomein en beheersingsniveau (de cellen in het schema) bestaat een beschrijving in termen van vaardigheden en wiskundige inhoud. Daarnaast bevatten de beschrijvingen voorbeelden.

In de figuur 7 wordt weergegeven hoe referentieniveau 3F volgens de conversietabel in dit raamwerk past.

	Rekenen	Meetkunde	Statistiek en kansrekening	Algebra en analyse
Z2				
Z1				
Y2				
Y1				
X2				
X1				

Figuur 7: Referentieniveau 3F in het raamwerk rekenen – wiskunde

Het is ook mogelijk om het examenprogramma wiskunde in dit raamwerk te plaatsen. Op basis van de beschrijvingen in het raamwerk geeft onderstaande figuur weer welke inhouden en niveaus aangeboden worden aan leerlingen die het examen wiskunde-tl afleggen. Bij het

inhoudsdomein Rekenen staan in niveau Y2 van het Raamwerk twee voorbeelden die leerlingen met tl-wiskunde niet kunnen oplossen en daarom is Y2 geel ingekleurd.

Daarnaast veronderstelt niveau Y2 dat leerlingen in staat zijn problemen op te lossen met behulp van een wiskundig model. Het probleem wordt vertaald naar een wiskundig model dat los van de probleemstelling wordt opgelost. Dit is een meer formeel niveau van probleem oplossen dan een oplossing te zoeken in de probleemcontext zelf of met behulp van een visuele of schematische voorstelling. Dit formele niveau komt in de theoretische leerweg wel voor bij problemen die reken- of meetkundig van aard zijn, maar bij problemen uit de andere inhoudsdomeinen amper.

	Rekenen	Meetkunde	Statistiek en kansrekening	Algebra en analyse
Z2				
Z1				
Y2				
Y1				
X2				
X1				

Figuur 8: Examenprogramma wiskunde vmbo-tl in het raamwerk rekenen - wiskunde

Uit deze en de vorige figuur blijkt dat het "tl-gebied" dat van referentieniveau 3F in zijn geheel overdekt en daaruit kan geconcludeerd worden dat wiskunde-tl referentieniveau 3F omvat.

Bijlage C Verrijkingsmogelijkheden formalisatie en abstractie

Deze bijlage bevat een aantal verrijkingsmogelijkheden bij elk van de inhoudelijke hoofdonderwerpen van het examenprogramma wiskunde-tl. Door middel van coderingen als AV*x*, RMS*x*, M*x* wordt verwezen naar voorbeeldiuitwerkingen in bijlage D.

Hoofdonderwerp: Algebraïsche vaardigheden

	Verrijkingsmogelijkheden		
Onderwerp	*Kennis*	*Inzicht*	*Vaardigheden*
Lineaire verbanden	Startgetal en richtingscoëfficiënt rechtstreeks uit een lineaire formule aflezen.	Lineaire formules en recht evenredigheid herkennen. Zie AV1	Een formule opstellen op basis van een situatiebeschrijving en rechtstreeks uit een grafiek. Zie AV2
Exponentiële verbanden		Winnende grafieken. Zie AV3	Groeifactor en beginhoeveelheid uit grafiek afleiden.
Wortelverbanden		Redeneren met wortelverbanden. Zie AV4	
Machtsverbanden		Alle grafieken gaan door hetzelfde punt. Zie AV5	
Omgekeerd evenredige verbanden	Term omgekeerd evenredig noemen.	Formules omrekenen. Zie AV6	
Tabellen - algemeen			Kwadratische tabellen herkennen en voortzetten. Zie AV7
Grafieken - algemeen	Termen interpoleren en extrapoleren noemen.	Snijdende grafieken. Zie AV8	Interpoleren met behulp van een formule. Zie AV9

	Verrijkingsmogelijkheden		
Onderwerp	*Kennis*	*Inzicht*	*Vaardigheden*
Werken met formules	Onafhankelijke (IN) en afhankelijke variabele (UIT), grootheid en eenheid als termen noemen. Namen van variabelen. Zie AV10		
Rekenen met formules	Term substitueren noemen.	Twee formules beschrijven hetzelfde verband als ze door middel van een herleiding in elkaar om te zetten zijn. Enkele waarden invullen en de uitkomsten vergelijken geeft nooit uitsluitsel of twee formules gelijkwaardig zijn, wel of twee formules ongelijkwaardig zijn.	Formules herleiden. Zie AV11 Formules combineren zonder pijlenketting. Zie AV12
Voorstellingvormen van verbanden			

Hoofdonderwerp: Rekenen, meten en schatten

	Verrijkingsmogelijkheden		
Onderwerp	*Kennis*	*Inzicht*	*Vaardigheden*
Handig rekenen			
Rekenmachinegebruik		Relaties tussen irrationale wortels onderkennen zonder gebruikmaking van de rekenmachine. Zie RMS1 Oneindig veel decimalen. Zie RMS2 Breuken als zelfstandige getallen beschouwen. Zie RMS3 Een percentage als een zelfstandig object beschouwen. Zie RMS4	
Meten en schatten			
Basisrekentechnieken	Verhoudingentaal. Zie RMS5	Uitleg van de optel- en aftrekregels met behulp van het permanentieprincipe.Zie RMS6. Negatieve getallen invullen. Zie RMS7 Verhoudingen met behulp van variabelen beschrijven. Zie RMS8 Haakjes wegwerken verklaren. Zie RMS9	Breuken ordenen door ze gelijknamig te maken. Zie RMS3 Verhoudingsproblemen zonder verhoudingstabel oplossen. Zie RMS10

Hoofdonder: Meetkunde

	Verrijkingsmogelijkheden		
Onderwerp	*Kennis*	*Inzicht*	*Vaardigheden*
Voorstellingen van objecten	Figuren herkennen op basis van hun eigenschappen. Zie M1	Een verbinding leggen tussen iso-hoogtelijnen en doorsneden. Wat maakt een CT-scan in een ziekenhuis van een menselijk lichaam: aanzichten, doorsneden of uitslagen?	
Schatten, meten en berekenen	Hoeken aanduiden met Griekse letters.	Een schaalverhouding als zelfstandig object beschouwen. Zie M2	
Redeneren en tekenen	Gebruik van de stelling van Pythagoras in een formele weergave. Zie ook M3	Goniometrische verhoudingen als zelfstandig object beschouwen. Zie M4 Geef aan wanneer twee driehoeken gelijkvormig zijn. Zie M5 Redeneeropgaven met gebruikmaking van gelijkvormigheid. Zie M5	

Hoofdonderwerp: Informatieverwerking, statistiek

	Verrijkingsmogelijkheden		
Onderwerp	*Kennis*	*Inzicht*	*Vaardigheden*
Statistische representatievormen		Leg uit hoe je de kwartielafstand kunt aflezen uit een boxplot. Een graaf gebruiken om een toevalsituatie uit te beelden.	
Verwachtingen en conclusies		Een graaf gebruiken om kansen te berekenen.	

Bijlage D Voorbeelduitwerkingen van verrijkingsmogelijkheden

Deze bijlage bevat verrijkingsvoorbeelden die verhoging van het niveau van formeel en abstract denken van leerlingen beogen. De nummering correspondeert met die uit bijlage C.

AV1 Lineaire formules en evenredigheid herkennen

1. Welk van de onderstaande formules zijn lineaire formules?

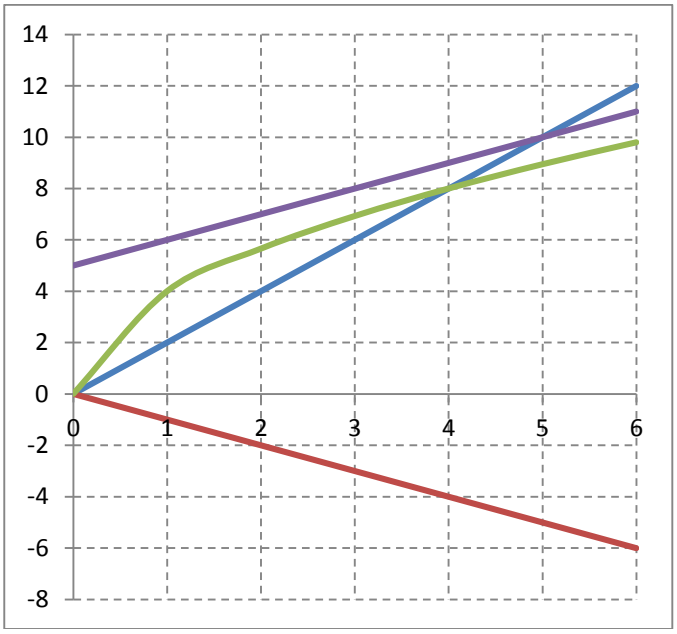
   $y = 2x + 5$
   $y = 5 + 2x$
   $y = 5$
   $y = \frac{2x+5}{4}$
   $2x + 3y = 5$
   $2y + 3x = 5$

2. Wat is bij elk van bovenstaande formules de waarde van *a* en *b* in de algemene vorm $y = ax + b$?

3. Bij welke formules hoort een evenredig verband?

   $y = 2x$
   $y = 2x + 2$
   $y = 2x - 2$
   $y = -2x$
   $y = 2$

4. Welk van onderstaande grafieken horen bij een evenredig verband?



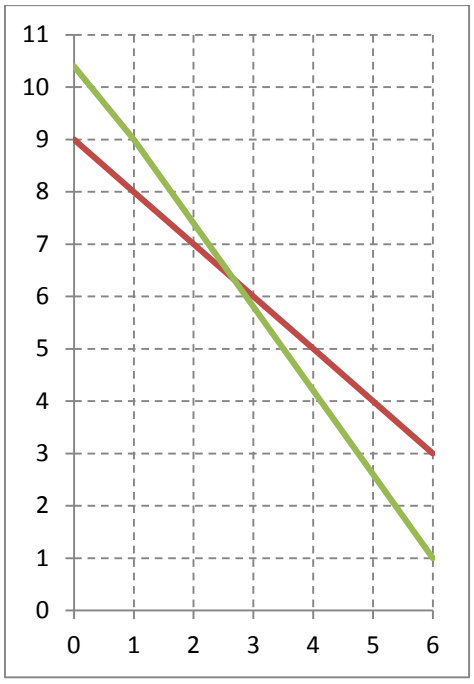
AV2 Een formule bij een lineair verband opstellen

1. In de grafiek hieronder staan twee rechte lijnen.

a) Geef de formule bij het lineair verband waarvan de rode lijn de grafiek voorstelt.

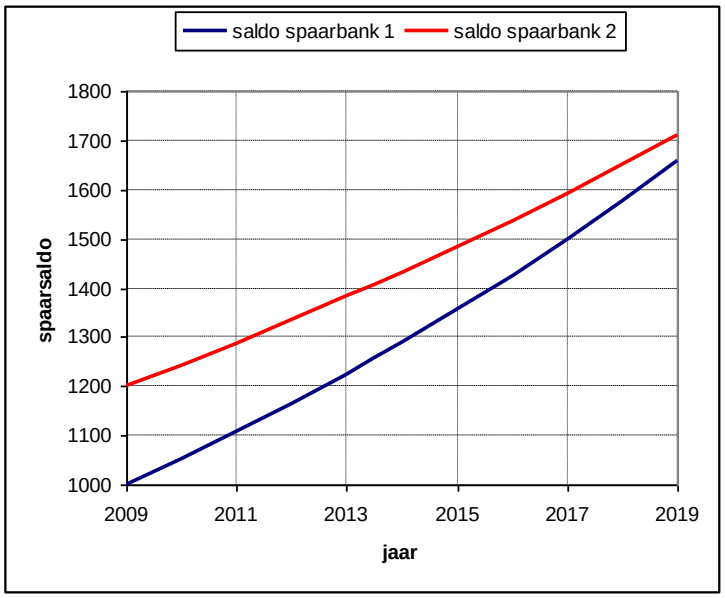
b) Geef de formule bij het lineair verband waarvan de groene lijn de grafiek voorstelt.

c) Op de grafiek van een lineair verband liggen de punten (1,3; 4,5) en (2,5; 9,9). Hoe luidt zijn formule?



AV3 Winnende grafieken

In de onderstaande figuur zie je de groei van een spaarsaldo van € 1000 bij twee verschillende spaarbanken als gevolg van "rente op rente". Bij een van beide banken ontvang je een welkomstpremie van € 200. Leg aan de hand van deze grafiek uit dat het op de lange termijn altijd loont om een spaarrekening met een hoger rentepercentage te kiezen in plaats van een met een laag rentepercentage en een welkomstpremie.



In een land wonen 20 miljoen inwoners. Het land produceert dit jaar voldoende graan om 25 miljoen inwoners te kunnen voeden. De graanproductie neemt jaarlijks lineair toe. De bevolking van het land neemt exponentieel toe. Wat betekent dit op lange termijn voor de graanvoorziening van de inwoners van dit land?

Je hebt van je grootouders € 2500 ontvangen om op een spaarrekening te storten. De spaarbank biedt je twee mogelijkheden:

- er wordt jaarlijks 3% rente over dit bedrag aan je uitgekeerd en als je stopt met sparen ontvang je je inleg van € 2500 terug of:
- je ontvangt jaarlijks 2,5% rente die telkens aan je spaarsaldo wordt toegevoegd. Als je stopt met sparen wordt het gehele spaarsaldo aan je uitgekeerd.

Als je lang wil sparen, wat kun je dan het beste kiezen?

AV4 Redeneren met wortelverbanden

Hoe ver je kunt kijken vanaf een punt wordt bepaald door de hoogte: hoe hoger je gaat staan, hoe verder je kunt kijken. Maar als je al heel hoog staat, kun je amper verder kijken. Waarom beschrijft een wortelverband deze situatie het beste?

Het verband tussen kijkafstand en de hoogte van waar je kijkt is een wortelverband. Wanneer neemt de kijkafstand relatief het sterkst toe: als je op een twee keer zo hoog duin aan zee gaat staan of wanneer je van de eerste (58 m) naar de tweede trans (116 m) van de Eiffeltoren klimt?

AV5 Alle grafieken gaan door hetzelfde punt

Welk punt ligt op alle grafieken van verbanden waarvan de formule de vorm $y = x^b$ heeft?

AV6 Formules omrekenen

Leid uit $pV = rT$ af dat $p = \frac{rT}{V}$ en $V = \frac{rT}{p}$

Bij natuurkunde wordt bij dit soort herleidingen vaak gebruik gemaakt van een ezelsbruggetje in de vorm van een driehoek.

AV7 Kwadratische tabellen

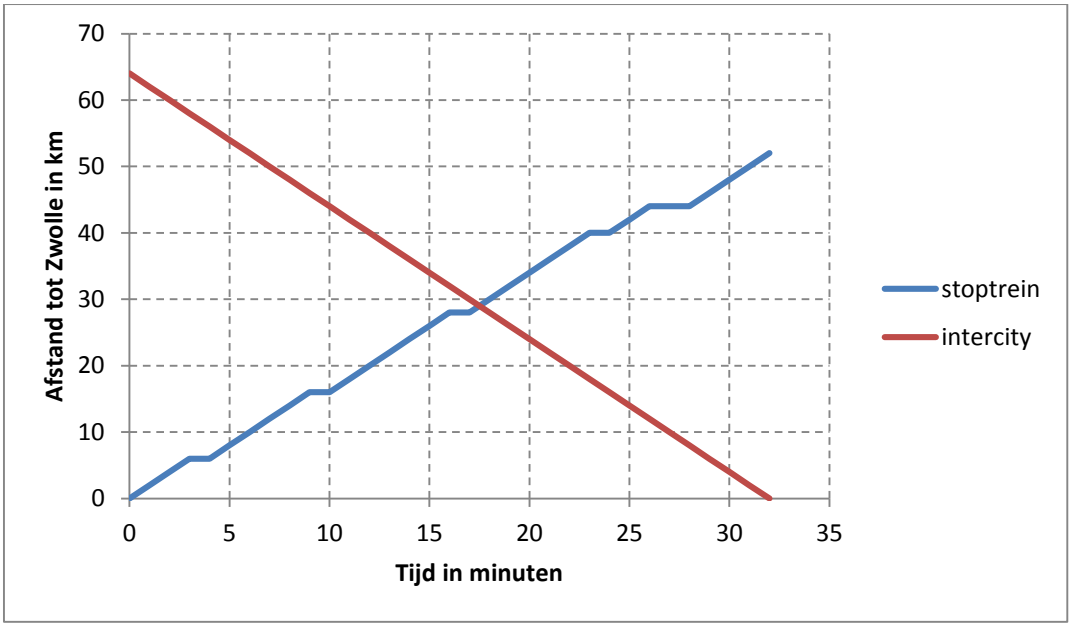
Zet de regelmaat in de onderstaande tabel voort.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	6	10	?

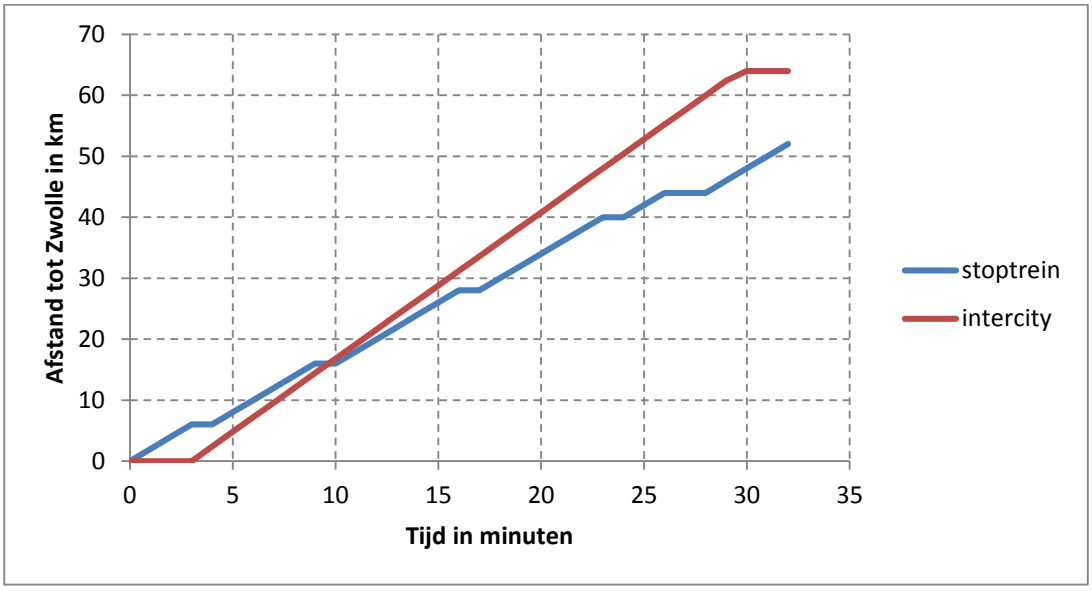
Welke formule hoort bij deze tabel?

AV8 Snijdende grafieken

In de onderstaande figuur is weergegeven hoever twee treinen verwijderd zijn van het station van Zwolle op de spoorlijn Zwolle – Amersfoort. Welke situatie doet zich voor op het snijpunt van beide grafieken?



Beantwoord deze vraag ook in de onderstaande situatie.



AV9 Interpoleren met behulp van een formule

Gegeven is de onderstaande tabel die een verband beschrijft.

x	0	5	10	15
y	8	12	19	22

Bereken met behulp van lineaire interpolatie y als $x = 7$.

Een adequate berekening gaat als volgt: $x = 7$ ligt op $\frac{2}{5}$ deel tussen $x = 5$ en $x = 10$, dus moet de gevraagde y-waarde op $\frac{2}{5}$ deel liggen tussen $y = 12$ en $y = 19$. Deze waarde luidt daarom: $y = 12 + \frac{2}{5} \times (19 - 12) = 14{,}8$.

Een meer formele benadering maakt gebruik van de interpolatieformule $y = y_0 + (y_1 - y_0) \times \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. In deze formule worden de volgende waarden ingevuld: $x_0 = 5$, $x_1 = 10$, $x = 7$, $y_0 = 12$ en $y_1 = 19$ met $y = 14{,}8$ als resultaat.

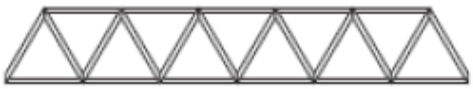
AV10 Namen van variabelen

In de theoretische leerweg wordt gebruik gemaakt van woordformules of van formules met lettervariabelen, waarbij de letter een relatie kent met de grootheid die beschreven wordt, bijvoorbeeld h = hoogte en a = aantal. Het verdient aanbeveling ook variabelen met namen te benoemen waarbij de relatie afwezig is, bijvoorbeeld x = hoogte en y = aantal.

AV11 Formules herleiden

Het aardige van onderstaand voorbeeld is dat de formules ogenschijnlijk erg van elkaar verschillen, vanuit een ander perspectief tot stand komen en toch hetzelfde verband beschrijven.

Een brug van onderstaande vorm heeft een lengte L en R balken. Het aantal balken kent een verband met de lengte van de brug.



Leg uit dat elk van de onderstaande formules dit verband beschrijven:
$R = L \times 3 + (L - 1)$
$R = L + (L - 1) + 2L$

In het onderstaande voorbeeld moet door middel van herleiding een antwoord op een vraag gegeven worden.

In een land wordt 40% belasting geheven over het deel van het inkomen dat hoger is dan de zogenaamde belastingvrije voet van € 12.000. Het te betalen bedrag aan belasting is gelijk aan de uitkomst van deze berekening verminderd met een heffingskorting van € 400. Een parlementslid wil de belastingvrije voet afschaffen en alleen een heffingskorting geven. Hoe groot moet die zijn zodat niemand meer of minder belasting betaalt?

Oplossing: $b = 0{,}4(i - 12.000) - 400 = 0{,}4i - 4.800 - 400 = 0{,}4i - 5.200$. ($b$ = te betalen belastingbedrag, i = inkomen). Als iemand 40% belasting betaalt over zijn hele inkomen en € 5200 heffingskorting ontvangt, dan betaalt hij precies hetzelfde bedrag als in de oude situatie.

AV12 Formules combineren zonder pijlenketting

T-9 In de tabel zie je de confectiematen voor herenkleding in Amerika en West-Europa.

a Een formule voor het verband tussen de twee maten is $m = e - 10$. Hierin is m de Amerikaanse maat en e de Europese maat.
Controleer of de formule bij de tabel past.

b In Australië wordt een andere maat gebruikt. Als je de Amerikaanse maat weet, kun je de Australische maat a berekenen met de formule $a = 2{,}5m + 10$. Dwight heeft Amerikaanse maat 42. Welke Australische maat heeft hij dan?

c Maak van de twee formules één formule waarmee je meteen van de Europese naar Australische maat kunt omrekenen. Maak eerst de nieuwe pijlenketting.

d Schrijf de nieuwe formule zonder haakjes.

Bron: Moderne Wiskunde deel 3A kgt, negende editie

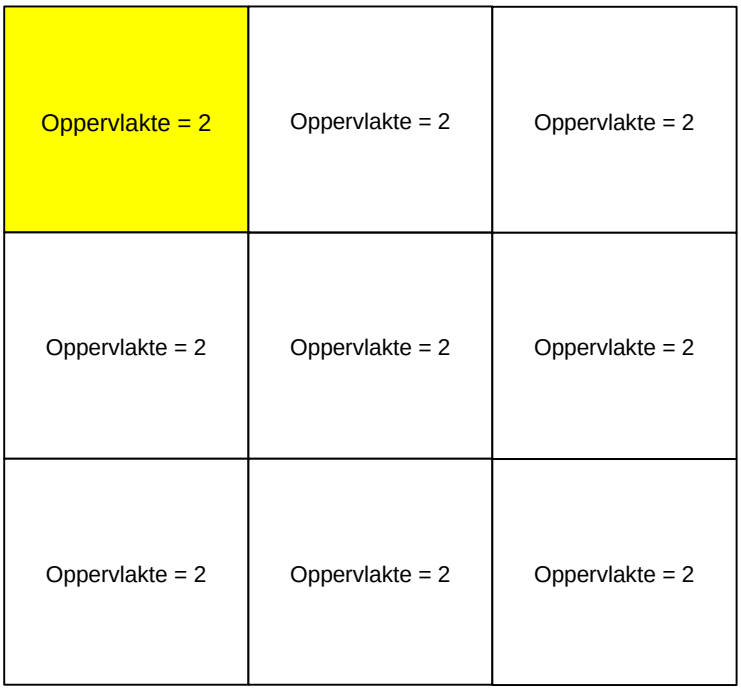
Een havo-variant van onderdeel c van dit vraagstuk luidt: Geef aan hoe je de Australische maat van een kledingstuk (rechtstreeks) kunt uitrekenen als je de Europese maat kent.

Oplossing: $a = 2{,}5m + 10 = 2{,}5(e - 10) + 10 = 2{,}5e - 25 + 10 = 2{,}5e - 15$. Je vermenigvuldigt de Europese maat met 2,5 en trekt van het resultaat 15 af.

RMS1 Relaties tussen wortels

Om bij leerlingen de gedachte te versterken dat irrationale wortels zelfstandige getalsobjecten zijn, kunnen opgaven gebruikt worden zoals hieronder.

Laat aan de hand van de onderstaande figuur zien dat $\sqrt{18} = 3 \times \sqrt{2}$.



Oplossing: de zijde van een klein vierkant is gelijk aan $\sqrt{2}$. De zijde van het grote vierkant is gelijk aan de wortel uit zijn oppervlakte, ofwel $\sqrt{18}$. Uit de figuur blijkt dat er drie zijden van een kleine vierkant in de zijde van een groot vierkant passen.

RMS2 Oneindig veel decimalen

Kun je uit de eerste vijftig decimalen van $\frac{1}{7}$ de eenenvijftigste decimaal afleiden? En van π?

RMS3 Breuken

Breuken vormen proces en object ineen; enerzijds kun je een breuk opvatten als een deling van teller door noemer, anderzijds als een getal dat zich ergens tussen twee gehele getallen bevindt. Mavo-leerlingen kunnen de proceskant van een breuk goed hanteren en worden daarin

in sommige methoden ook gestimuleerd door breukoperaties uit te leggen door gebruik te maken van de rekenmachine.

Een breuk kan ook als een getal beschouwd worden met verschillende representaties. Zo kent $\frac{3}{4}$ als alternatieve representaties $\frac{6}{8}, \frac{9}{12}$ en 0,75. Leerlingen die dit denkniveau niet beheersen, spreken een breuk uit als "drie gedeeld door vier" en zijn niet tevreden met een uitkomst als $\frac{3}{4}$ van een bepaalde berekening.

RMS4 Percentages als zelfstandige reken- of wiskundige objecten

Hierbij kan het gaan om opgaven waarbij geen aantal of hoeveelheid gegeven is, zoals:

1. Op een auto wordt 20% korting gegeven en jij bedingt op het afgeprijsde bedrag nog eens 10% korting. Hoeveel korting krijg je in totaal? Antwoord: 28%.

2. Een winkel maakt reclame dat ze zaterdag a.s. alle artikelen zonder BTW verkoopt en overal 21% korting op geeft. Klopt dat? Nee, want de winkelier zou maar $100 - \frac{100}{1{,}21} \approx 17{,}4\%$ korting moeten geven.

RMS5 Wanneer is er sprake van een verhoudingssituatie?

Typische "verhoudingstaal" komt in methoden weinig voor. Denk daarbij aan termen als "per", "1 op 3", "elke derde Nederlander". Als elke achtste Nederlander overgewicht heeft, welk deel van de Nederlanders heeft dan overgewicht? Als de verhouding tussen het aantal werklozen en het aantal werkenden 3 : 17 is, welk deel van de beroepsbevolking is dan werkloos?

Iets verder gaat het herkennen van een verhoudingssituatie in een situatie. Als je twee keer zo ver reist met je OV-chipkaart, moet je dan ook twee keer zo veel betalen? Antwoord: nee, omdat je bij elke reis een starttarief moet betalen. Als je twee keer zo ver reist met je auto, ben je dan twee keer zo veel benzine kwijt? Antwoord: door de bank genomen wel.

RMS6 Permanentieprincipe

Om bij leerlingen de gedachte te versterken dat de negatieve getallen een uitbreiding van de positieve gevallen vormen, kan bijvoorbeeld het aftrekken van getallen uitgelegd worden door het onderstaande rijtje sommen als het ware voor te zetten.

4 – 1 = 3
4 – 2 = 2
4 – 3 = 1
4 – 4 = 0
4 – 5 = ?
4 – 6 = ?

Zo komen negatieve getallen in beeld als achterwaartse voortzetting van positieve getallen. Dit wordt aangeduid met het "permanentieprincipe". Op een vergelijkbare wijze kan ook het aftrekken van negatieve getallen toegelicht worden.

RMS7 Negatieve getallen invullen

Bereken $-a$, $-a^2$ en $(-a)^2$ voor $a = 3$ en $a = -3$

RMS8 Verhoudingen en variabelen

De lengte van de zijden van een rechthoek verhouden zich als 1 : 2 en zijn oppervlakte is gelijk aan 50 cm^2. Bereken de lengte van de zijden van deze rechthoek.

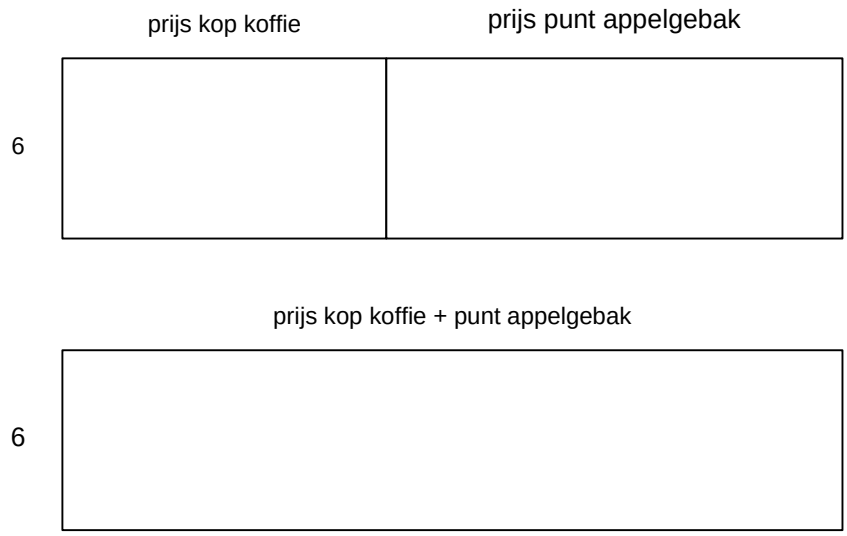
Oplossing: Stel dat de zijden van de rechthoek x en y cm lang zijn. Uit het gegeven dat $x : y = 1 : 2$, volgt dat $y = 2x$. De oppervlakte is gelijk aan $xy = 2x^2$. Omdat gegeven is dat deze oppervlakte gelijk is aan 50 cm^2, volgt dat $2x^2 = 50$, ofwel $x^2 = 25$ en dus $x = 5$. De gevraagde afmetingen zijn 5 bij 10 cm

RMS9 Haakjes wegwerken verklaren

Een gezelschap van zes personen neemt elk een kop koffie met een punt appelgebak. De ober rekent zes keer de prijs van een kop koffie plus zes keer de prijs van een punt appelgebak, maar Rob rekent zes keer de prijs van een kop koffie plus een punt appelgebak en stelt dat beide berekeningswijzen dezelfde uitkomst leveren. Klopt dat?

Oplossing 1:
Ja, dat volgt uit de distributieve eigenschap voor optellingen en vermenigvuldigingen.

Oplossing 2:
Dat kun je zien aan de hand van onderstaand plaatje.



13 In een recept staat dat je 400 gram bloem nodig hebt om 24 koekjes te bakken.
Agnes heeft maar 350 gram bloem. Ze wil weten hoeveel koekjes ze daarmee kan bakken.

a Gebruik de verhoudingstabel om uit te rekenen hoeveel koekjes Agnes kan bakken met 350 gram bloem.

b In een vol pak bloem zit meestal 1000 gram.
Bereken hoeveel koekjes je kunt bakken met een vol pak bloem.

aantal gram bloem	400	1	...
aantal koekjes	24	...	...

Bron: Moderne Wiskunde. Deel 3A kgt, negende editie

Je kunt een verhoudingsprobleem ook door middel van een verhoudingsfactor uitrekenen. Als je in de verhoudingstabel de terugrekening naar 1 achterwege laat en beide berekeningen combineert, krijg je onderstaande verhoudingstabel.

: 400 x 350

aantal gram bloem	400	350
aantal koekjes	24	21

: 400 x 350

De berekening kan ook geschreven worden als $24 \times \frac{350}{400}$. Het getal $\frac{350}{400} = \frac{7}{8} = 0{,}875$ is een verhoudingsfactor. Je kunt het verhoudingsprobleem ook oplossen door middel van de berekening $\frac{24}{400} \times 350$. Daarom is $\frac{24}{400} = 0{,}06$ ook een verhoudingsfactor bij dit probleem. Dit getal verschijnt in de verhoudingstabel uit de opgave onder de 1.

Een verhoudingsprobleem kent twee verhoudingsfactoren. Welke je het beste kunt gebruiken, hangt af van welke factor het gemakkelijkst uitgerekend kan worden.

Ten slotte valt te overwegen om het verschijnsel kruisproduct hier aan de orde te stellen. In een verhoudingstabel als de onderstaande geldt altijd dat 24 x 350 = 400 x ?. Daarmee kan berekend worden wat er op de plaats van het vraagteken moet staan.

aantal gram bloem	400	350
aantal koekjes	24	?

M1 Verhoudingsproblemen anders en vaak sneller oplossen

Geef telkens aan welke tweedimensionale figuur beschreven wordt in de beschrijving.

a. De figuur bestaat uit punten die allemaal op een vaste afstand van een gegeven punt liggen.
   Antwoord: cirkel
b. De diagonalen van de figuur zijn even lang.
   Antwoord: rechthoek
c. Alle overliggende zijden van de figuur zijn evenwijdig.
   Antwoord: parallellogram
d. Twee van de vier zijden van de figuur zijn evenwijdig.
   Antwoord: trapezium

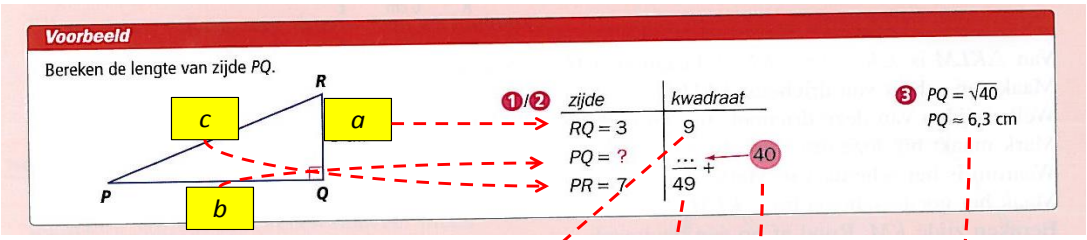
M2 Een schaalverhouding als zelfstandig object beschouwen

Ook een schaalverhouding kan als een zelfstandig wiskundig object beschouwd worden. Of leerlingen dit denkniveau beheersen blijkt bij het oplossen van een opgave als:

Een Engelse autokaart kent een schaal van 3 miles to 1 inch. Schrijf deze schaal in de vorm 1 : … als je weet dat 1 mile = 1609 m en 1 inch = 2,54 cm.

M3 Gebruik van de stelling van Pythagoras in een formele weergave

Dubbelklik op onderstaande figuur voor een animatie.



Stelling van Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$9 + b^2 = 49$

$b^2 = 40$

$b = \sqrt{40} \approx 6{,}3$ cm

M4 Goniometrische verhoudingen als zelfstandige wiskundige objecten

In het mavo worden goniometrische verhoudingen meestal ingezet bij berekeningen in rechthoekige driehoeken van de vorm:

- de lengte van twee zijden gegeven, bereken de grootte van de hoeken
- de lengte van een zijde en de grootte van een hoek gegeven, bereken de lengte van de andere zijden

De driehoek in kwestie kan op zijn lange zijde liggen of op een punt staan. Ook kan de driehoek voorkomen in een ruimtefiguur. De tangens wordt gebruikt om hellingshoek en hellingspercentage van een helling met elkaar te verbinden, maar dan zijn hoogteverschil en horizontale afstand of afstand over de helling zelf meestal gegeven.

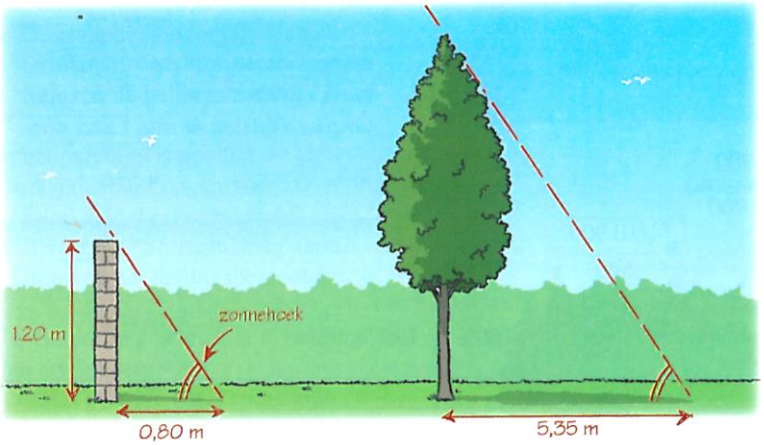
Voor havo kan het nuttig zijn goniometrische verhoudingen als zelfstandige objecten te beschouwen. Dat is noodzakelijk in de volgende voorbeeldopgaven:

1. Bereken met je rekenmachine sin 50º. Van welke hoek heeft de cosinus dezelfde waarde als de uitkomst? Beantwoord dezelfde vragen voor sin 70º. Wat valt je op? Geldt dat altijd? Geef een verklaring.

2. Wat is de hellingshoek bij een hellingspercentage van 100%? Bereken het hellingspercentage bij een hellingshoek van 10º.

3. Opgave 41 hoofdstuk 9, Getal & Ruimte 3 KGT

A 41 **a** Bereken in de driehoek bij het muurtje de grootte van de zonnehoek.
b Bij de boom heb je natuurlijk dezelfde zonnehoek. Bereken de hoogte van de boom.
c In de buurt van de boom staat een flatgebouw. Dat kun je op de tekening niet zien. Die flat is 35 meter hoog. Bereken de lengte van de schaduw van de flat. Maak eerst een schets.



Bron: Getal & Ruimte, deel 3 KGT, negende editie

Leerlingen die de opgaven (b) en (c) kunnen maken zonder de zonnehoek uit te rekenen, dat wil zeggen: door enkel de tangens van de zonnehoek te berekenen en die te gebruiken om de hoogte van de boom te berekenen, geven er blijk van een goniometrische verhouding als een zelfstandig object te kunnen beschouwen.

M5 Gelijkvormigheid

1. Wanneer zijn twee driehoeken gelijkvormig? (Er is meer dan één mogelijkheid)
a. Als een hoek en een zijde van beide driehoeken gelijk zijn.
b. Als twee hoeken van beide driehoeken gelijk zijn.
c. Als twee zijden van beide driehoeken gelijk zijn.

2. Figuren van welke van de hieronder genoemde vormen zijn altijd gelijkvormig aan elkaar? (Er zijn meer antwoorden mogelijk)
a. vierkanten
b. rechthoeken
c. ruiten
d. vliegers
e. rechthoekige driehoeken
f. gelijkvormige driehoeken
g. gelijkbenige driehoeken

3. Wanneer is de schaduw van een rechthoek onder een lamp gelijkvormig met de rechthoek zelf?
Antwoord: als je de rechthoek recht onder de lamp hangt en als de lamp precies boven het snijpunt van de diagonalen van de rechthoek geplaatst is.

In hoeverre geldt het bovenstaande voor driehoeken?

4. Als je een rechthoek loodrecht op de zonnestralen houdt terwijl de zon niet recht aan de hemel staat, welke overeenkomsten heeft zijn schaduw dan met de rechthoek zelf?
a. De schaduw komt precies overeen met de rechthoek.
b. De schaduw is gelijkvormig met de rechthoek.
c. De schaduw is ook een rechthoek die langer is dan, maar wel even breed is als de rechthoek zelf.
d. De schaduw is ook een rechthoek met andere afmetingen dan de rechthoek zelf.

5. De lengte en de breedte van een stuk A4-papier verhouden zich als $\sqrt{2}:1$. Als je een vel A4-papier in de lengte in tweeën verdeelt, krijg je een vel A5-papier. Laat zien dat een vel A5 gelijkvormig is met een vel A4.

Antwoord: de lengte van een vel A5 is gelijk aan de breedte van een vel A4. De breedte van een vel A5 is gelijk aan de helft van de lengte van een vel A4. Daarom verhouden lengte en breedte van een vel A5 zich als $1:\frac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2}:\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}:\frac{1}{2}\times 2=\sqrt{2}:1$ en dat is dezelfde verhouding als bij een vel A4.

6. De breedte en de hoogte van de schermen van alle moderne LCD- en plasma tv-toestellen hebben een vaste verhouding. De grootte van een tv-scherm wordt in het algemeen aangeduid met zijn diagonaal. Mijn tv-scherm heeft een diagonaal van 80 cm. Zijn breedte is 69,6 cm en zijn hoogte is 39,5 cm. Wat zijn de afmetingen van een tv-scherm met een diagonaal van 60 cm?

7. Je staat naast een lamp. Als je even ver van de lamp af staat als de lamp hoger hangt dan jouw hoofd, wat weet je dan over hoe lang je schaduw is? En als je twee keer zover van de lamp af staat?

   Antwoord: die is in het eerste geval even lang dan jijzelf en in het tweede geval twee keer zo lang als jijzelf.

Bijlage E Gebruik determinatie-instrument tl - vervolgonderwijs

Het determinatie-instrument wordt ingevuld door docenten en de leerling. Docenten wordt gevraagd de cognitieve ontwikkeling, de leer- en andere vaardigheden en de leerhouding van zijn leerlingen in te schatten. In elk van deze categorieën is een aantal determinanten onderscheiden waarover een docent zijn licht kan laten schijnen. De determinanten uit de categorie A Vakspecifieke cognitieve ontwikkeling zijn gebaseerd op vier min of meer bekende taxonomieën. Daarom zijn er ook vier varianten van categorie A.
In deze bijlage wordt elk van deze varianten weergegeven en worden de determinanten uit een variant voorzien van een wiskunde-specifieke toelichting (*cursief*). De determinanten uit de andere categorieën zijn niet vakspecifiek van aard en worden daarom niet in deze publicatie toegelicht.

Gereviseerde taxonomie van Bloom

A.	**Vakspecifieke cognitieve ontwikkeling**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	De leerling kan de leerstof voor mijn vak reproduceren. *De leerling kan rekenfeiten, rekenregels, wiskundige concepten, eigenschappen en oplossingsroutines uit zijn geheugen oproepen als de situatie daarom vraagt.*				
2	De leerling kan de leerstof voor mijn vak uitleggen. *De leerling kan rekenregels en wiskundige eigenschappen met voorbeelden illustreren, plausibel maken of bewijzen.*				
3	De leerling kan de leerstof gebruiken om bekende taken of problemen in nieuwe situaties op te lossen. *De leerling kan (context)opgaven maken, waarvan de oplossingswijze op voorhand bekend is.*				
4	De leerling kan informatie uiteenrafelen, verbanden leggen en zijn kennis en inzicht gebruiken om tot oplossingen te komen. *De leerling kan (context)opgaven maken waarvan de oplossingswijze niet op voorhand bekend is.*				
5	De leerling kan een oordeel geven of een standpunt innemen en daarvoor een onderbouwing geven. *De leerling kan een wiskundige redenering verifiëren of falsificeren.*				
6	De leerling kan met verworven kennis en inzichten nieuwe ideeën, producten of zienswijzen tot stand brengen. *De leerling kan zelf wiskundige eigenschappen bedenken.*				

Taxonomie van de Block

A.	Vakspecifieke cognitieve ontwikkeling	1	2	3	4
1	De leerling kan de leerstof voor mijn vak reproduceren. *De leerling kan rekenfeiten, rekenregels, wiskundige eigenschappen en definities noemen en routine-opgaven "op de automatische piloot" oplossen.*				
2	De leerling kan de leerstof voor mijn vak uitleggen. *De leerling kan rekenregels en wiskundige eigenschappen met voorbeelden illustreren, plausibel maken of bewijzen.*				
3	De leerling kan zijn kennis en inzicht toepassen bij opdrachten in nieuwe situaties. *De leerling kan (context)opgaven in de wiskundeles maken.*				
4	De leerling heeft zich de leerstof geheel eigen gemaakt en kan zijn kennis en inzicht spontaan toepassen. *De leerling kan wiskunde op eigen initiatief toepassen, bijvoorbeeld in andere vakken.*				

OBIT (APS)

A.	Vakspecifieke cognitieve ontwikkeling	1	2	3	4
1	De leerling kan zich de leerstof voor mijn vak herinneren (O). *De leerling kan rekenfeiten, rekenregels, wiskundige eigenschappen en definities noemen.*				
2	De leerling kan de leerstof voor mijn vak in eigen woorden weergeven (B). *De leerling kan opgaven "op de automatische piloot" maken.*				
3	De leerling kan bij mijn vak nieuwe kennis koppelen aan bestaande kennis (I). *De leerling kan opgaven maken die hij moet oplossen met behulp van routinehandelingen, maar die ook eigen inbreng van hem vereisen.*				
4	De leerling kan bij mijn vak het geleerde creatief toepassen in een nieuwe context (T). *De leerling kan opdrachten maken waarin hij zelf de aanpak moet bedenken.*				

RTTI

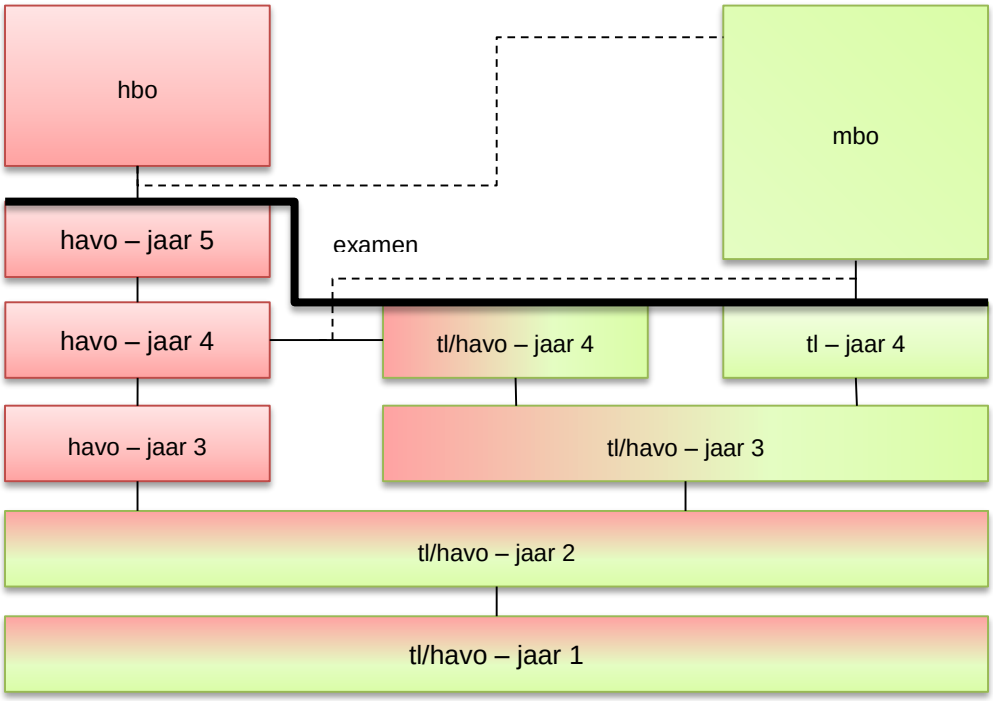
A.	Vakspecifieke cognitieve ontwikkeling	1	2	3	4
1	De leerling kan de geleerde leerstof reproduceren (R). *De leerling kan rekenfeiten, rekenregels, wiskundige concepten, eigenschappen en oplossingsroutines uit zijn geheugen oproepen als de situatie daarom vraagt.*				
2	De leerling kan de leerstof volgens de getrainde methode in vergelijkbare situaties als de geoefende situaties toepassen (T1). *De leerling kan routineopgaven maken. De opgaven kunnen op een standaardwijze opgelost worden die in de les aan bod geweest.*				
3	De leerling kan de leerstof in een nieuwe situatie met behulp van een door hem zelf gekozen methode toepassen (T2). *De leerling kan (context)opgaven maken waarin hij moet nadenken over de probleemaanpak. "Methode" wordt hier geïnterpreteerd als oplossingsstrategie.*				
4	De leerling kan een nieuw vraagstuk in een zelf gekozen context of met een zelf gekozen methode vanuit verschillende perspectieven doorgronden en oplossen (I). *De leerling kan zich nieuwe wiskundeleerstof eigen maken om een opgave op te kunnen lossen.*				

Bijlage F Pilots Montessori College Twente

Het Montessori College Twente is een openbare school voor voortgezet onderwijs in Hengelo (ov). De school heeft ruim 1300 leerlingen en verzorgt onderwijs op tl-, havo en atheneumniveau volgens het onderwijsconcept van Maria Montessori. Op havo en atheneum kunnen leerlingen kiezen voor tweetalig onderwijs. De school noemt de theoretische leerweg vrij consequent "mavo".

De school plaatst leerlingen met een tl-advies in de onderbouw in combinatieklassen tl/havo. De wiskundelessen in deze combinatieklassen worden gegeven uit de tl/havo-editie van een wiskundemethode. Uit deze editie worden alle hoofdstukken behandeld, ook die waar specifieke havo-stof aan bod komt. Op proefwerken krijgen leerlingen een mavo-cijfer en een havo-cijfer. Leerlingen die aan de toelatingsnormen voldoen, gaan na de onderbouw naar 3 havo. De andere leerlingen gaan naar 3 mavo. Laatstgenoemde leerlingen volgen het mavo-programma uit de delen voor de kaderberoepsgerichte en theoretische leerweg van de wiskundemethode.

De mavo-afdeling van de school had het plan opgevat om de instroom naar mavo na het derde jaar op te splitsen in een groep die na het examen doorstroomt naar4 havo (en als gevolg daarvan feitelijk de havo in zes in plaats van vijf jaar doet) en een groep die na het examen doorstroomt naar het middelbaar beroepsonderwijs. De afdelingsleiding streeft naar een zo groot mogelijke doorstroom naar 4 havo. Als gevolg daarvan is er in het derde leerjaar geen zuivere mavo-klas, maar opnieuw een combinatieklas tl/havo. In de onderstaande figuur is de beoogde situatie weergegeven.



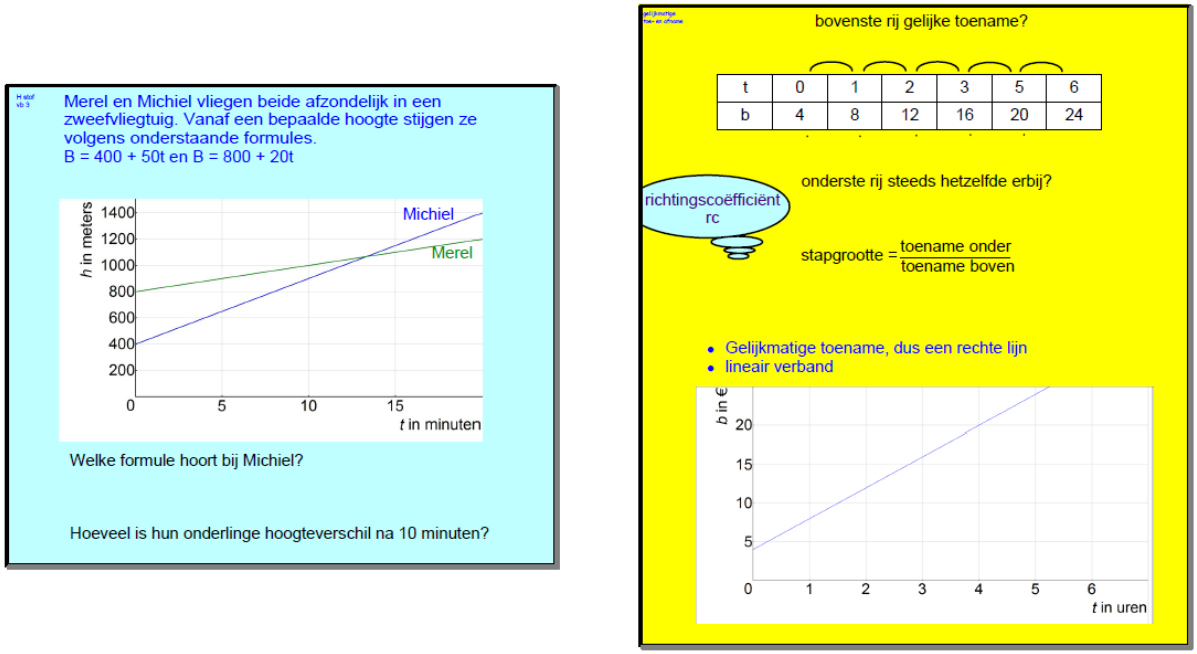
Figuur 9. Beoogde leerroutes voor mavo- en havo-leerlingen

In dit model wordt in het derde leerjaar van tl/havo wiskundeles gegeven met een verrijkt leerplan, waarbij enkele mavo-onderdelen zowel op mavo- als op havo-niveau worden aangeboden. In het vierde leerjaar volgen de leerlingen in de tl/havo-groep een verrijkt mavo-leerplan. Hierin komen ook de aanvullende leerstofonderdelen uit de onderbouw havo voor.

Deze aanvullende onderdelen worden deels in extra lessen en deels in de reguliere lessen gegeven. In de reguliere lessen werd ruimte gemaakt door het schoolonderwerp Informatieverwerking en statistiek in de vorm van een project te behandelen.

Om dit model te beproeven is in het derde leerjaar een drietal pilots uitgevoerd in reguliere 3 mavo-klassen. De eerste twee pilots hadden tot doel te onderzoeken hoe een leerstofonderdeel uit het mavo-leerplan op zowel mavo- als havo-niveau aangeboden kan worden en in hoeverre leerlingen met havo-potentie aldus het havo-niveau bereiken. De eerste pilot ging over het onderwerp lineaire verbanden, waarbij het havo-niveau bestond uit een hoger niveau van formeel en abstract denken en handelen dan op het mavo. De tweede pilot had goniometrie als onderwerp. Hierin werd van leerlingen op havo-niveau vooral een hogere mate van probleemoplossend vermogen verwacht dan op het mavo. De derde pilot ten slotte had als doel te onderzoeken in hoeverre differentiatie in les mogelijk is volgens het lesmodel van figuur 6. De pilots werden elk uitgevoerd in alle 3 mavo-klassen.

In de wiskundelessen wordt gebruik gemaakt van het digibord. Op dit bord werden dia's gepresenteerd met uitleg en opgaven. In het geval er sprake was van uitleg of opgaven op havoniveau, hadden de betreffende dia's (deels) een afwijkende achtergrondkleur. Op die manier konden leerlingen zien dat er uitleg op havoniveau gegeven werd.



Figuur 10. Voorbeelden van presentatiedia's. Dia's (of onderdelen daarvan) met een lichtblauwe achtergrondkleur verwijzen naar havo-niveau

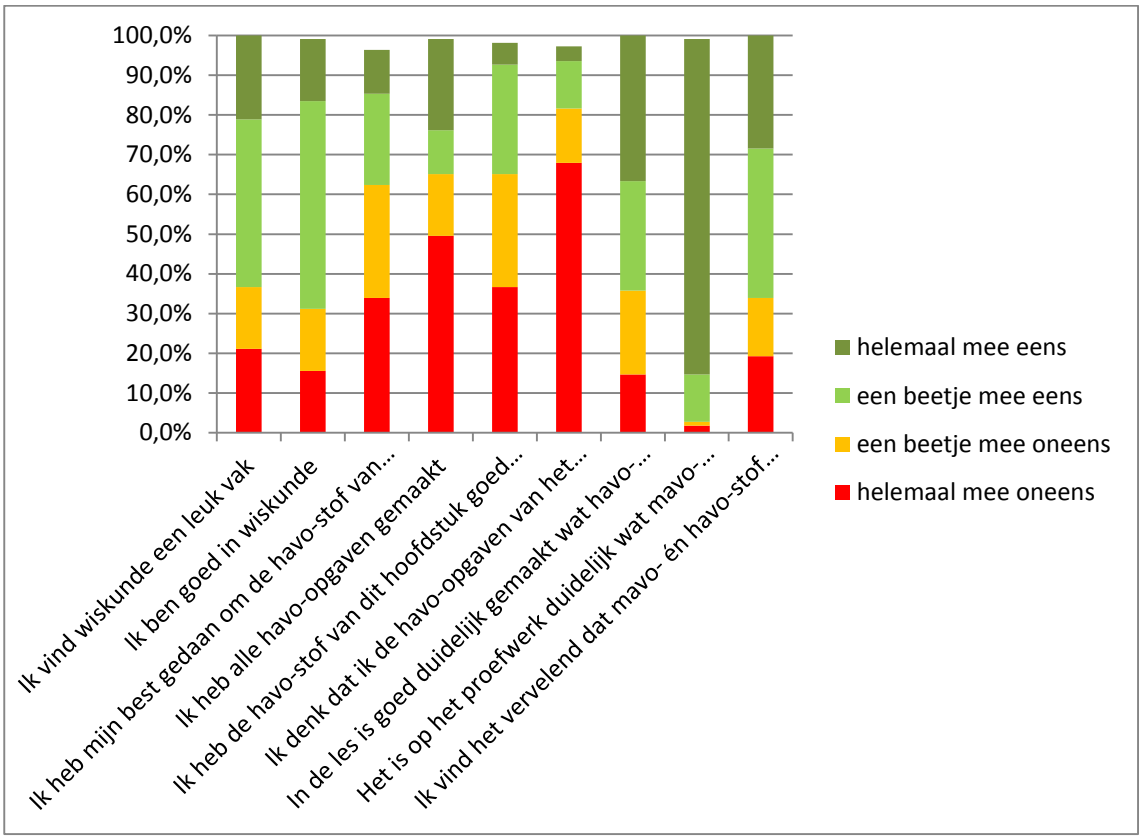
Aan de toetsen werden vooral verrijkingsonderdelen toegevoegd. In een enkel geval was sprake van een opgave die op een "mavo-manier" en op een "havo-manier" opgelost kon worden. De verrijkingsonderdelen werden afzonderlijk beoordeeld en gescoord.

De pilots gingen vergezeld van enkele onderzoeksactiviteiten om effectiviteit en bruikbaarheid van het uitgeprobeerde leerplan te beoordelen. Onderzoeksactiviteiten waren een analyse van de toetsresultaten (om te bepalen in hoeverre de verrijkingsonderdelen uit de toets van voorspellende waarde zouden zijn), een enquête onder de leerlingen, interviews met enkele leerlingen en afrondende gesprekken met de docenten. De leerlingenquête had tot doel te achterhalen hoe leerlingen de opzet van de pilot waarderen en in hoeverre ze verschillen tussen

havo en mavo kunnen benoemen. Ook waren er achtergrondvragen over onder andere motivatie van leerlingen voor het vak wiskunde en doorstroom naar havo.

Resultaten van de eerste pilot

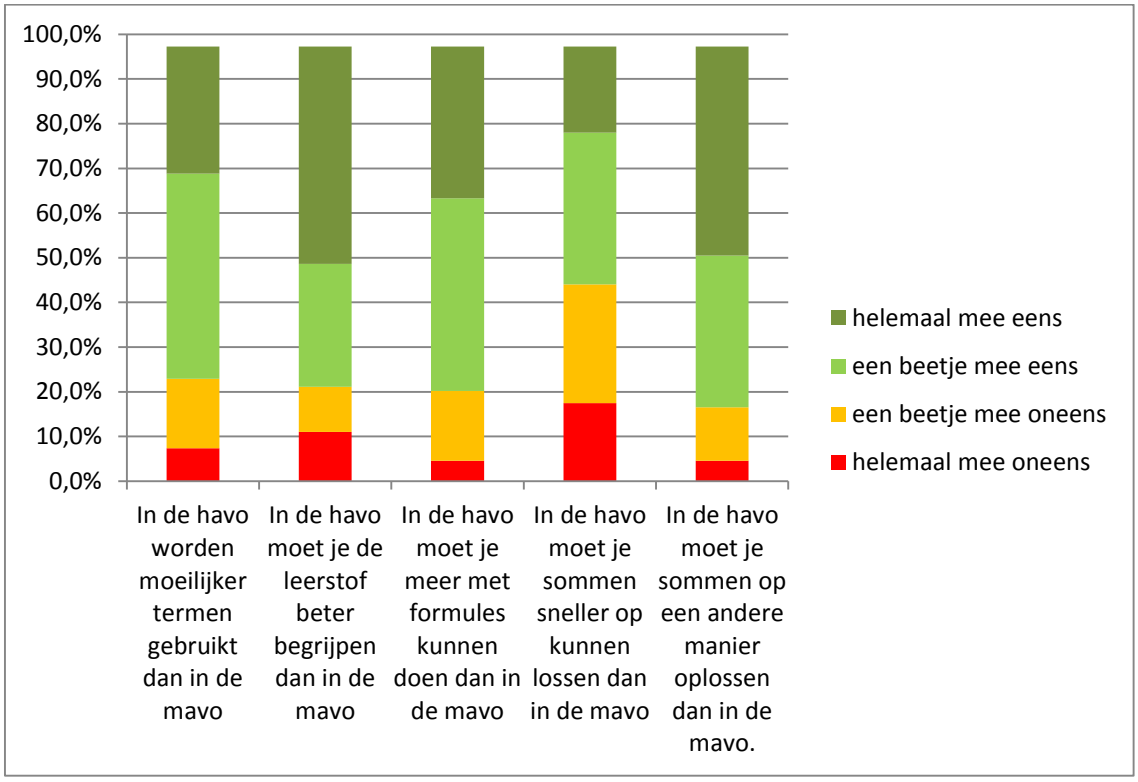
Bij analyse van de toetsscores bleken slechts vier van de 120 leerlingen in staat geweest de verrijkingsonderdelen uit de toets in meerderheid correct te beantwoorden. Daarom was het helaas niet mogelijk uitspraken te doen over de voorspellende waarde van de verrijkingsonderdelen uit de toets. Deze vier leerlingen waren volgens hun docent overigens wel capabel om naar havo door te stromen. Onderstaande grafiek, gebaseerd is op antwoorden van leerlingen uit de enquête, geeft een aantal mogelijke verklaringen voor deze lage toetsscores.



Figuur 11. Antwoorden van leerlingen op enkele achtergrondvragen uit de enquête

Leerlingen blijken volgens deze grafiek in meerderheid weinig aandacht te hebben geschonken aan de verrijkingsonderdelen uit het leerplan van deze pilot. Ze hebben in meerderheid volgens eigen zeggen niet hun best gedaan om de havo-stof te bestuderen en de bijbehorende opgaven te maken. Evenmin zegt de meerderheid van de leerlingen de havo-stof te hebben begrepen. Volgens de docenten heeft dit vooral te maken met het tijdstip waarop de pilot gehouden is, namelijk kort na de herfstvakantie. Leerlingen in 3 mavo hadden net determinatie voor havo of mavo achter de rug en zij die naar mavo verwezen waren, hadden weinig motivatie zich (opnieuw) in te spannen om havo-niveau te bereiken.

Dat wil niet zeggen dat de eerste pilot niets heeft opgeleverd. In onderstaande grafiek wordt getoond hoe leerlingen blijkens de enquêteresultaten het verschil tussen mavo en havo percipiëren.

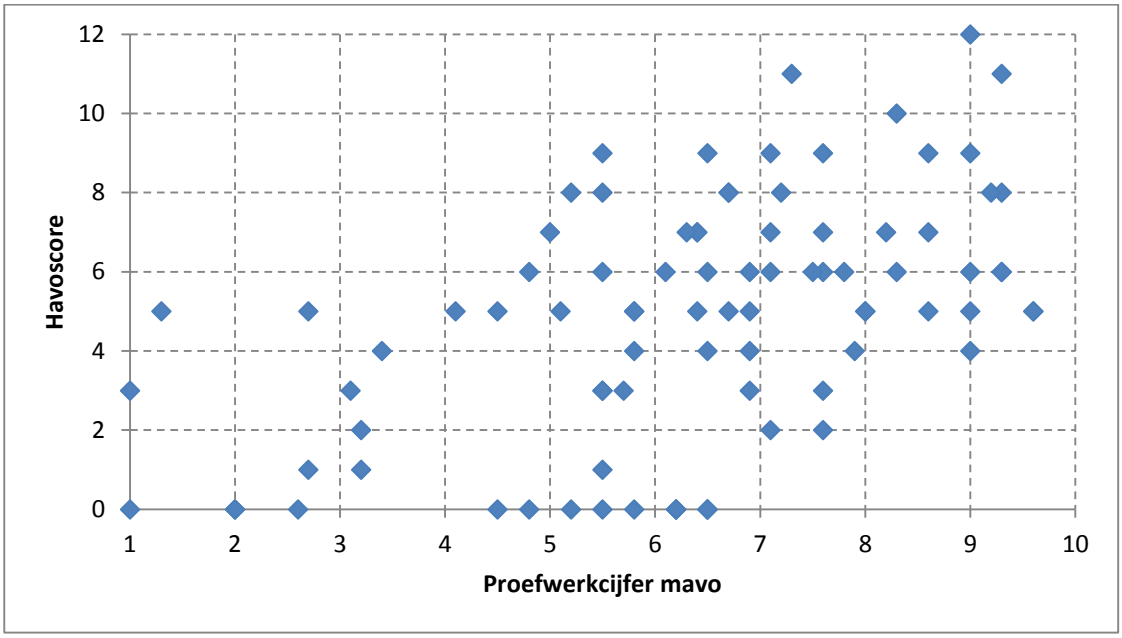


Figuur 12. Antwoorden van leerlingen op een aantal stellingen over het verschil in mavo- en havo-wiskunde

Hieruit blijkt dat leerlingen vooral vinden dat je de leerstof beter moet begrijpen en sommen op een andere manier moet kunnen oplossen. Deze antwoorden sporen met het meer formele en abstracte denk- en handelingsniveau dat in deze pilot aan bod kwam.

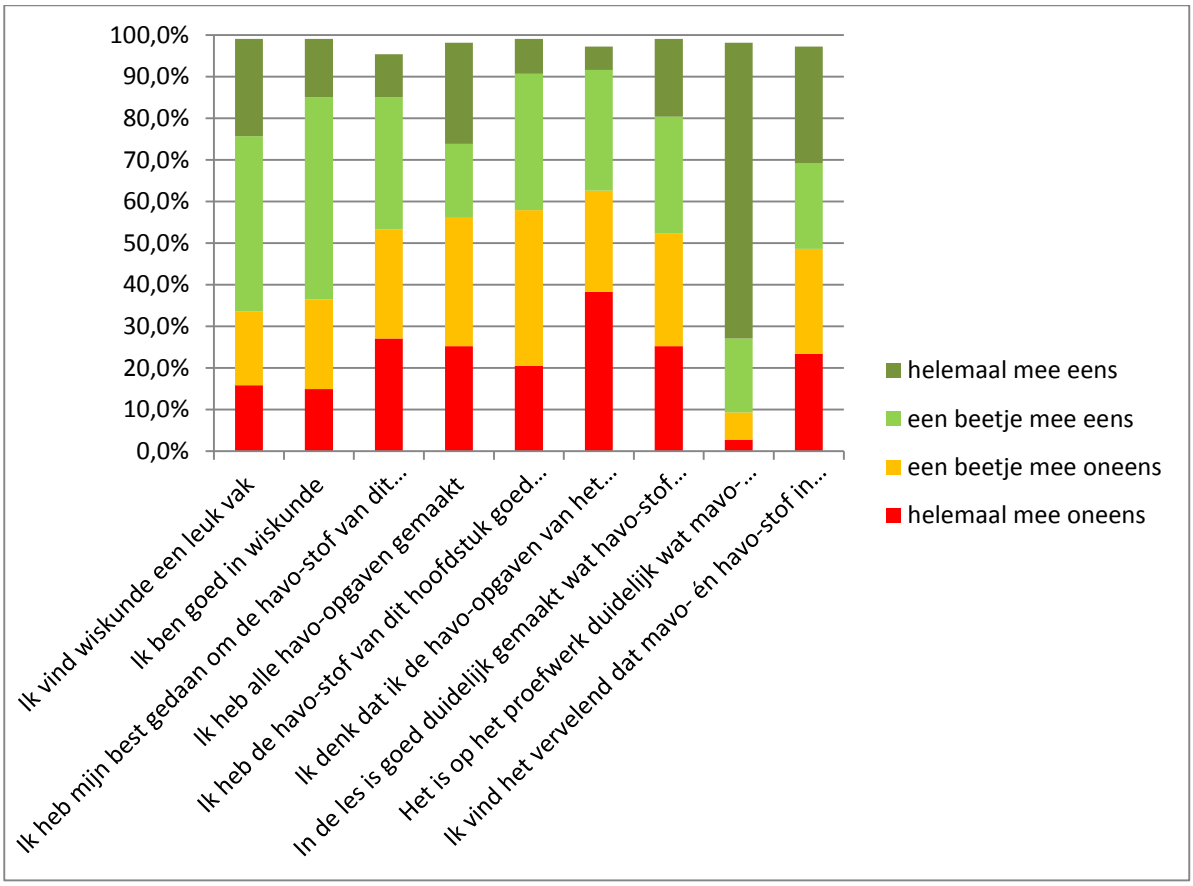
Resultaten van de tweede pilot

De tweede pilot had een vergelijkbare opzet, maar werd tegen het einde van het schooljaar gehouden. Ook hier werden leerlingscores geanalyseerd en werd een enquête onder leerlingen afgenomen. De leerlingen behaalden aanzienlijk betere resultaten op de verrijkingsonderdelen van de toets. Ruim een derde deel van de leerlingen wist meer dan de helft van de betreffende twaalf opgaven correct te beantwoorden. Dit aandeel ligt in de buurt van het streefpercentage voor doorstroom naar 4 havo van de afdelingsleiding. Bij deze pilot werden de scores van leerlingen op de verrijkingsonderdelen afgezet tegen hun cijfer voor de mavo-opgaven van de toets (figuur 13).



Figuur 13. Havoscores van leerlingen afgezet tegen hun proefwerkcijfer voor de mavo-opgaven

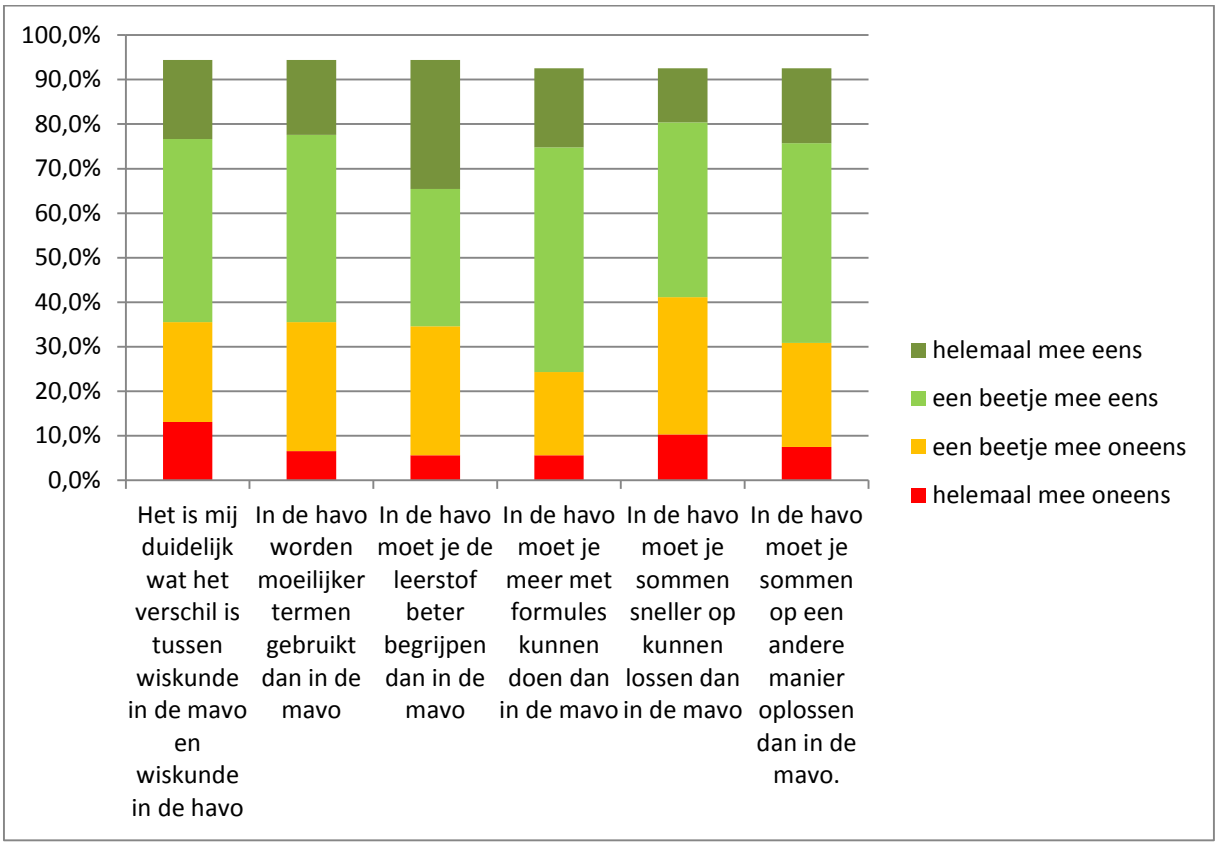
In deze figuur is een verband te zien tussen havo-score en proefwerkcijfer. De correlatiecoëfficiënt is gelijk aan 0,507 en daarmee is het verband niet al te sterk.
De inzet en motivatie van leerlingen was iets beter dan in de eerste pilot, zo blijkt uit resultaten van de leerlingenquête. In de onderstaande figuur zijn de antwoorden op dezelfde vragen als die in figuur 11 samengevat.



Figuur 14. Antwoorden van leerlingen op enkele achtergrondvragen uit de enquête

Docenten wisten te melden dat leerlingen in dit stadium van hun opleiding al een tamelijk helder beeld hebben van hun doorstroomrichting. Leerlingen die voor 4 havo opteerden, hadden meer dan gemiddelde belangstelling voor de verrijkingsonderdelen uit deze pilot.

Ook de perceptie van leerlingen over het onderscheid tussen havo en mavo verschilt enigszins van die uit de eerste pilot, zo valt uit onderstaande *Figuur* af te lezen.



Figuur 15. Antwoorden van leerlingen op een aantal stellingen over het verschil in mavo- en havo-wiskunde

Hierin is het verschil in karakter zichtbaar tussen deze pilot en de eerste. Bij de tweede pilot zijn leerlingen minder uitgesproken over de verschillen tussen havo en mavo dan bij de eerste pilot. Mogelijke verklaring hiervoor is dat bij de tweede pilot verrijking vooral gericht is op versterking van het probleemoplossend vermogen in plaats van het vermogen om formeel en abstract te kunnen denken en handelen.

Resultaten van de derde pilot

De derde pilot vond plaats op ongeveer de helft van het schooljaar en had tot doel uitvoerbaarheid van het differentiatiemodel uit figuur 6 te onderzoeken. Het onderwerp was kwadratische verbanden plus enkele kleinere leerstofonderdelen en de verrijking bestond vooral uit aanvullende leerstof over ontbinden in factoren van twee- en drietermen en de abc-formule voor het oplossen van tweedegraads vergelijkingen. Bij deze pilot zijn na afloop alleen de docenten geïnterviewd. Belangrijkste conclusie was dat het lesmodel niet uitvoerbaar bleek te zijn, en wel om de volgende redenen (in volgorde van belangrijk naar minder van belang):

1. Mavo-leerlingen kunnen tijdens de havo-uitleg onvoldoende door de docent ondersteund worden bij het maken van hun opgaven.
2. De uitleg over havo-stof kost veel tijd, mede als gevolg waarvan de docenten veel tijdsdruk ervaren.
3. De docenten zijn als gevolg van het bovenstaande veel aan het woord en komen aan individuele begeleiding van leerlingen niet toe.
4. Mavo-leerlingen blijken toch de havo-uitleg te volgen met het idee op deze wijze althans iets van de havo-stof te kunnen opsteken.

Bijlage G Wiskundeleerplannen van wiskunde-intensieve mbo-opleidingen

Het mbo kent geen standaardleerplan wiskunde. Een roc is vrij te bepalen of het in zijn wiskunde-intensieve mbo-opleidingen aparte wiskundelessen aanbiedt en zo ja, welke onderwerpen in deze lessen aan bod komen. In deze bijlage worden kort gemeenschappelijke kenmerken beschreven van de mbo-wiskundeleerplannen op de roc's die in dit onderzoek betrokken zijn. Dit is geen standaardleerplan, maar wel meer dan een voorbeeld uit een willekeurig roc.

Aansluiting met het beroep

Alle drie wiskundedocenten doen moeite om aansluiting te vinden bij de beroepsgerichte onderdelen van de opleiding. Aansluiting wordt onder meer bevorderd door inhouden uit het wiskundeleerplan gelijktijdig te programmeren met de onderdelen waarin de wiskunde-inhoud wordt toegepast. Daarnaast zijn de gekozen inhouden geïnspireerd door vereisten uit het beroep. Zo maken logaritmen en logaritmische schalen deel uit van elk van de drie wiskundeleerplannen, omdat dat in het beroep voorkomt bij meting van geluidssterkte in decibellen. Ook meetkundige onderwerpen maken om deze reden in ruime mate deel uit van de wiskundeleerplannen.
Eén geïnterviewde docent maakt (nog) gebruik van het wiskundeleerplan van de voormalige middelbare technische school uit de jaren tachtig van de vorige eeuw.

Inhouden

Onderstaande inhouden maken deel uit van de wiskundeleerplannen op elk van de drie roc's:

- logaritmen en logaritmische schaalverdelingen;
- algebra, letterrekenen, haakjes wegwerken, ontbinden in factoren;
- goniometrie, stelling van Pythagoras, sinus- en cosinusregel;
- machten met negatieve en/of gebroken exponenten;
- eerstegraads vergelijkingen.

Op twee van de drie roc's worden onderstaande inhouden aangeboden:

- stelsels vergelijkingen;
- goniometrische verbanden.

Eén roc behandelt differentiaalrekening. De andere roc's programmeren differentiaalrekening in een wiskundemodule voor studenten die willen doorstromen naar het hoger beroepsonderwijs.

Niveaus

Alle drie roc's streven naar verhoging van het denk- en handelingsniveau van hun studenten en geven aan hierin succesvol te zijn. De docenten noemen in dit kader als voorbeelden:

- gelijkwaardigheid van formules vaststellen door middel van een algebraïsche herleiding. Eén geïnterviewde docent meldt dat zijn studenten tot zijn ongenoegen nog vaak gebruik maken van een ezelsbruggetje met een driehoek om $A = B \times C$ te herleiden tot $B = \frac{A}{C}$ en $C = \frac{A}{B}$
- oplossing van vergelijkingen door middel van een wiskundige oplossingstechniek en niet door middel van het zogenaamde "inklemmen". In dit kader is opgemerkt dat de inklemtechniek onder instromende studenten op zijn retour lijkt te zijn
- beweringen staven door middel van een herleiding of een wiskundig bewijs in plaats van door middel van een schets of van een voorbeeld.

Doorstroomprogramma hbo

Alle drie roc's bieden hun doorstromers naar het hbo een wiskundemodule aan of zijn dat op korte termijn van plan. In deze module komen onderwerpen als differentiaalrekening en integraalrekening aan bod.

SLO heeft als nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling een publieke taakstelling in de driehoek beleid, praktijk en wetenschap. SLO heeft een onafhankelijke, niet-commerciële positie als landelijke kennisinstelling en is dienstbaar aan vele partijen in beleid en praktijk.

Het werk van SLO kenmerkt zich door een wisselwerking tussen diverse niveaus van leerplanontwikkeling (stelsel, school, klas, leerling). SLO streeft naar (zowel longitudinale als horizontale) inhoudelijke samenhang in het onderwijs en richt zich daarbij op de sectoren primair onderwijs, speciaal onderwijs en voortgezet onderwijs. De activiteiten van SLO bestrijken in principe alle vakgebieden.

Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
E info@slo.nl
www.slo.nl

company/slo
@slocommunicatie

Foto omslag: humantouchphoto.nl

slo