Aandachtsgebieden voor een doorgaande lijn rekenen-wiskunde van po naar vmbo

Primair onderwijs/Voortgezet onderwijs

Aandachtsgebieden voor een doorgaande lijn rekenen-wiskunde van po naar vmbo

Primair onderwijs/Voortgezet onderwijs

Kees Buijs
Pieter van der Zwaart

Enschede, november 2006
PO/3675.001/06-27

SLO
Werken aan leren

Inhoud

Woord vooraf

De problematiek van de doorgaande lijn van PO naar VMBO op het gebied van rekenen-wiskunde wordt door veel betrokkenen als actueel en urgent ervaren. Dit heeft enerzijds te maken met het feit dat nogal wat zwakkere leerlingen in de hoogste leerjaren van het basisonderwijs bij rekenen-wiskunde steeds grote moeite hebben om zich de leerstof op een aanvaardbaar niveau eigen te maken. Anderzijds sluit de leerstof in het VMBO veelal niet goed aan bij het eindniveau dat deze leerlingen in het basisonderwijs bereiken. Er is dan ook veel behoefte aan meer duidelijkheid over de doorgaande lijn van primair naar voortgezet onderwijs, in het bijzonder voor de grote groep leerlingen die naar de basisberoepsgerichte leerweg van het VMBO (al dan niet met leerwegondersteuning) en het praktijkonderwijs gaan.
De voor u liggende publicatie beoogt een bijdrage aan deze duidelijkheid te leveren. Zij is het voorlopige resultaat van een project (het Bovenbouwproject) dat enige jaren geleden binnen SLO is gestart. Dat project is erop gericht voor de genoemde groep leerlingen een aangepast leertraject rekenen-wiskunde te ontwikkelen voor groep 7/8, en, in samenhang daarmee, een blauwdruk voor de doorgaande lijn naar het VMBO op het gebied van rekenen-wiskunde. Met het oog op dit laatste is er door SLO in juni 2006 een adviesbijeenkomst georganiseerd waarop een twintigtal deskundigen uit het primair onderwijs én het voortgezet onderwijs hun licht lieten schijnen over twee stukken waarin een aanzet werd gegeven voor een blauwdruk voor de doorgaande lijn rekenen-wiskunde. Op deze bijeenkomst bleek men het er in de eerste plaats over eens dat hier inderdaad een belangrijke problematiek ligt die in hoge mate belemmerend kan werken voor een vlotte, ononderbroken leerweg van leerlingen. Verder was er op hoofdlijnen instemming met de twee stukken die ter discussie stonden. Er waren echter ook tal van kritische kanttekeningen die ons een stuk verder geholpen hebben en die in de huidige, sterk verbeterde versie van de beide stukken zijn verwerkt. Het resultaat van deze inspanningen vindt u op de volgende pagina's van deze publicatie.
Deze publicatie is een tussenstand die op geen enkele manier de pretentie heeft het laatste woord te vormen. Zij dient eerst en vooral als een voorlopige afbakening beschouwd te worden waarin een aantal leerstofinhouden en –doelen op een rij worden gezet, en waarin een aantal voorstellen worden gedaan om tot een betere doorgaande lijn op het gebied van rekenen-wiskunde te komen.
Wij hopen dat vele betrokkenen op enigerlei wijze hun voordeel met deze tussenstand kunnen doen.

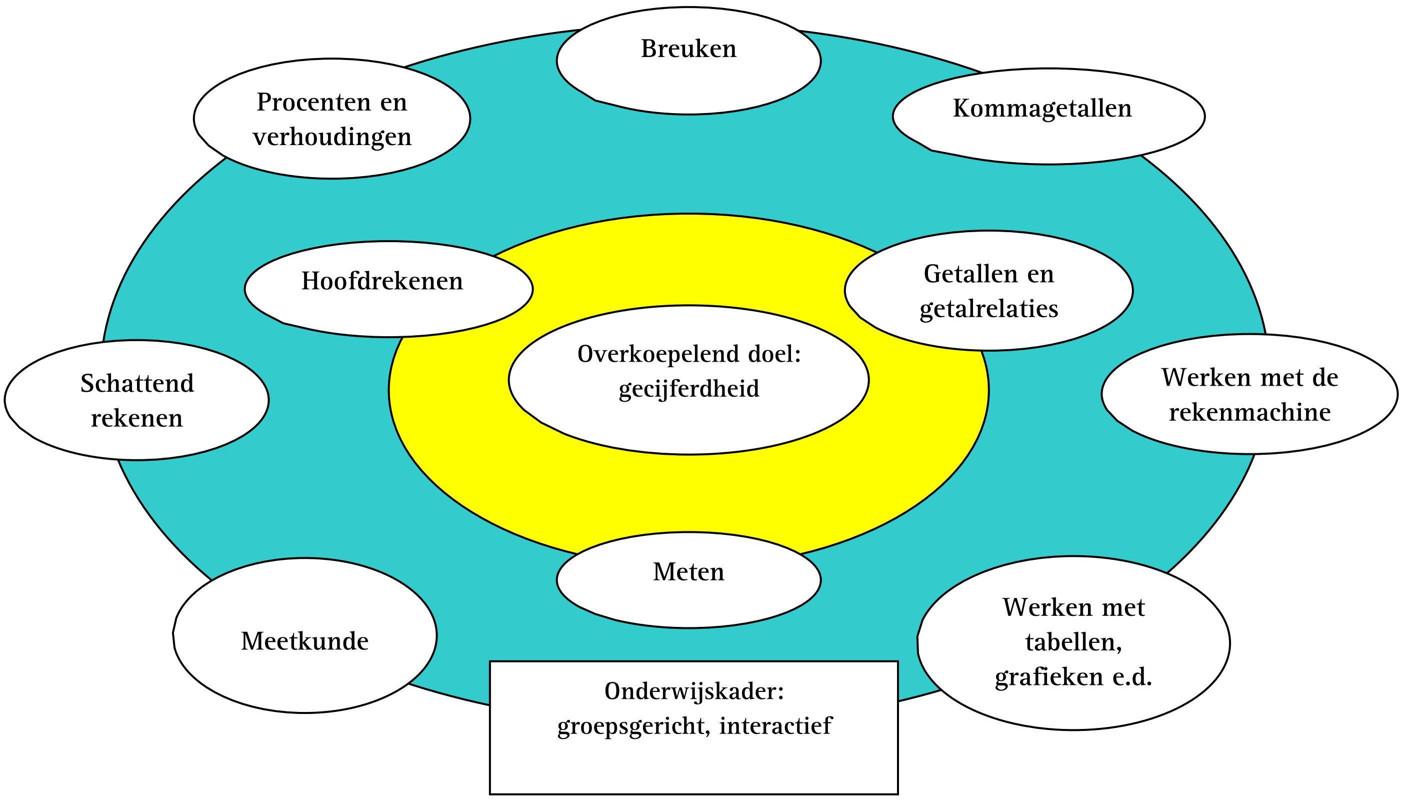
Kees Buijs
Pieter van der Zwaart

1. Afbakening aandachtsgebieden doorgaande lijn naar vmbo

Kees Buijs

1.1 Inleiding

Hieronder worden in een notendop een tiental leerstofdomeinen met bijbehorende onderwijsdoelen beschreven die van belang zijn voor de doorgaande lijn naar het VMBO. Een en ander wordt vooraf gegaan door een omschrijving van een onderwijsdoel van meer algemene en overkoepelende aard, te weten gecijferdheid.
Het geheel wordt afgesloten met een typering van het onderwijskader waarbinnen het beoogde onderwijs zich afspeelt: dat van het interactieve, groepsgerichte onderwijs.
Met de beschrijvingen wordt in de eerste plaats beoogd een indicatie te geven van wat ook in het onderwijs aan zwakkere leerlingen in grote lijnen aan bod dient te komen. Dat wil niet zeggen dat alle genoemde doelen voor alle leerlingen ook altijd haalbaar zullen zijn en gerealiseerd dienen te worden. Maar wel dat ernaar gestrééfd kan worden om deze doelen zoveel mogelijk te bereiken en dat men daarmee als onderwijsgevende, ijs en weder dienende, een heel eind kan komen. De doelen moeten dan ook primair als streefdoelen opgevat worden, en niet als minimumdoelen die voor alle leerlingen ten allen tijde gehaald moeten worden.
In de beschrijvingen worden veelal eerst de meest elementaire doelen genoemd die voor alle leerlingen gerealiseerd kunnen worden. Daarna volgen doelen van minder basale aard – doelen die voor sommige leerlingen wel maar voor andere niet volledig haalbaar zullen blijken te zijn.
Impliciet klinkt in de beschrijvingen van inhouden en doelen regelmatig iets door van de aard van het beoogde onderwijs, in het bijzonder voor wat betreft het interactieve, groepsgerichte karakter daarvan zoals dat in de TAL-brochure ’Hele getallen Bovenbouw’ wordt aangegeven. Om elke twijfel op dit punt weg te nemen, wordt dit onderwijskader in een afsluitende paragraaf nog eens kort getypeerd.
Al met al leidt dit tot een elftal van aandachtsgebieden voor het onderwijs aan zwakkere leerlingen die in het volgende nader worden belicht en met voorbeelden worden geïllustreerd.



1.2 Elf leerstofgebieden met bijbehorende onderwijsdoelen

1.2.1 Gecijferdheid als overkoepelend doel

Gecijferdheid wordt tegenwoordig algemeen beschouwd als het centrale, overkoepelende onderwijsdoel dat het kader vormt waarbinnen allerlei domeinspecifieke inhouden en leerdoelen betekenis hebben en begrepen dienen te worden. Dit geldt zeker ook voor de groep leerlingen die moeite met rekenen-wiskunde hebben en die veelal naar de lagere stromen van het VMBO en het Praktijkonderwijs doorgaan.
Gecijferd zijn komt in de eerste plaats tot uitdrukking in het in staat zijn om zin te geven aan getallen en getalsmatige gegevens zoals een leerling die tegenkomt op straat, in de krant, op de televisie, en op Internet. Kenmerkend is dat hij / zij begrijpt wat bedoeld wordt met bijvoorbeeld een prijsopgave in een advertentieblad, een tijdsaanduiding in een winkeletalage, een kortingpercentage in een krantenadvertentie, en een inhouds- of gewichtmaat op een verpakking. Voor gecijferdheid is het belangrijk dat zulke getallen in hun context begrepen worden, dat een leerling inzicht in de orde van grootte ervan heeft en ze aan andere, naburige getallen kan relateren. Daarbij hoeft het niet altijd zo te zijn dat direct doorgrond wordt waar het over gaat en wat de getallen in kwestie te beduiden hebben. Het kan ook zijn dat dit pas tot de waarnemer doordringt op het moment dat deze z'n gedachten er even over laat gaan, en zich afvraagt wat de betekenis mogelijk zou kunnen zijn.

Zo zal lang niet iedereen die het hierboven afgebeelde verkeersbord tegenkomt, onmiddellijk doorgronden wat er met de getallen in kwestie bedoeld wordt. Maar enig nadenken zal al gauw tot de slotsom kunnen leiden dat het bij 3,8 m om een hoogte gaat, waarschijnlijk om de doorrijhoogte van een viaduct. Evenzo kan het vermoeden rijzen dat het getal daaronder, 2900 m, staat voor de afstand waarop dat viaduct zich van het verkeersbord bevindt: op een afstand van bijna 3 km dus. Zoals dit voorbeeld laat zien vormt maatbesef in de zin van kennis van maateenheden, gevoel voor de grootte daarvan en inzicht in de onderlinge relaties daartussen, een essentieel aspect van gecijferdheid.

Verder houdt gecijferd zijn in dat een leerling inzicht in de hoofdbewerkingen heeft, in de samenhang tussen die bewerkingen, en in elementaire bewerkingseigenschappen zoals commutativiteit en distributiviteit. Dat betekent ook dat hij/zij kan onderkennen wanneer een bepaalde bewerking of combinatie van bewerkingen van toepassing is, en dat bij benadering ingeschat kan worden wat het effect van die bewerking(en) is. Dit impliceert dat een leerling in staat is de orde van grootte van de uitkomst grofweg te bepalen, en zich rekenschap kan geven van de betekenis van die uitkomst. Vaardigheid in elementair hoofdrekenen en schattend rekenen vormt hiervoor een belangrijke voorwaarde. Ook het bewust kunnen kiezen voor het al dan niet inzetten van de rekenmachine kan ertoe gerekend worden.
Ten slotte is een belangrijk kenmerk van onderwijs dat gericht is op gecijferdheid, dat leerlingen regelmatig succeservaringen opdoen, dat ze plezier hebben in het werken met getallen, maten en getalsmatige gegevens, en dat ze zich bewust zijn dat dit in positieve zin bijdraagt aan hun algehele ontwikkeling.

1.2.2 Getallen en getalrelaties

Begrip van getallen en inzicht in elementaire getalrelaties vormen een essentieel aspect van gecijferdheid en zijn te beschouwen als een hoeksteen voor de hele rekenwiskundige ontwikkeling van leerlingen – een hoeksteen die voor het proces van het steeds efficiënter en doordachter leren omgaan met getallen en getalsmatige gegevens van grote waarde is. Dit geldt zeker ook voor leerlingen bij wie dat begrip zich in de lagere leerjaren van het basisonderwijs minder voorspoedig ontwikkeld heeft. Het gaat daarbij primair om zaken als:

- betekenis kunnen geven aan getallen in gebruikssituaties zoals in het geval van prijsaanduidingen, tijdsaanduidingen en maatgetallen; en omgekeerd kale getallen kunnen 'contextualiseren' door ze te verbinden met een passende reële situatie;
- de structuur van de telrij doorzien en getalreeksen kunnen voortzetten zoals bij het tellen met sprongen van 10, 20, 50 en 100;
- gevoel voor de (orde van) grootte van getallen hebben, en getallen globaal op de getallenlijn of een interval daarvan kunnen plaatsen;
- inzicht in de relaties tussen getallen zoals in het geval van ronde en bijna ronde getallen, en in het geval van elementaire getalcombinaties zoals 25, 50 en 100; 5, 12 en 60; 8, 15 en 120; 4, 250 en 1000; en zo meer.
- inzicht in de decimale structuur van getallen hebben en in de waarde van de cijfers in een getal (positiewaarde);
- inzicht in de grootte van zeer grote getallen (miljoen en miljard), in staat zijn om deze op een 'miljoenen-getallenlijn' globaal te plaatsen.

In het onderwijs komen zulke zaken veelal niet gescheiden aan bod, maar in onderlinge samenhang. Zo kan een fragment uit een folder als het bovenstaande aanleiding geven om te bespreken wat voor soort getallen erin voorkomen (prijzen, gewicht- en inhoudsmaten) en waar je die getallen makkelijk mee in verband kunt brengen (1.29 is bijna 1 euro 30; 0.55 is iets meer dan een halve euro; 400 gram is bijna een halve kilo, 1,5 liter is anderhalve liter).

Begrip van getallen ontwikkelt zich door de hele basisschool heen en is nauw verbonden met het leren opereren ermee. Zo verkennen de leerlingen bij het rekenen tot 1000 eerst het getalgebied tot 1000 tot op zekere hoogte, waarbij een eerste begripslaag wordt gelegd. Naderhand, als het rekenen met deze getallen steeds meer vordert, vindt een verdieping van het begrip plaats via een bezinning op de decimale getalstructuur en op het fenomeen van de plaatswaarde. Bij de verkenning van steeds grotere getallengebieden (tot 100.000, tot 1 miljoen, tot 1 miljard, ...) wordt dit begrip naderhand steeds verder verdiept.

1.2.3 Hoofdrekenen

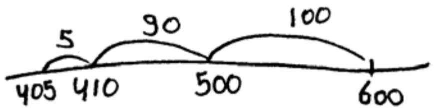
Elementair hoofdrekenen vormt de grondslag van alles wat leerlingen verder met getallen leren doen, ook wat betreft breuken, kommagetallen, meten, procenten en elementaire algebra. Daarom is dit leerstofgebied van essentieel belang, zeker ook voor leerlingen die naar het VMBO gaan. Het betreft daarbij vooral opgaven uit het getalgebied tot 100 en het getalgebied tot 1000. Bijvoorbeeld:

56 + 30 =	6 x 8 =	56 + 80 =	6 x 135 =
45 + 27 =	7 x 6 =	350 + 75 =	20 x 45 =
80 – 32 =	32 : 4 =	400 – 25 =	400 : 5 =
72 – 25 =	56 : 8 =	600 – 195 =	600 : 4 =

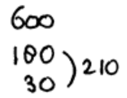
Je koopt 3 pakken koffie van € 1,95
en je betaalt met een tientje.
Hoeveel geld krijg je terug?

De trein vertrekt om 17 minuten over 9.
Op het horloge van Lisa is het 08.45 uur.
Over hoeveel minuten gaat de trein weg?

Voor een deel gaat het erom dat leerlingen zulke opgaven redelijk vlot en handig uit het hoofd kunnen uitrekenen (56+30, 80-32, 9x50), of zelfs het antwoord direct weten (6x8, 7x6). Meer in het algemeen echter kunnen de leerlingen bij het oplossen van hoofdrekenopgaven gebruik maken van passende tussennotaties (het 'kladblaadje') waarmee ze hun denken ondersteunen. Dit kan in de vorm van een schematische voorstelling van de situatie, in de vorm van een model of in de vorm van een tussenstap die in rekentaal wordt genoteerd.

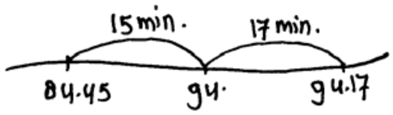


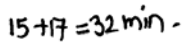
Voorbeeld van een tussennotatie in de vorm van een model: 600-195 uitgerekend via de rijgaanpak op de lege getallenlijn.

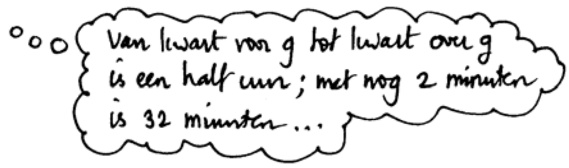


Voorbeeld van een tussennotatie in de vorm van een tussenstap in rekentaal: 6x135 uitgerekend via notatie van

Verder gaat het erom dat de berekening op basis van kennis van strategieën en inzicht in bewerkingen plaatsvindt, waarbij gebruik wordt gemaakt van getalrelaties en bewerkingseigenschappen. In het kader van het onderwijsleerproces rond hoofdrekenen dienen de leerlingen een repertoire aan handige rekenstrategieën op te bouwen op grond waarvan ze in staat zijn om al naar gelang de opgave voor een passende strategie te kiezen. Zo dienen ze in staat te zijn om bij 600-195 de rijgaanpak of de aanvulstrategie te hanteren, en bij 20x45 handig met nullen te redeneren door 2x45 en dan 10 keer zoveel te doen of door het eerste getal handig te splitsen (10x45 en nog eens 10x45). Evenzo dienen ze in de Lisa-situatie in staat te zijn om op basis van hun tijdsbesef en kennis van het klokkijken een modelondersteunde of een zuiver mentale redenering als hieronder te hanteren.







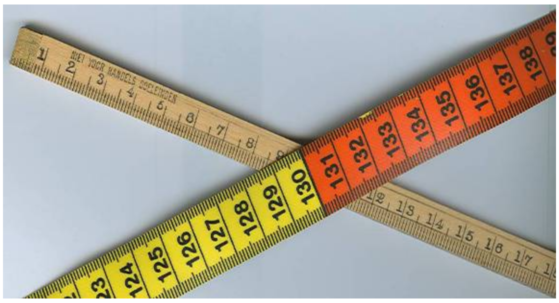
Met hoofdrekenen dienen de leerlingen zo grondig vertrouwd te zijn dat ze zich bij deze vorm van rekenen helemaal veilig voelen en dat ze het als een basis beschouwen waarop je te allen tijde kunt terugvallen.

1.2.4 Meten

Kennis van het meten is eveneens van cruciaal belang, zowel met het oog op de maatschappij (waarin meetgegevens een grote rol spelen) als met het oog op het vervolgonderwijs. Binnen dit gebied komt het er in de eerste plaats op aan dat de leerlingen een goed maatbesef ontwikkelen en dat ze zich bewust zijn van de zin van het gebruik van een maat als middel om de afmetingen van allerlei objecten te vergelijken en kwantificeren. Mede op basis van die kennis dienen ze in staat te zijn om eenvoudige meetinstrumenten te gebruiken.

Zulke instrumenten hebben betrekking op de volgende drie grootheden:

- Lengte: liniaal, duimstok, centimeter, rolmaat, e.d.
- Inhoud: maatbeker
- Gewicht: keukenweegschaal, personenweegschaal, eventueel brievenweger



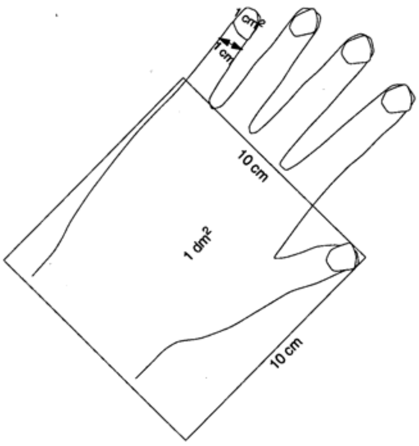
Twee voorbeelden van meetinstrumenten voor het bepalen van lengte: duimstok en (huishoud-)

De leerlingen dienen in staat te zijn zulke instrumenten op een passende manier te gebruiken om de lengte, de inhoud of het gewicht van allerlei objecten te bepalen, en daarbij zo nodig een geschikte meetstrategie te bedenken. Bijvoorbeeld: hoe meet je de hoogte van een deur met een duimstok? En: hoe controleer je de inhoud van een pakje melk waar op staat dat er 0,2 liter in zit? Daarnaast moeten ze het resultaat van een uitgevoerde meting goed kunnen interpreteren en zo nodig afronden.

Verder zijn de grootheden oppervlakte en tijd van belang. Voor wat betreft de eerste daarvan moeten de leerlingen in staat zijn om de oppervlakte van allerlei platte objecten te bepalen met behulp van natuurlijke maateenheden zoals een tegel of een roostervierkantje, en met behulp van standaardmaten zoals de vierkante meter en de vierkante decimeter. Voor wat betreft de tweede grootheid gaat het vooral om het kunnen klokkijken en het kunnen werken met digitale tijd.
Voorts is het van belang dat de leerlingen een zekere kennis van de officiële metrieke maateenheden met betrekking tot de genoemde grootheden hebben, en dat ze inzicht hebben in de decimale structuur van het stelsel waarvan deze deel uitmaken. Dit betreft de volgende maateenheden:

- Lengte: het stelsel van kleine lengtematen: mm, dm, cm en m; en de km
- Inhoud: het stelsel van de kleine inhoudsmaten: ml, dl, cl en l; en de 'kubieke maten' cm^3, dm^3 en m^3
- Gewicht: g, kg en ton
- Oppervlakte: cm^2, dm^2, m^2 en km^2
- Tijd: de gangbare maten seconde, minuut, uur, dag, week, maand en jaar.

In contextsituaties moeten ze eenvoudige maatherleidingen (zoals tussen meters en centimeters) kunnen uitvoeren, maar met kale getallen is dit niet nodig. Tenslotte is het van belang dat de leerlingen deze maten kunnen verbinden met voor de hand liggende referentiematen (zoals de handpalm en de nagel van een hand als referentiematen voor de cm^2 en dm^2), en dat ze op basis van deze kennis, tot aanvaardbare schattingen van de afmetingen van objecten kunnen komen zoals in het geval van de hoogte van een gebouw op basis van informele kennis van 'verdiepinghoogte' of deurhoogte.



Voorbeeld van twee referentiematen: de handpalm voor de dm^2 en de nagel voor de cm^2.

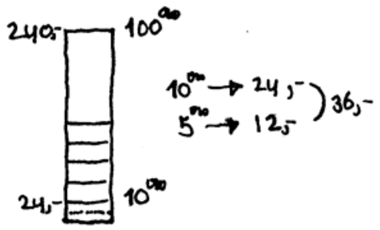
1.2.5 Procenten en verhoudingen

Procenten zijn eveneens zowel maatschappelijk als met het oog op het voortgezet onderwijs van belang. Daarbij gaat het er in de eerste plaats om dat de leerlingen de betekenis van procenten begrijpen in alledaagse situaties zoals bij korting, bij stijging/daling, in deel-geheel-situaties, verhoudingssituaties, e.d. In samenhang daarmee dienen ze in staat te zijn de grootte van percentages globaal-schematisch in een plaatje weer te geven. Bijvoorbeeld:

Verder dienen ze elementaire opgaven te kunnen oplossen waarbij met procenten als operator gewerkt wordt, in het bijzonder in het geval van 'mooie' percentages zoals:

15% van € 240,- = ...
40% van € 560,- = ...
75% van € 1200,- = ...

De berekening hierbij kan, net als bij het elementaire hoofdrekenen, ondersteund worden met een modelmatige voorstelling (in dit geval de strook) of met een notatie van tussenstappen in rekentaal.



Voorbeeld van een berekening waarbij de strook als ondersteunend model

Opgaven met minder mooie percentages (4% van € 375,- is ; 12% van € 495,- is) dienen de leerlingen in ieder geval met behulp van de rekenmachine te kunnen uitrekenen. Hierbij kunnen ze gebruikmaken van de procententoets, maar het ligt meer voor de hand dat ze een deel van de berekening zelf uitvoeren (bijv.: 1% van € 495,- is € 4,95) en de rest op de machine (12 x € 4,95).
Tenslotte moeten de leerlingen in staat zijn elementaire getalsmatige verhoudingen naar een percentage om te rekenen, bijvoorbeeld in situaties als:

- 20 van de 80 stoelen in de zaal bleven leeg; dat is ... %
- 30 van de 200 leerlingen komen met de fiets naar school; dat is ... %

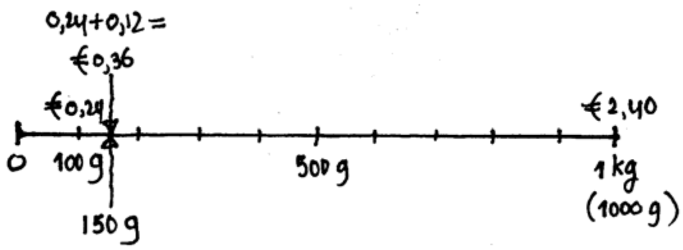
Ook hier kunnen de leerlingen gebruikmaken van de strook als ondersteunend model.

Verhoudingen spelen binnen veel leerstofgebieden een prominente rol. Dat geldt niet alleen voor het gebied van de procenten (zoals hierboven aangeduid) maar ook voor breuken (zie verderop), meetkunde (grootteverhoudingen, schaalbegrip) en meten (maatverhoudingen, metriek stelsel). In verband met deze verwevenheid is dit domein moeilijk als een op zichzelf staand gebied op te vatten met een aparte leerlijn, aparte leerdoelen, enzovoorts. Wel zijn er bepaalde typen verhoudingsopgaven die de leerlingen met eenvoudige getallen moeten kunnen oplossen. Dit betreft met name:

- prijs-gewicht-problemen. Bijvoorbeeld: 1 kg sperziebonen kost € 2,40; wat betaal je voor 250 gram? En voor 150 gram?

- problemen rond aantalsverhoudingen, zoals bij recepten: voor een gerecht bestemd voor 4 personen heb je 200 ml melk nodig; hoeveel melk heb je in het geval van 6 personen nodig?
  En in het geval van 10 personen?
- problemen waarin de standaard-verhoudingsaanduiding '1 op de ..' wordt gebruikt. Bijvoorbeeld: bij een onderzoek onder 2500 inwoners naar de wenselijkheid van een nieuwe randweg bleek 1 op de 5 personen tegen te zijn; hoeveel personen waren dit?

Bij het oplossen van dergelijke problemen komt het er vooral op aan dat de leerlingen tot een passende inzichtelijke redenering kunnen komen, gebruik makend van modellen zoals de dubbele getallenlijn, de strook en de cirkel. In het geval van het probleem rond de prijs van 150 gram sperziebonen;



1.2.6 Kommagetallen

Voor dit gebied geldt hetzelfde als voor het vorige: maatschappelijk zijn kommagetallen van belang, en voor het voortgezet onderwijs eveneens. Kommagetallen komen in de praktijk vooral voor als meetgetallen, en het is dan ook in de eerste plaats nodig dat de leerlingen betekenis aan dergelijke getallen kunnen geven. Wat betekent het bijvoorbeeld als een verkeersbord een breedte van 2,3 m vermeldt? En als de koortsthermometer 38.91 graden aangeeft? En als er 0,25 l of 0,2 l op een flesje drinken staat?

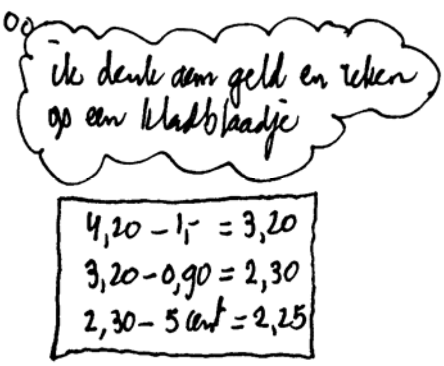
In samenhang hiermee dienen de leerlingen in staat te zijn om kommagetallen te vergelijken en op de getallenlijn te plaatsen. Bijvoorbeeld:
- Wat is meer, een inhoud van 0,25 l of een inhoud van 0,2 l?
- Kan een vrachtwagen met een breedte van 2,15 m over een weg met een breedte van 2,3 m?
- Welk getal ligt op de getallenlijn midden tussen 2,3 en 2,4?
- Welk getal ligt op de getallenlijn het dichtste bij 10: 9,9 of 9,85 of 10,05?

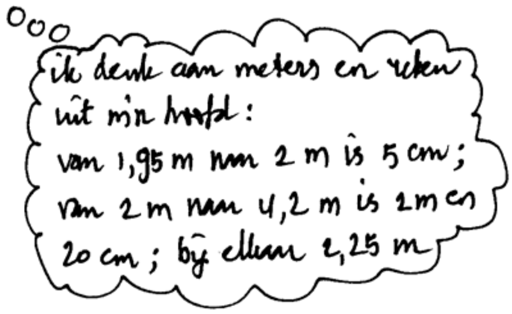
Voor wat betreft het rekenen met kommagetallen is het van belang dat de leerlingen elementaire hoofdrekenopgaven zelf kunnen uitrekenen. Bijvoorbeeld:

3,5 + 2,7 =	4 x 3,6 =	10 x 0,35 =
2,4 + 1,75 =	5 x 1,25 =	100 x 1,05 =
2 – 0,75 =	de helft van	2,5 : 10 =
4,2 – 1,95 =	0,5 is ..	35 : 100 =

De hoofdrekenstrategieën die ze binnen het domein van de hele getallen hebben verworven, kunnen hierbij volop toegepast worden. Dat betekent ook dat ze al naar gelang de eigen voorkeur gebruik kunnen maken van tussennotaties. Een essentieel element bij het gebruik van dergelijke strategieën is gelegen in het contextualiseren (het met een passende reële situatie verbinden) van de opgave.

In het geval van 4,2 - 1,95 = ..:





Opgaven met complexere getallen dienen de leerlingen op de rekenmachine te kunnen oplossen.

Voorts is het van belang dat ze inzicht hebben in de relatie van eenvoudige kommagetallen met breuken zoals in het geval van 0,25 (1/4), 0,5 (1/2), en 0,1 (1/10), en dat ze begrip hebben van kommagetallen als decimaal getal zoals in het geval van het interpreteren van tijden in de sport in termen van 38 seconden en nog 24 honderdsten. Tenslotte is het waardevol dat ze deze getallen begrijpen in het geval van ’miljoen- en miljardkommagetallen’ zoals in situaties als:

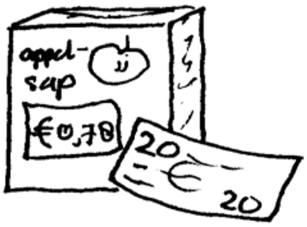
Aanleg fietspad valt duurder uit
De aanleg van het fietspad door de Veenpolder is 450.000 euro duurder uitgevallen dan aanvankelijk was begroot. In de oorspronkelijke begroting was een bedrag van € 1,8 miljoen euro opgenomen.

1.2.7 Gebruik van de rekenmachine

De noodzaak van het verstandig kunnen omgaan met de rekenmachine behoeft weinig betoog. Het rekenapparaat is inmiddels zo ver ingeburgerd in onze samenleving inclusief het voortgezet onderwijs, dat de leerlingen hiermee aan het eind van de basisschool goed uit de voeten moeten kunnen. Dat houdt in de eerste plaats in dat ze de vier hoofdbewerkingen zowel met kale getallen als in toepassingssituaties met willekeurige getallen (hele getallen of kommagetallen) vlot en efficiënt kunnen uitvoeren. Met name voor toepassingssituaties hoeft dit soms nog niet zo eenvoudig te zijn. Bijvoorbeeld:

- Bij de topwedstrijd Ajax-Feyenoord in de Amsterdam-Arena zijn van de 45.000 plaatsen er 38.764 bezet. Hoeveel plaatsen zijn er leeg?

- Een pak sinaasappelsap kost deze week bij Super Simon € 0,78. Hoeveel pakken kun je maximaal kopen met een briefje van 20 euro?



In beide situaties komt het er in de eerste plaats op aan dat een geschikte bewerking bedacht wordt – pas dan is het mogelijk de rekenmachine gericht in te zetten. In de eerste situatie betekent dit dat doorzien wordt dat het om aftrekken gaat; aanvullen kan eventueel ook, maar dat doe je minder makkelijk op de machine. In de tweede situatie is de meest efficiënte bewerking natuurlijk het delen, maar lang niet alle leerlingen zullen deze bewerking zo gauw 'herkennen'. Een alternatief is in deze situatie ook toereikend, namelijk opvermenigvuldigen: via uitproberen kan achterhaald worden dat 20 pakjes mogelijk is (want 20 x € 0,78 is € 15,60); en vervolgens kan net zo lang verder gegaan worden tot de grens bereikt is: 24 x € 0,78 is € 18,72; 25 x € 0,78 = € 19,50, dat is dus het maximale aantal. Kortom: het gaat niet alleen om het kunnen bedienen van de knoppen op het apparaat, maar ook om het begrijpen van de betreffende situaties en het doorzien welke bewerking of combinatie van bewerkingen in aanmerking komt om uit te voeren. In de tweede situatie komt daar dan nog bij dat het kommagetal op de juiste manier ingetoetst dient te worden, waarbij de punt op de machine als komma moet worden gehanteerd. Via afronden kan overigens achterhaald worden dat de uitkomst van 25 pakjes correct is. Immers, 25 x 80 cent is 20 euro.

Deze laatste handeling laat een ander belangrijk aspect van het werken met de machine zien. Wil je de greep over de verschillende handelingen niet kwijt raken, dan is het van belang dat je in staat bent om de uitkomst van een berekening globaal te schatten.
Tenslotte is het nog van belang dat de leerlingen goed onderscheid leren maken tussen opgaven waarbij een eenvoudige hoofdrekenstrategie of schatstrategie meer voor de hand ligt, en opgaven die bij voorkeur beter op de machine uitgerekend kunnen worden.

1.2.8 Breuken

Het domein van de breuken is als op zichzelf staand leerstofgebied maar van beperkt betekenis. Natuurlijk is het van belang dat leerlingen de breukentaal begrijpen en dat ze betekenis kunnen geven aan breuken in situaties als:

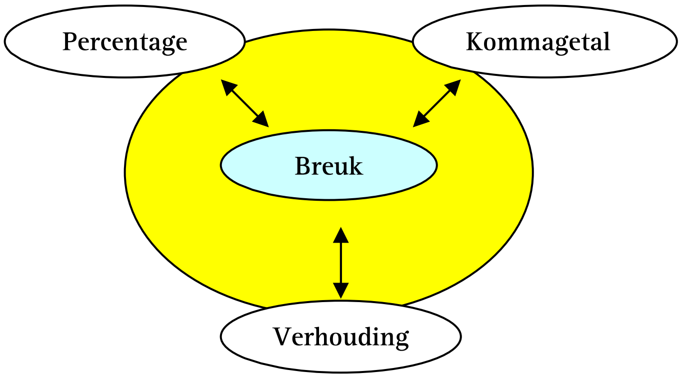
> **Steeds meer dikke Nederlanders**
> Het aantal te dikke Nederlanders is weer verder toegenomen. Op dit moment is ongeveer tweevijfde deel van alle personen ouder dan 18 jaar te dik. Dat heeft recent onderzoek uitgewezen.

Ook is het van waarde dat ze gevoel voor de grootte van breuken hebben, dat ze in staat zijn om deze getallen op een getallenlijn te plaatsen, en dat ze met de breuk als operator kunnen werken in situaties als:
2/5 deel van € 450,- = ...
Maar bewerkingen met breuken zijn verder slechts van beperkte betekenis. Kennis van de nogal abstracte rekenprocedures voor het opereren met breuken (zoals bij het optellen en aftrekken met ongelijknamige breuken) is niet nodig.

Hoogstens is het waardevol om uit de voeten te kunnen in elementaire situaties waarin het gaat om de meest basale benoemde breuken zoals:

- 1/2 liter + 3/4 liter = ..
- 2 kg - 1/4 kg = ..
- 6 x 3/4 meter = ..

In feite gaat het in zulke situaties niet om rekenprocedures, maar om elementaire getalrelaties die vanuit de betreffende context beredeneerd en onderbouwd kunnen worden. Hetzelfde geldt voor inzicht in gelijkwaardigheid van breuken. Kennis van enige elementaire relaties op dit gebied (zoals het feit dat 1/2 evenveel is als 2/4, 4/8 en 5/10) is waardevol, maar inzicht in het feit dat alle breuken ingedeeld kunnen worden in klassen van gelijkwaardige breuken (cq. equivalentieklassen) is van weinig belang.
Breuken hebben daarnaast echter nog een andere belangrijke functie, namelijk als verbindende begripsmatige schakel tussen de verwante begrippen percentage, verhouding en kommagetal. In een plaatje kan dit als volgt tot uitdrukking gebracht worden:



Van deze vier begrippen hebben de eerstgenoemde twee per definitie betrekking op relatieve getallen die zich het beste laten visualiseren in een strook of cirkel, terwijl het laatstgenoemde begrip vooral verbonden is met getallen met een absolute grootte die zich het makkelijkste schematisch laten weergeven op de getallenlijn. Breuken vormen een begrip dat zowel een relatief als een absoluut aspect heeft: relatief als gesproken wordt over bijvoorbeeld 2/5 deel van een groep mensen, absoluut als sprake is van een maataanduiding in gevallen als 3/4 liter of 9/10 seconde. Juist door dit tweezijdige karakter kunnen breuken als de verbindende schakel tussen de verschillende begrippen worden opgevat.
Het is van groot belang dat de leerlingen kennismaken met deze scharnierfunctie in de zin dat ze breuken leren zien als een mogelijkheid om procenten beter te begrijpen (40% als '4 van de 10 stukjes' oftewel 4/10 deel), om kommagetallen nader te kunnen vatten (0,4 m opvatten als 4/10 m of 4 *deci*-meter) en om verhoudingen op een andere manier te kunnen omschrijven ('2 op de 5 Nederlanders' als 2/5 deel van de Nederlanders).

1.2.9 Schattend rekenen

'Afzien van de details der getallen en via passende afrondingen tot een globale oplossing voor een probleem komen', zo wordt schattend rekenen wel omschreven. Het gaat dan veelal om problemen waarbij een precieze oplossing niet nodig of niet mogelijk is. Daarnaast is er een andere categorie problemen waarbij schattend rekenen onmisbaar is, namelijk problemen waarbij precieze gegevens ontbreken en geredeneerd moet worden op basis van referentiematen en –getallen.

Bijvoorbeeld:

- Hoeveel krentenbollen van € 0,49 kun je kopen voor een tientje?
- Judith spaart per maand ongeveer 15 euro. Ze spaart voor een nieuw mobieltje van € 179,50. Hoe lang moet ze nog ongeveer sparen?
- Een mededeling uit een folder over slaapartikelen: Klopt het dat de korting 25% bedraagt?
- In De Volkskrant stond de volgende afbeelding met bijgaande tekst

Het bijna drieduizend meter lange cruiseschip Carnival Triumph meert af in de haven van Miami. Het schip begint vandaag aan zijn maidentrip met ruim 2700 passagiers aan boord. De gasten hebben de keus uit achttien bars.
FOTO AP (De Volkskrant, oktober '99)

Zou dat wel kloppen, een boot van ruim 3000 meter lang?

Een goede vaardigheid in het schattend rekenen in situaties zoals de bovenstaande is een essentieel aspect van gecijferdheid en dus ook voor leerlingen die naar het VMBO gaan, van grote betekenis. Het gaat dan in de eerste plaats om het kunnen opzetten van een geschikte redenering en het uitvoeren van de bijbehorende berekening, zoals:

- € 0,49 is bijna 50 cent; dat is dus 2 krentenbollen voor 1 euro, en 20 voor een briefje van 10
- 15 euro per maand wil zeggen 150 euro in 10 maanden, en 180 euro in 12 maanden; het duurt dus ongeveer 1 jaar
- € 499,- is bijna 500 euro; 10% daarvan is 50 euro, dus 25% 50+50+25 is 125 euro; het klopt dus inderdaad.
- Een boot van 3000 meter lang kan nooit! Want zulke lange kades bestaan helemaal niet, en dan zou die boot niet eens kunnen aanleggen. Je kunt ook naar de reddingboten kijken; stel eens dat die 20 of 25 meter lang zijn, dan kan de totale lengte van de boot nooit meer dan 300 meter zijn. Ze zullen zich wel vergist hebben, het moet natuurlijk 300 in plaats van 3000 meter zijn...

Bij schattend rekenen gaat het echter nog om meer dan vaardigheid in de zin van het kiezen van passende afrondingen, het uitvoeren van elementaire hoofdrekenhandelingen en het redeneren op basis van geschatte afmetingen. Het gaat evenzeer om een goed inzicht in de vraag wanneer een schatstrategie bij voorkeur in aanmerking komt, en om het terugkoppelen van de verkregen uitkomst naar de oorspronkelijke vraag. Het is zeer waardevol dat leerlingen ruime ervaring met dit soort zaken opdoen.
Daarnaast heeft schattend rekenen een belangrijke functie als middel om greep te houden op precieze berekeningen, met name ook bij het gebruik van de rekenmachine. Het is immers vaak niet eenvoudig om bij het werken op de machine het overzicht over de opeenvolging aan uitgevoerde rekenhandelingen te bewaren – je hoeft maar een nul weg te laten of een komma te vergeten, en het antwoord klopt van geen kanten meer. Door een kritische houding ten aanzien van het eigen rekengedrag te ontwikkelen en door via globale schattingen in het oog te houden in hoeverre een uitkomst of tussenuitkomst correct is, kan dit greep houden in hoge mate bevorderd worden.

1.2.10 Meetkunde

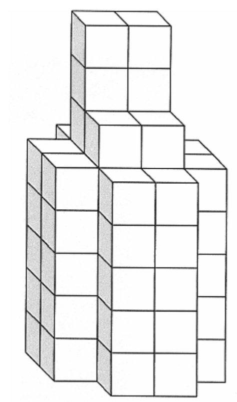
De term meetkunde roept soms enige verwarring op doordat deze lijkt te suggereren dat het om 'kunde van het meten' gaat en dus om het goed kunnen meten. Dit is niet juist. Bij meetkunde gaat het om het 'begrijpen van de ruimte' (zoals het in de TAL-brochure 'Jonge kinderen leren meten en meetkunde' wordt geformuleerd), oftewel om de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht. Op het niveau van de basisschool heeft dit leerstofgebied betrekking op een veelheid aan verschijnselen en situaties waarin het erom gaat greep te krijgen op ruimtelijke aspecten van de situatie of het verschijnsel. De activiteiten concentreren zich veelal rond meetkundige thema's zoals:

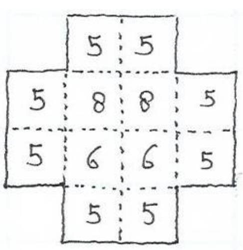
- het bouwen en construeren met allerlei materialen; het werken met bouwplaten, werktekeningen en aanzichten daarbij;
- het werken met spiegelbeelden en symmetrie;
- het werken met ruimtelijke vormen zoals rechthoek, vierkant en cirkel (tweedimensionaal), en kubus, bol, balk en cilinder (driedimensionaal);
- het werken met vogelvluchtplaten, plattegronden, landkaarten, routes, e.d.; alsmede het werken met het daaraan gekoppelde schaalbegrip;
- het innemen van een mentaal standpunt (viseren) en het werken met schaduwbeelden en projecties
- ...

Ook voor zwakkere leerlingen is het van grote waarde om ervaring met deze thema's op te doen. Het gaat daarbij niet zozeer om het bereiken van een aantal wel omschreven meetkundige doelen, maar vooral om het opdoen van ervaring op basis van een stukje verwondering over ruimtelijke verschijnselen, om het proberen bepaalde meetkundige zaken met elkaar in verband te brengen en te verklaren, en om voorstellingen van ruimtelijke aspecten van de realiteit te construeren. Bijvoorbeeld:

- het bouwen van blokkenbouwsels, het handig tellen van aantallen blokken en het werken met in bouwtekeningen daarbij;
- het maken van een plattegrond van de klas, de school of de wijk; het beschrijven van routes en het werken met richtingen en afstanden daarbij
- het construeren van een ruimtelijke vorm als een kubus, een cilinder, een kegel, e.d.; en het onderzoeken van de eigenschappen van dergelijke vormen
- het interpreteren van een landkaart, het werken met routes en richtingen daarbij, en het werken
- met het schaalbegrip
- het construeren van schaduwbeelden
- ...

Het is vooral het praktisch bezig zijn met concrete materialen en situaties in combinatie met het reflecteren op de ruimtelijke relaties die zich voordoen en het met elkaar in verband brengen van zulke relaties, die meetkundeonderwijs voor de zwakkere leerlingen aantrekkelijk en interessant maken. Bijvoorbeeld: de klas treedt als 'architect' op en bouwt onder leiding van de leerkracht het nevenstaande blokkenbouwsel na. Vervolgens moet er een ontwerp voor een bouwtekening bedacht worden waarop het bouwbedrijf precies kan zien hoe het bouwsel moet gaan worden.



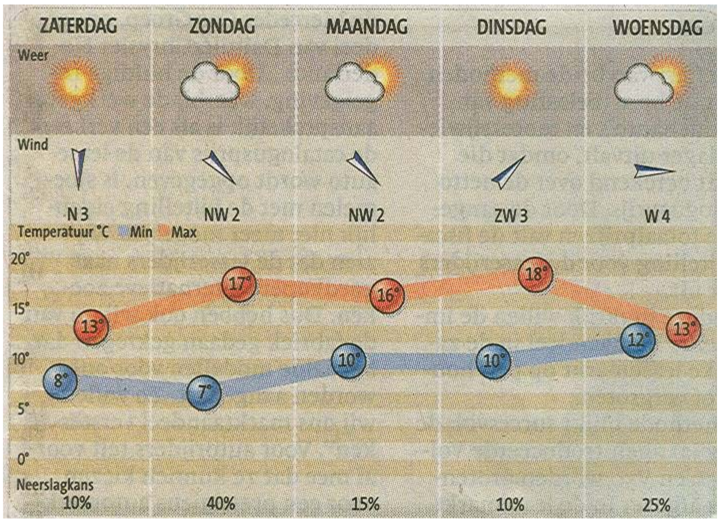


Het idee van de plattegrond met hoogtegetallen dat bij het werken aan deze opdracht naar voren komt, wordt vervolgens weer gebruikt om nieuwe bouwsels te bedenken en te bouwen. Daarbij geven de leerlingen elkaar opdrachten, beurtelings als ontwerper en als bouwer optredend.

1.2.11 Werken met tabellen, grafieken e.d.

Veel informatie zoals die in onze samenleving circuleert, komt tot ons in de vorm van tabellen, schema's, grafieken, en zo meer. Het gaat dan bijvoorbeeld om prijsoverzichten, tijdschema's, weersvooruitzichten, tabellen met vertrektijden, enzovoorts.

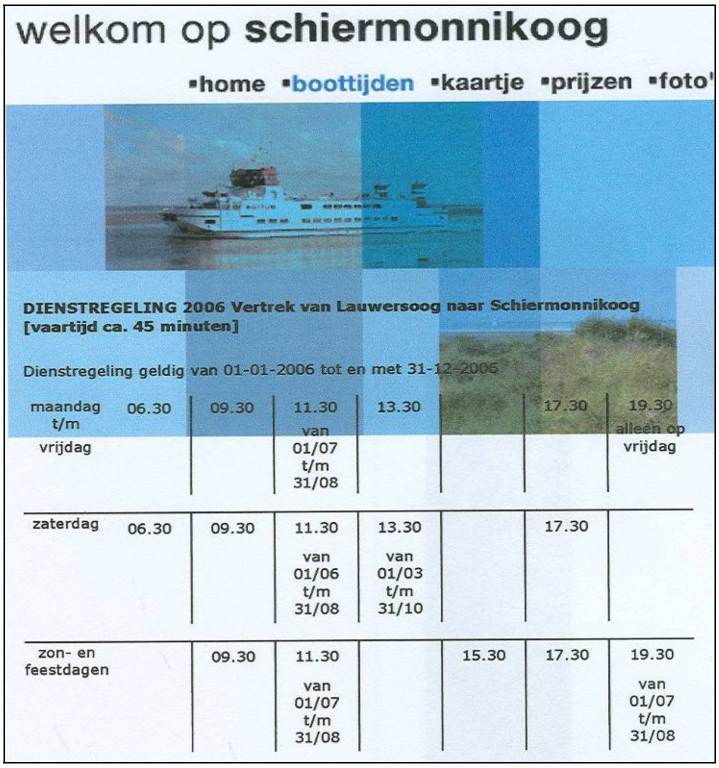
Geschaafd vurenhout	Lengte in meters 2,10	2,70	3,00
33 x 33 mm	-	3,85	4,30
33 x 44 mm	3,95	5,05	5,65
33 x 56 mm	4,65	5,95	6,60



Drie voorbeelden van tabellen en grafieken. Links een prijstabel uit een folder van een hobbyzaak, rechts een overzicht van weersvooruitzichten uit de krant, hieronder een vertrektijdentabel van de boot naar Schiermonnikoog.

Vaak bevatten dergelijke overzichten een schat aan informatie die evenwel lang niet altijd even makkelijk te begrijpen en te gebruiken is. Hoe zoek je bijvoorbeeld aan de hand van het plaatje uit de hobbyfolder uit wat voor planken je het beste kunt kopen als je 5 planken van 3 meter nodig hebt; en wat dat gaat kosten? En hoe bepaal je aan de hand van de vertrektijdentabel hoe laat je in Lauwersoog voor de boot moet zijn in de week van 7 tot 11 augustus?

Om een beter begrip van dergelijke 'informatiedragers' te verwerven, is het van grote waarde om deze met een zekere regelmaat in het onderwijs aan de orde te stellen. Ook is het waardevol om de leerlingen naar aanleiding van bijvoorbeeld eenvoudige statistische onderzoekjes in de groep zelf dergelijke overzichten te laten samenstellen. Dat hoeft overigens niet in aparte lessen te gebeuren die qua leerstofinhoud los staan van de hierboven beschreven domeinen, en in die zin gaat het hier ook niet zozeer om een apart leerstofgebied met aparte leerdoelen – het gaat vooral om geïntegreerde wiskundige activiteiten.



welkom op **schiermonnikoog**

▪home ▪boottijden ▪kaartje ▪prijzen ▪foto'

DIENSTREGELING 2006 Vertrek van Lauwersoog naar Schiermonnikoog [vaartijd ca. 45 minuten]

Dienstregeling geldig van 01-01-2006 tot en met 31-12-2006

maandag t/m vrijdag	06.30	09.30	11.30 van 01/07 t/m 31/08	13.30		17.30	19.30 alleen op vrijdag
zaterdag	06.30	09.30	11.30 van 01/06 t/m 31/08	13.30 van 01/03 t/m 31/10		17.30	
zon- en feestdagen		09.30	11.30 van 01/07 t/m 31/08		15.30	17.30	19.30 van 01/07 t/m 31/08

1.3 Het interactieve, groepsgerichte karakter van het onderwijs

Het is, zeker in de bovenbouw, voor leerkrachten vaak niet eenvoudig om het reken-wiskundeonderwijs zodanig te organiseren dat alle leerlingen goed aan hun trekken komen. Soms wordt de leerstof blijvend met de hele groep samen doorlopen, waarbij het gevaar bestaat dat het voor de zwakkere leerlingen nauwelijks meer te volgen is en dat deze, als gevolg daarvan, min of meer 'meehobbelen'. Soms wordt ervoor gekozen om deze leerlingen aan een apart programma te laten werken, bijvoorbeeld uit een lager leerjaar. Daarmee kan beter worden aangesloten bij het lagere niveau van deze leerlingen. Een gevolg kan echter wel zijn dat de reken-wiskundige activiteiten van deze leerlingen zich nogal sterk in de sfeer van het zelfstandig werken afspelen. Zij krijgen vaak apart instructie op korte momenten dat de rest van de klas bezig is, en moeten het verder vooral hebben van veel zelfstandig werken.
Om de hierboven beschreven leerstofinhouden goed aan de orde te kunnen stellen en om doelgericht aan de bijbehorende onderwijsdoelen te kunnen werken, is het echter nodig dat er sprake is van volwaardig interactief groepsgericht onderwijs zoals het in de TAL-brochure 'Kinderen leren rekenen' wordt omschreven. Dat wil zeggen: er dient ook voor deze groep leerlingen ruimschoots de tijd genomen te worden voor interactieve momenten van instructie en uitwisseling, voor het gezamenlijk van gedachten wisselen over contexten, problemen en oplossingswijzen, en voor reflectiemomenten waarop bepaalde zaken nader overdacht en met elkaar in verband gebracht worden. Ook voor praktische meetactiviteiten zoals die in het voorgaande aangeduid zijn, dient volop de ruimte te zijn, ook al brengt dit soms wat rommeligheid in de klas met zich mee.
In de praktijk is een dergelijke vorm van onderwijs niet altijd even makkelijk te realiseren. Het beste is het indien de school als geheel maatregelen neemt om dit mogelijk te maken.

2. Contouren van een programma rekenen-wiskunde vmbo

Pieter van der Zwaart met bijdragen van Kees Buijs

2.1 Inleiding

In dit tweede deel van de afbakening verkennen wij de mogelijkheden om een leerlijn voor zwakke rekenaars, zoals ingezet in de groepen 6, 7 en 8 van het basisonderwijs, voort te zetten in de eerste leerjaren van het vmbo. In de bijlage is aangegeven waar onze doelgroep zich bevindt in de structuur van het Nederlands onderwijs.
Ook hier richten wij ons niet in de eerste plaats op het alsnog realiseren van de niet gehaalde doelen uit (de eerdere leerjaren van) het primair onderwijs. Wij willen de leerlingen rekenactiviteiten bieden die gericht zijn op het begrijpen van hetgeen zij aan het doen zijn, met dusdanig veel positieve leerervaringen dat zij zelfvertrouwen ontwikkelen in hun vermogen om adequaat om te gaan met situaties waarin getallen en bewerkingen met die getallen een rol spelen. (Zie ook het artikel 'Een wereld zonder cijferen' van Kees Buijs in 'Volgens Bartjens…' mei 2006)

Het eerste uitgangspunt van onze benadering is een curriculum waarin sprake is van een doorlopende gelijktijdige aandacht voor twee invalshoeken. Continue aandacht voor onderhoud en herkansing en continue aandacht voor verdergaande ontwikkeling en exploratie. Enerzijds kan een bepaalde rekenactiviteit voor de ene leerling betekenen dat onderhoud en alsnog begrijpen aan de orde is en voor een andere leerling een meer exploratieve activiteit is. Anderzijds kan een bepaalde rekenactiviteit voor een en dezelfde leerling tegelijkertijd beide invalshoeken in zich hebben. Deze tweevoudige aandacht wordt in paragraaf 2.2 verder toegelicht.

Het tweede uitgangspunt berust op een onderscheid in drie niveaus van het gebruik van rekenstrategieën zoals verwoord door Treffers in 'Proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde', met name in de delen over breuken en kommagetallen. Treffers onderscheidt contextgebonden, modelondersteunde, en (semi-)formele niveaus van oplossen. In paragraaf 2.3 lichten wij aan de hand van enkele voorbeelden deze verschillende niveaus toe. Onze doelgroep zal grote vrijheid moeten hebben in het kiezen van een strategie op eigen niveau. In ons aanbod zal vooral de ontwikkeling van rekenactiviteiten in het gebied tussen contextgebonden en modelondersteunde oplossingsstrategieën worden gestimuleerd. Voor bewust en begrepen toepassen van (semi-)formele strategieën is natuurlijk alle ruimte. Maar het leren van het trucje zonder te weten waarom, is ons doel zeker niet. Wij zien graag dat leerlingen hun eigen keuze maken voor een door hen goed begrepen strategie.

Het derde uitgangspunt, uitgewerkt in paragraaf 2.4, is het streven om de voorgaande twee uitgangspunten tot hun recht te laten komen overal waar in het schoolbrede curriculum rekenen aan de orde komt. Het heeft weinig zin om in andere vakken en leergebieden een beroep op rekenvaardigheden te doen op een formeel niveau dat leerlingen niet beheersen. De docenten van alle vakken waar een beroep wordt gedaan op rekenvaardigheden dienen zich er van bewust te zijn dat leerlingen ook bij het toepassen van rekenvaardigheden zich in een doorlopend leerproces bevinden waarbij onderhoud en exploratie beide steeds aan de orde zijn. Met het toestaan en positief waarderen van oplossingsstrategieën op verschillende niveaus worden de mogelijkheden van de leerlingen binnen alle vak/leergebieden juist verruimd.

Daarmee komen wij aan het vierde uitgangspunt, zoals uitgewerkt in paragraaf 2.5. Het rekenen moet niet alleen goed worden gebruikt in allerlei situaties, maar er moet ook aandacht zijn voor opbouw van routine. Tussen deze twee activiteiten, die in de praktijk overigens door elkaar heen kunnen lopen, moet een goed evenwicht zijn. Rekenen in allerlei echte situaties is van groot belang om betekenis aan het leren van het rekenen te geven. In specifieke rekenlessen kan daarop worden gereflecteerd en aandacht zijn voor het ontwikkelen van routine.

De vertaling van deze uitgangspunten naar inhouden die voor onze doelgroep geschikt zijn en waar docenten in het voortgezet onderwijs mee kunnen werken is de grootste uitdaging in dit traject. In paragraaf 2.6 beschrijven wij de inhouden die wij relevant achten en een aantal ideeën om deze om te zetten in materiaal voor de leerlingen. Deze beschrijving is zeker nog niet uitputtend, het gaat er ons vooral om, om een idee te schetsen van hoe het rekenonderwijs voor onze doelgroep er uit zou kunnen zien.

Het leertraject van zwakke rekenaars en de begeleiding daarvan kent vele valkuilen. Een aantal daarvan hebben wij verwoord in paragraaf 2.7. Beslist niet om belerend te willen zijn, maar vooral om aan te geven dat het je bewust zijn van deze valkuilen en het omzeilen daarvan zeer inspirerend kan zijn bij het begeleiden van onze doelgroep, maar zeker ook bij het begeleiden van leerlingen die minder problemen hebben met rekenen en wiskunde.

De term gecijferdheid is in deze inleiding nog niet gevallen, maar het zal duidelijk zijn dat ons hoofddoel is dat ook de zwakke rekenaars in het onderwijs alle kans krijgen om hun gecijferd gedrag verder te ontwikkelen.

2.2 Onderhoud én ontwikkeling

Zoals gezegd, dienen rekenactiviteiten voor onze doelgroep altijd een onderhouds- en een ontwikkelkarakter in zich dragen. Goed geplande leeractiviteiten wortelen in wat de leerling eerder heeft geleerd en bij het ophalen daarvan is per definitie onderhoud aan de orde. Ook zal men bij leeractiviteiten na moeten streven dat deze iets nieuws in zich dragen. Dat hoeft niet altijd om nieuwe inhouden te gaan, nieuwe of verdiepte inzichten zijn minstens even waardevol.
Voor de leerling is het beslist niet nodig om altijd te weten of het om onderhoud of ontwikkeling gaat. De docent zal zich echter wel altijd bewust dienen te zijn dat deze twee invalshoeken steeds aan de orde zijn.

Onderhoud

Natuurlijk kunnen leeractiviteiten altijd worden gepland met het doel om eerder geleerde zaken te onderhouden. Daarin kunnen de leerlingen laten zien wat ze al verworven hebben op het gebied van rekenen/wiskunde. En daarmee wordt hen ook een continue herkansing geboden om te werken aan hiaten in kennis en vaardigheden en aan het verder ontwikkelen van routine. De continue activiteit is hierin belangrijker dan de tussentijdse resultaten, het gaat er in de eerste plaats om leerlingen de kans te geven om op hun eigen niveau rekenactiviteiten correct uit te voeren.

Voorbeeld:
Onderhoud van getalbegrip
Een nieuwe periode start. De leerkracht zet op het bord:
625 0,15 15.394
en vraagt aan de leerlingen: 'Schrijf eens op wat jij denkt bij deze getallen.'

De reacties van leerlingen kunnen sterk variëren: vanuit het rekenen: '625 = 25 x 25 ', denken aan bij voorbeeld geld: 'liever het laatste bedrag op de bank dan de tweede', vanuit meten: '0,15, dat is 15 cm', vanuit ordening: '0,15 dat is vlak bij 0', ...
Op basis van de reactie van de leerlingen kunnen hier gesprekken ontstaan over getalrelaties, afronden, mogelijkheden om te rekenen, plaats op de getallenlijn et cetera.

Leerlingen uit onze doelgroep zullen baat hebben bij steeds weer terugkomende activiteiten rond een welgekozen set aan inhouden en vaardigheden, zoals geformuleerd in deel 1 van de afbakening. Ons inziens hebben oefenprogramma's waarmee in een welomschreven tijd een welomschreven resultaat moet worden gehaald veel te weinig langere termijn resultaat en zeker leerlingen uit onze doelgroep bouwen daarmee ook geen inzicht op. Vaak zijn dergelijke oefenprogramma's formeel en algoritmisch van karakter en voor de leerling daarmee vooral verbonden met de oefensituatie en niet met de situaties waarin het geleerde kan worden gebruikt. Ook ontbreekt vaak de continuïteit binnen het hele schooltraject.

Ontwikkeling
Natuurlijk hebben ook deze leerlingen recht op verdere ontwikkeling binnen rekenen en wiskunde, zowel met betrekking tot kennis, inzichten als vaardigheden. Je mogelijkheden verder verkennen en ervaren dat je in staat bent om nieuwe dingen te leren, eventueel na een traject van 'bloed zweet en tranen', is van wezenlijk belang voor het onderhouden en ontwikkelen van een reken-wiskundig gevoel van eigenwaarde.
Dat betreft in de eerste plaats verdere ontwikkeling in de onderwerpen waar zij op de basisschool al mee hebben gewerkt. Voor onze doelgroep mogen de activiteiten genoemd in het eerste hoofdstuk niet stoppen bij de overstap van primair naar voortgezet onderwijs.
Een inhoudelijke uitbreiding is te vinden binnen een aantal onderwerpen dat traditioneel meer in het voortgezet onderwijs aan de orde komt, zoals schaal, oppervlakte en inhoud en de bijpassende maten en berekeningen, tabellen, grafieken en variabelen, etcetera.
Deze, voor de leerling vaak nieuwe, onderwerpen worden in het algemeen geïntroduceerd in de wiskundeles en zullen vaak worden gebruikt bij andere vakken. Ook hier is een continue aandacht voor de kernen van deze onderwerpen noodzakelijk, met veel ruimte voor de leerling om zelfgekozen contextgebonden dan wel modelondersteunde strategieën te gebruiken.
In het gangbare voortgezet onderwijs worden dergelijke onderwerpen bij wiskunde aan de orde gesteld en geoefend. Maar daarna is het onderwerp vaak een poos helemaal buiten zicht van de leerling voor er binnen de wiskundeles op terug wordt gekomen. Bij veel andere vakken wordt na behandeling in de wiskundeles vaak een beheersing van een formele procedure verondersteld en in het beste geval op dat niveau geoefend. Echter, de relatie met het beheersingsniveau van de individuele leerling is vaak zoek. Deze specifieke problematiek bespreken wij in de volgende paragraaf.

Een voorbeeld van zo'n onderwerp is kommagetallen. Een nadere analyse van een wiskundemethode (SLO-intern 2005) geeft het beeld, dat alleen binnen enkele specifieke hoofdstukken het onderwerp kommagetallen aan de orde wordt gesteld. Buiten dat hoofdstuk worden echter activiteiten vermeden die een beroep doen op vaardigheden met kommagetallen.

2.3 Rekenen op verschillende niveaus
Denkend aan onze doelgroep moet bij het oplossen van reken- en wiskundeproblemen steeds de mogelijkheid bestaan om deze binnen de context op te lossen. Dit echter wel met een stimulans om de rekentaken op modelondersteunend niveau aan te pakken. In het bijzonder bij leerlingen die al hebben laten zien dat zij modellen bij het rekenen en wiskunde kunnen hanteren.
Wij zijn ons er zeer bewust van dat in de huidige onderwijspraktijk er vaak voor wordt gekozen om oplossingsstrategieën bij rekenproblemen op (semi) formeel niveau aan te bieden. En dat is nu juist het gebied waar onze doelgroep vaak weinig tot niets te vinden heeft.

Voorbeeld:
Op het klassenfeestje worden pannenkoeken gebakken en gegeten.
Er komen 21 leerlingen en twee leraren, je rekent vier pannenkoeken per persoon.
Op internet vind je het volgende recept voor pannenkoeken.
http://www.kookotheek.com/pannenkoeken/basis_recept_voor_pannenkoeken.htm

Ingrediënten
Voor ongeveer 8 pannenkoeken:

200 gram tarwebloem;	mespunt zout;
2 eieren;	1/2 liter melk;
ca. 50 gram boter;	eventueel 1 eetlepel suiker voor zoete pannenkoeken

Opdracht
Maak een bijpassend boodschappenlijstje.

Dit kan een opdracht zijn uit een methode voor wiskunde, verzorging, mens en natuur of gewoon een van de taken die in de voorbereiding van een klassenfeestje passen.

Voor onze doelgroep zou moeten gelden dat allerlei informele doch correcte methoden die voor de berekeningen bij het klassenfeestje voldoen, ook binnen wiskunde, verzorging, mens en natuur of welke andere les dan ook. (Voor ieder leerling geldt dat natuurlijk, echter bij de leerlingen die dat aankunnen kan en moet een docent vervolgens andere eisen stellen.)
Wij werken hieronder een aantal mogelijke oplossingsstrategieën rond verhoudingen uit.

Contextgebonden
Eerst maar even de bloem. En voor wat betreft deze paragraaf zijn de pannenkoeken dan klaar.
Je kunt eerst uitrekenen om hoeveel pannenkoeken het gaat. Uitgaande van 4 pannenkoeken per persoon zijn dat er 92. Deze rekenstap kan voorbeeldmatig ook op de verschillende niveaus worden uitgewerkt, wij beperken onze toelichting echter tot de berekening van de benodigde hoeveelheid bloem.

Werken binnen de context biedt mogelijkheden met tussenstappen als:
Hoeveel bloem wordt dat dan voor 80 pannenkoeken? Nog een keer het recept en dat is 88. Met de helft erbij zit je precies op 92 pannenkoeken.
Mogelijke berekening: 80 stuks, dan 8 erbij en dan nog 4 dat is 2000 gram en 200 gram en nog een keer de helft dus100 gram in totaal dus 2300 gram, dus 2,3 kg dus drie pakken bloem van 1 kg.

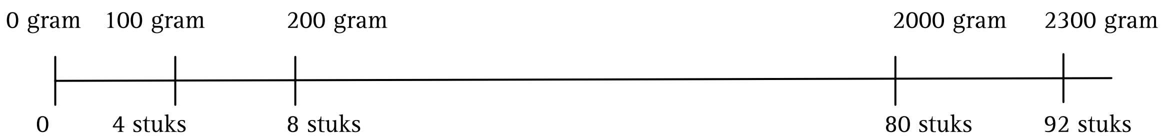
Een andere contextgebonden benadering kan er zo uit zien:
Het recept is precies goed voor twee personen.
Elf keer het recept, is 2200 gram bloem (voor 22 personen) en nog een keer de helft van het recept, is 100 gram bloem (voor één persoon) en je hebt genoeg voor 23 personen, namelijk 2300 gram.

En de leerling die ziet dat voor één persoon 100 gram bloem nodig is en dus voor 23 personen 2300 gram, doet zijn rekenwerk ook goed.

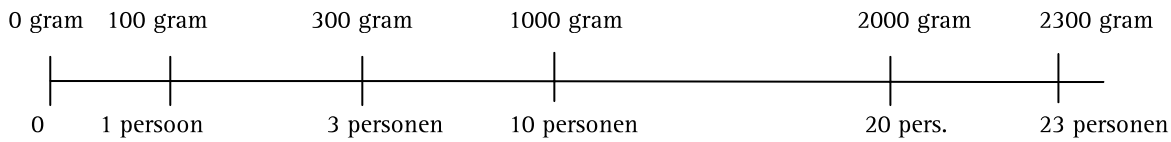
Modelondersteund
Een tabelletje om de administratie bij te houden geeft al een mogelijkheid voor modelondersteuning aan.

Pannenkoeken	Bloem
8 stuks	200 gram
80 stuks	2000 gram
8 erbij	200 gram
4 erbij	100 gram
92 stuks	2300 gram = 2,3 kg Dus 3 pakken bloem van 1 kg

Een dubbele getallenlijn levert ook een ondersteunend model. Maakt een leerling daar gebruik van is dat ook uitstekend. De leerling heeft natuurlijk alle vrijheid bij de keuze van de gebruikte tussenstappen:



of



Dit kan een opstap zijn naar het gebruik van een verhoudingstabel, maar zeker niet verplichtend.

Hoeveelheid (in g)	200	2000	100	2300
Aantal	8	80	4	92

Of een verdere schematisering naar de verhoudingstabel tot de mogelijkheden behoort is aan de docent ter inschatting.

Zwakke rekenaars zullen overigens niet zonder meer modelondersteunde oplossingsstrategieën hanteren. Als de docent dit wil stimuleren moeten de handelingen binnen het model moeten altijd in direct verband worden gebracht met bijbehorende handelingen in de context. In het bijzonder moet de stap naar de verhoudingstabel voor deze leerlingen niet worden onderschat.

Deze opdracht heeft een aardige mogelijkheid voor een verdiepende bespreking in zich. Stel het aantal pannenkoeken per persoon op 3, dan is de koppeling van het aantal personen aan de hoeveelheid bloem opeens een stuk lastiger. De koppeling van de hoeveelheid pannenkoeken, in dat geval 69, aan de hoeveelheid bloem blijft echter wel goed bruikbaar.

Formeel
Een formele benadering kan er als volgt uit zien:
Reken het totaal aantal pannenkoeken uit: 4 x 23 = 92.
Het recept is voor 8 pannenkoeken. Deel het totaal aantal pannenkoeken door 8: 92/8 = 11,5.
Vermenigvuldig alle ingrediënten met 11,5.
Voor de bloem levert dat op: 200 gram x 11,5 = 2300 gram.

Bij drie pannenkoeken per persoon wordt deze vermenigvuldigfactor 69/8 = 8,625.

Het mag duidelijk zijn dat dit vooral voer is voor leerlingen in staat zijn om met (semi) formele strategieën te werken. Voor de meeste zwakke rekenaars zal de vermenigvuldigfactor iets zijn dat zomaar uit de hoge hoed komt. Laat staan dat 8,625 enige betekenis voor hen kan hebben met betrekking tot de context.

2.4 Breed toegepaste didactische aanpak

Binnen het primair onderwijs is de rekenwiskundeles in het algemeen de enige plaats waar ook feitelijk wordt gerekend. De rekenactiviteiten in deze lessen zijn vooral gericht op het verwerven van de nodige rekeninzichten- en vaardigheden.
Binnen het voortgezet onderwijs krijgt het rekenen ook een andere rol. Er dienen zich binnen verschillende vakken allerlei situaties aan waarin gerekend moet worden om een probleem op te lossen. Binnen het leergebied wiskunde zijn dat de andere leerstofdomeinen, zoals rekenen binnen de meetkunde, de overstap van rekenen naar formules, et cetera. Binnen andere vakken komt het ook regelmatig voor dat met behulp van rekenvaardigheden problemen uit die vakken moeten worden opgelost. Bijvoorbeeld: berekeningen binnen nask met verhoudingen, berekeningen binnen economie met procenten, et cetera.
In beginsel is dat natuurlijk helemaal geen probleem. Immers, pas als leerlingen in situaties buiten de rekenles, en binnen problemen die niet alleen zijn bedacht om tot rekenactiviteiten te komen, hun rekenvaardigheden adequaat kunnen toepassen, is er sprake van echt gecijferd gedrag.

In alle vakken op dezelfde manier rekenen is een veel gehoorde roep bij het rekenen in het vmbo. Wij onderschrijven die roep volledig als het om de didactische aanpak gaat. Maar op die manier is de uitspraak in het algemeen niet bedoeld. Vaak gaat het dan om overal hetzelfde algoritme voor dezelfde soort bewerking te gebruiken. Bij deze benadering krijgt echter het op eigen niveau aanpakken van een probleem weinig tot geen kans en laat leerlingen die dat eigen niveau nodig hebben in de kou staan.

Een analyse (SLO-intern 2005) van enkele methoden voor nask en economie voor het vmbo liet zien dat het beroep op rekenvaardigheden en de bijbehorende ondersteuning binnen de betreffende vakken vooral bestaat uit het aanbieden van een bijpassend algoritme met een rekenvoorbeeld waarin wordt uitgelegd hoe het algoritme moet worden toegepast.
Natuurlijk moeten leerlingen bij nask, economie, aardrijkskunde, of iets moderner bij Mens en Natuur, Mens en Maatschappij, Kunst en Cultuur gebruik kunnen maken van rekenwiskundige vaardigheden, maar dan wel op een manier die bij de leerlingen past.

De vraag is dan hoe dit reken-wiskundedidactisch nog tamelijk onontgonnen gebied meer tot ontwikkeling gebracht kan worden. Wij doen een voorzichtige eerste poging.
Bij rekenen en wiskunde zal meer ruimte moeten komen voor activiteiten die gerelateerd zijn aan problemen die niet alleen zijn gericht op het verwerven van reken- en wiskundige vaardigheden.
Met andere woorden echte contexten en niet alleen contexten die zijn geconstrueerd om helder het rekenwiskundige aspect binnen te presenteren. Daarbij past dan ook een continue aandacht voor de betekenis van de berekening en het antwoord binnen de situatie. En wat voor zwakke rekenaars van groot belang is, rekenen in echte contexten geeft hun veel meer kansen om eigen strategieën toe te passen, dan situaties die bedacht zijn om het rekenen met (semi)formele strategieën te beoefenen.
In overeenstemming daarmee kan binnen andere vakken het beroep op rekenwiskundige vaardigheden zo worden gedaan dat leerlingen gelegenheid krijgen ook met andere strategieën dan alleen het toepassen van het 'juiste' algoritme op het juiste moment tot een oplossing te komen. Rekenvaardigheden hebben nu eenmaal een wezenlijk ander karakter dan bij voorbeeld weten hoe je op een correcte manier een bunsenbrander aan moet steken, of een kassa moet vergrendelen.
Hier is een wereld te winnen én binnen de wiskundeles zelf, én binnen de vakken waar van rekenwiskundige vaardigheden gebruik wordt gemaakt.

Er lijkt in het onderwijs binnen de eerste fase van het VO en in het bijzonder in het vmbo, in alle vakken een tendens te zijn om de leerstofinhouden vooral kwalitatief en dus met weinig getalsmatige informatie aan te bieden. Deze tendens betreuren wij ten zeerste. Gecijferdheid krijgt alleen de kans zich te ontwikkelen in een omgeving waarin de leerlingen vaak getallen ontmoeten en daarmee moeten rekenen en/of redeneren.
Recentelijk kwam ons ter ore dat in het vmbo binnen het vak economie er gesproken wordt over het eventueel niet meer aanbieden van procentrekenen, aangezien dat toch te hoog is gegrepen bij deze leerlingen. Waarmee, even terzijde, in feite wordt aangegeven dat dit probleem blijkbaar niet alleen de echt zwakke rekenaars raakt, maar misschien wel over de hele breedte van het vmbo speelt.
Willen deze leerlingen echt de kans krijgen hun rekencapaciteiten te onderhouden, toe te passen en verder te ontwikkelen, dan is het zaak de leerlingen veel kansen geven om op door henzelf gekozen en begrepen manieren rekenproblemen op te lossen.
Samenvattend: Binnen de wiskundeles en binnen andere vakken die een beroep doen op rekenvaardigheden zal op eenzelfde manier met de betreffende inhouden en vaardigheden om moeten worden gegaan als binnen de reken- wiskundeles, willen de leerlingen in het ene gebied kunnen profiteren van wat ze in het andere hebben geleerd. Maar dan wel aansluitend bij het begrips- en vaardigheidsniveau van deze leerlingen. Hogere formele niveaus en oefenen met algoritmiek mag en moet, voor leerlingen die daar naar door kunnen groeien. Maar dat kan zeker niet het einddoel van rekenen en wiskunde voor zwakke rekenaars in het vmbo zijn.

Denkend aan onze doelgroep moet bij het oplossen van rekenproblemen binnen andere leergebieden de mogelijkheid worden geboden om deze binnen de context op te lossen. Dit echter wel met een stimulans om de rekentaken op modelondersteund niveau aan te pakken, bij voorbeeld doordat een docent hierover regelmatig met de leerlingen in gesprek gaat. In het bijzonder bij leerlingen die al eerder leerprocessen als geschetst in deel 1 hebben doorgemaakt, of op een andere manier kennis hebben gemaakt met het werken op dat niveau.
Wij zijn ons er zeer bewust van dat in de huidige onderwijspraktijk binnen andere vakken en leergebieden er vaak voor wordt gekozen om rekenactiviteiten op (semi) formeel niveau aan te bieden. En dat is nu juist het gebied waar onze doelgroep vaak weinig tot niets te vinden heeft. Een voorbeeld.

Procentrekenen binnen economie
Dit voorbeeld uit een methode voor economie vertoont duidelijke (semi) formele kenmerken:
De kostprijs van een artikel is € 46,00. De ondernemer berekent zijn verkoopprijs door de kostprijs met 30 % te verhogen. Wat wordt de verkoopprijs?

- Kostprijs = 100 %; winstopslag = 30 %; verkoopprijs = 130 %
- 130 % = $\frac{130}{100}$ = 1,3
- Verkoopprijs = 1,3 x kostprijs = 1,3 x € 46,00 = € 59,80

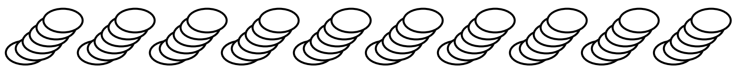
Opdracht 25.
De kostprijs van een artikel is € 70,00. De winstopslag is 20%.
Bereken de verkoopprijs door onderstaand schema in te vullen.

- Oude prijs = ... %; winstopslag = 20 %; verkoopprijs = ... %
- 120 % = $\frac{\ldots\ldots}{100}$ = ...
- Verkoopprijs = ... x kostprijs = ... x € 70,00 = € ......,......

Bij veel docenten bestaat het idee dat dit dé manier is om te rekenen met procenten en dat andere manieren een zekere onvolwaardigheid in zich dragen.

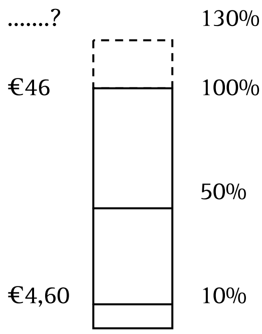
Echter er zijn ook voor zwakke rekenaars volwaardige manieren om een antwoord te vinden op de vraag: 'Wat wordt de verkoopprijs?'

Contextgebonden



Hoe vind je 10% van € 46,-?
Door € 46,- in 10-en te verdelen.
Want bij 50% neem je de helft en bij 20% deel je in 5-en en bij 10% in 10-en.
Op diverse manieren kan een leerling dan bepalen dat 10% is 4 euro en 60 cent.
30% is drie keer zo veel dus 12 euro en 1 euro 80, is 13 euro en 80 cent,
Dat bedrag bij 46 euro optellen geeft 130% en dat is 59 euro en 80 cent,
dus € 59,80

Modelondersteund
Een goede mogelijkheid voor modelondersteuning biedt de getallenstrook:



Vanwaar uit ook weer verder geschematiseerd kan worden naar de verhoudingtabel.

Met natuurlijk weer de kanttekening dat de binding met de context niet mag worden verbroken.

De rekenstappen expliciet benoemen kan helpen om de lijn met de geldcontext open te houden.

Als 100% € 46,- is dan is 10% € 4,60, 20% is € 9,20 en 30% is € 13,80.
Dus 130 % is € 46,- + € 13,80 = € 59,80.

Graag sluiten wij deze paragraaf af met enkele voorbeeldopdrachten uit andere vakken/leergebieden (ieder op zich ook bruikbaar in rekenwiskunde lessen) die mogelijkheden bieden voor een onderwijsaanpak waarin ook ruimte is voor contextgebonden en modelondersteunde strategieën. Een onderwijsaanpak die overigens alleen zal werken als de betrokken docenten deze strategieën ook zullen waarderen en niet alsnog een (semi) formele aanpak van de leerlingen zullen eisen.

Procenten (M&N, biologie, wiskunde)
Het menselijk lichaam bestaat voor ongeveer 60% uit water.
- Hoeveel liter water zal er in jouw lijf zitten? (Één liter water weegt precies één kilogram.)

Mummies kunnen ontstaan doordat het lichaam vrij snel volledig uitdroogt. Dan kunnen de bacteriën die er voor zorgen dat het lichaam ontbindt zich niet meer verplaatsen.
- Een persoon weegt 80 kg. Als deze persoon ooit een mummie wordt, hoeveel zal hij dan als mummie wegen?
- Een andere mummie weegt 25 kg. Hoeveel zal deze persoon gewogen hebben toen hij nog leefde?

Plaatsbepalen (M&M, aardrijkskunde, wiskunde)
Je krijgt een routebeschrijving van een wandeling door het centrum van je woonplaats.
Teken deze route op een plattegrond van je woonplaats.
Er is vast een aantal plaatsen in de stad waar je graag komt.
- Maak een routebeschrijving voor een wandeling langs die plaatsen.

2.5 Welke reken(didactische)activiteiten gebeuren waar?

Er gaan stemmen op om het rekenen vooral plaats te laten vinden binnen opdrachten/projecten waarbij het rekenen steeds een rol heeft in de voortgang bij het oplossen van een achterliggend probleem. Dat houdt voor de leerlingen het rekenen betekenisvol en geeft hen de kans hun uitkomsten steeds te toetsen aan de situatie. Anderzijds wordt er voor gepleit om in het lesrooster aparte momenten voor het rekenen op te nemen. Een belangrijk argument daarbij is dat onderhoud, routineopbouw en reflectie op je rekenkundig handelen aparte aandacht nodig heeft. Een ander belangrijk argument is dat reken en wiskunde op zichzelf staande leerlijnen hebben, die bij een volledig geïntegreerde aanpak onder dreigen te sneeuwen.
Wij zien hier beslist geen tegenstelling. Eerder pleiten wij voor het credo, het een doen en het andere niet laten. Dat is echter niet voldoende.
Als de verantwoordelijk reken-/wiskunde docent zich op de hoogte stelt van welke reken- en wiskundeactiviteiten leerlingen tegenkomen binnen projecten en andere leergebieden en zich een beeld vormt hoe zij daar mee omgaan, kan dat de inhoudelijke kwaliteit van de reken-/wiskundeles zeer ten goede komen. De docenten die de betreffende leergebieden en projecten begeleiden dienen minimaal op de hoogte te zijn van het gegeven dat er meer mogelijkheden zijn om rekenproblemen aan te pakken, dan alleen de vaak wel bekende formele algoritmische aanpak. Oog hebben voor de rekenstrategieën die leerlingen hanteren en hiermee en in gesprek met hun reken-/wiskunde collega's ook een eigen didactisch repertoire ontwikkelen is een tweede minimale verwachting die aan deze docenten kan worden gesteld.
Het tot stand komen van deze situatie is er een die in de loop der jaren kan groeien. Startend met overleg tussen de betrokken docenten en beginnend met enkele specifieke onderwerpen, kan het uitgroeien tot een algemeen beleid met betrekking tot het rekenen binnen een school voor vo. Externe begeleiding is welhaast onontbeerlijk, zeker met betrekking tot het didactisch repertoire van alle betrokken docenten. Dit gezien de relatief grote onbekendheid in het VO met andere oplossingsstrategieën dan (semi-) formele.
Als voorbeeld geven wij een mogelijke structuur van een rekenwiskunde les die recht doen aan de mogelijkheden van zwakke rekenaars.
- Inventariseren wat leerlingen al gedaan hebben met het betreffende onderwerp en vooral ook op welke manier zij dat hebben gedaan.
- De diverse manieren van leerlingen waarderen. Wat ons betreft worden informele, doch correcte methoden van leerlingen even positief gewaardeerd als meer formele. En als een formele methode onbegrepen wordt gebruikt is een begrepen informele methode wat ons betreft veel positiever te waarderen.

- Diverse correcte methoden bespreken en vergelijken en de leerlingen de kans geven de zelfgekozen methode(s) te oefenen, om routine op te bouwen.
- En in het vervolg: Het toepassen van het geleerde in deze les in volgende situaties en projecten stimuleren en waar leerlingen dat laten zien expliciet positief te waarderen.

2.6 Inhoudelijke uitwerking

Waar liggen inhoudelijk in het VO mogelijkheden om leerlingen hun rekenwiskundige vaardigheden te laten onderhouden en verder te laten ontwikkelen? Het Trajectenboek uit het W12-16-project (1992) geeft een leerstofbeschrijving voor de eerste fase van het VO waarin een groot aantal aandachtsgebieden en onderwerpen wordt genoemd voor rekenwiskunde activiteiten die in het verlengde liggen van het rekenonderwijs in het PO. Aansluitend bij deze leerstofbeschrijving benoemen wij een aantal mogelijkheden voor verdere ontwikkeling van de vaardigheden van zwakke rekenaars. Enkele onderwerpen illustreren wij met voorbeelden van opdrachten, die zich lenen voor verschillende oplossingsstrategieën.
Wij noemen nu eerst een aantal activiteiten waar leerlingen liefst bij iedere les waarin rekenen en wiskunde centraal staat, mee in aanraking zouden moeten komen; als een 'saus' die over iedere rekenactiviteit hoort te worden gegoten. Het gaat dan om het opnemen van aandachtspunten die een beroep doen op minstens de volgende aspecten van het ontwikkelen van rekenvaardigheden:

- Inzicht ontwikkelen in het getallensysteem
- Kunnen en durven kiezen voor schattend of exact rekenen
- Structureren van problemen
- Kennis verwerven van modellen
- Maatkennis ontwikkelen
- Handig kunnen (hoofd)rekenen
- Zakrekenmachine verstandig gebruiken

In een volgende fase van onze activiteiten binnen dit thema willen wij laten zien hoe de leerlingen kansen kunnen krijgen om deze vaardigheden te onderhouden en verder te ontwikkelen. Vaardigheden die nodig zijn willen leerlingen in staat zijn hùn rekenvaardigheden toe te passen in allerlei praktische situaties.

Voor veel leerlingen uit onze doelgroep kan gelden dat de inhouden genoemd in deel 1 van de afbakening al behoorlijk aan de grens ligt van wat zij cognitief aankunnen. Consolidatie van het geleerde in het primair onderwijs is daarom een belangrijk uitgangspunt. In de verdere ontwikkeling van de rekenvaardigheden staan daarom de volgende uitgangspunten voorop:

- Uitbreiding van de wereld waarin de leerlingen hun, meestal contextgebonden, rekenvaardigheden kunnen gebruiken.
- Uitbreiding van het repertoire aan modellen waarmee zij hun contextgebonden rekenvaardigheden kunnen ondersteunen en structureren.
- Het besef ontwikkelen dat zij in verschillende contexten de rekenproblemen op dezelfde manier aanpakken.

Hieronder geven wij een globale inhoudelijke uitwerking van een aantal onderdelen van een mogelijk rekenwiskunde programma voor zwakke rekenaars.

Getalgevoel en handig (hoofd)rekenen

Vaak zeggen getallen iets over de wereld om je heen. Begrijpen wat die getallen betekenen en weergeven en daar handig mee om gaan, helpt je om informatie goed te interpreteren en nuttig te gebruiken. Enkele vaardigheden die zich lenen voor verdere ontwikkeling daarbij zijn: Orde van grootte bepalen; Afronden volgens eisen van de situatie, versus afronden volgens 'de regels'; Grootte ontbrekende gegevens inschatten. Om, bijvoorbeeld het gevoel voor de orde van grootte te stimuleren en te onderhouden, moeten regelmatig vragen aan de orde komen als:

- Zitten in de zijmuur van de school duizend stenen?
- Moet je daarvoor alle stenen in de muur tellen?
- Meer of minder dan duizend

Boeken in de bibliotheek
Passagiers in een bus
Blaadjes papier in je tas
Blaadjes aan een boom

Rekenen met geld en daarbij handige rekenen, schatten en/of afronden.
Je hebt een briefje van € 20,- bij je. Je koopt:
- 2 pakken koffie van ieder € 1,90
- Een stuk kaas van 700 à 800 gram van € 9,95 per kilogram
- 2 kilo appels voor € 2,53
- 3 flessen Cola in de reclame voor € 1,45
- Vleeswaren voor € 5,21

Zal € 20,- genoeg zijn?

Hier zijn verschillende strategieën mogelijk:
- Steeds afronden op halve of hele euro's
- Of de € 5,21 bij de € 3,80 van de koffie voegen en de € 2,53 bij de ongeveer € 7,50 van de kaas.
- Start met de grootste en vul die aan van groot naar klein.

Door gebruik van deze strategieën, krijgen leerlingen ook de kans te laten zien wat zij kunnen en leraren krijgen inzicht in wat de leerlingen wel meebrengen aan capaciteiten.
Mogelijke inhoudelijke uitbreiding:
Onder nul bestaan ook getallen, ook met die getallen kun je rekenen.
Onder en boven de zeespiegel, temperaturen onder en boven nul, en rood staan op de bank zijn hier voorbeelden van.

Verhoudingen
Veel situaties met een getalsmatig aspect hebben het karakter van verhoudingsproblemen.
Opvallend is wel hoe weinig aandacht er binnen het onderwijs eigenlijk besteed wordt aan het herkennen van verhoudingssituaties. Hoe kun je eigenlijk aan een situatie zien, dat het om een verhoudingssituatie gaat? Binnen het reken-wiskunde onderwijs wordt het er vaak bijgezegd dat het om een vaste verhouding gaat. Of wordt het al dan niet verhoudingen zijn gekoppeld aan formele kenmerken van een verhoudingstabel. Een alternatief dat ook vanuit de context beredeneerd kan worden is: Als het altijd zo is dat twee keer de ene variabele, betekent twee keer de andere variabele, dan heb je een verhoudingssituatie. Zo geformuleerd is het natuurlijk ook een formeel gegeven, maar bij de hoeveelheden in een recept is dit evident. Of, bij voorbeeld, dat ook geldt voor de lengte van een telefoongesprek en de kosten is nog maar de vraag.
Situaties waarin verhoudingen een rol spelen zijn regelmatig aan de orde, binnen wiskunde en binnen andere vakken. Aan kansen om aandacht te geven aan het herkennen van verhoudingssituaties en rekenen daarbinnen is dus geen gebrek.

Voorbeeld:
Het voorbeeld uit paragraaf 2.3, de pannenkoeken is zeer illustratief, heeft veel variatiemogelijkheden en heeft binnen veel leergebieden gebruiksmogelijkheden.
Een opdracht als deze leent zich sterk voor nabespreking van de gebruikte strategieën in een les als geschetst in paragraaf 2.5.

In de wereld om ons heen lijken veel situaties waar hoeveelheden, aantallen en dus getallen in voorkomen verhoudingssituaties te zijn. Echter door kortingen, bijzondere tarieven, en kostenbesparing bij grotere hoeveelheden komen in de beroepspraktijk en het dagelijks leven zuivere verhoudingssituaties minder vaak voor dan je zo zou denken.
Dat neemt overigens niet weg dat verhoudingen een prima hulpmiddel kunnen zijn bij het vergelijken van kortingen, bijzondere tarieven en kostenbesparingen. Echter zo nu en dan is de werkelijk dusdanig complex

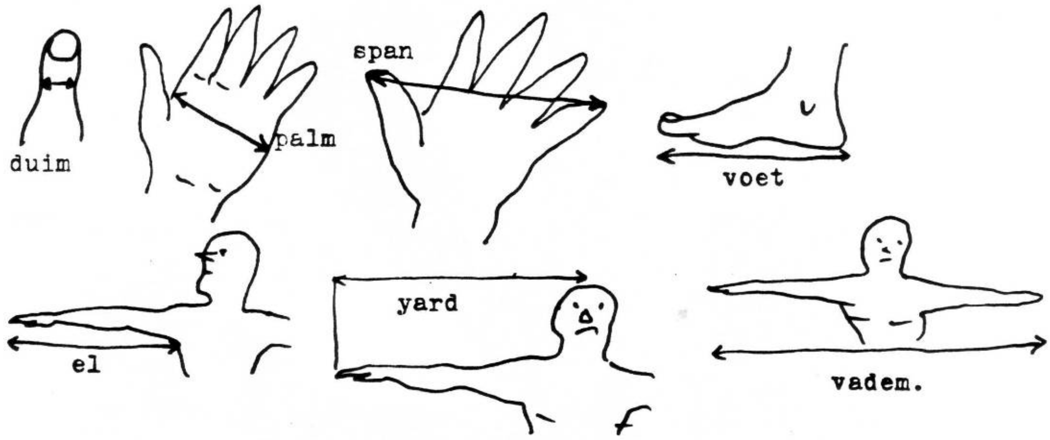
(gemaakt (al dan niet bewust)), dat zelfs het denken in verhoudingen niet voldoende is om het maken van een keuze te ondersteunen. Probeert u maar eens de beltarieven van twee verschillende telefoonaanbieders te vergelijken.

Procenten
Eerder onderzoek naar de wiskunde op de toekomstige werkvloer van de zwakke vmbo leerling heeft laten zien dat bewerkingen met procenten daar nauwelijks voorkomen. Eigenlijk alleen in de winkel, bij kortingen en bij BTW-berekening. Op de kassa zit dan een procedure die precies uitvoert wat er gedaan moet worden.
Verder komt procenten voor bij beschrijvingen van producten, als een trui met 80% wol en 20% acryl. In de praktijk heeft de procentaanduiding daar vooral een signaalfunctie als: ik wil juist wel of juist niet alleen maar kleding die uit zuivere wol bestaat. Aan de getallen zijn vooral producteigenschappen gekoppeld en ze functioneren niet als verhoudingsgetallen.
Veel informatie die te maken heeft met het functioneren als kritisch en meedenkend burger dan wel consument wordt in de media en in advertenties gepresenteerd met behulp van procenten. De vraag is of zwakke rekenaars in staat geacht moeten worden het noodzakelijke niveau van verwerken van informatie deze burger- dan wel consumentenrol te kunnen bereiken. Het denken in en het rekenen met procenten is hiervan een wezenlijk onderdeel. Dit is een wezenlijk dilemma tussen het belang van de rol en de leerbaarheid daarvan.
Een mogelijke weg uit dit dilemma kan zijn om aan de orde te stellen hoe je aan informatie kunt komen die je wel aan kunt en je een stap verder helpt in de burger- dan wel consumentenrol. Onderzoeken uit de consumentengids en informatie van het Nibud hanteren, of onderscheid maken tussen onafhankelijke adviseurs en adviseurs die een zakelijk belang hebben bij de keuze van de cliënt, worden dan relevante en waarschijnlijk meer bereikbare vaardigheden.
Als basis voor het rekenen met procenten lijkt hetgeen dat in deel 1 wordt beschreven een redelijke bagage te zijn. Voorlopig beperken wij ons tot het onderhoud daarvan en aandacht voor kortings- en opslagsituaties beschreven met procenten.

Meten
Het gaat allereerst om een praktische vaardigheid, een belangrijk doel is het meten zelf.
Gebruik van een repertoire aan meetinstrumenten, zoals liniaal, duimstok, rolmaat, maatbeker en huishoudweegschaal

Voorbeeld:
Iedere landstreek had vroeger zijn eigen maten. Die maten waren meestal aangepast aan de mogelijkheden om te meten. Zo was ooit een veelgebruikte lengtemaat 'uren gaans'. En als je slecht ter been was dan wist je wel dat 10 uren gaans voor jou misschien wel 15, 20 of misschien wel 30 uur lopen of strompelen kon zijn.
Veel maten waren afgeleid van het menselijk lichaam.

Groepsopdracht
In dit plaatje zie je de betekenis van een aantal oude lengtematen.



Je gaat met z'n vieren de volgende tabel invullen. Ieder lid van het drietal heeft daarbij een eigen rol of taak. Leerling 1 wordt gemeten; leerling 2 en 3 meten; leerling 4 vult de tabel in.

Oude maat	In cm	Onderlinge verhouding	In cm bij leerling 1	Onderlinge verhouding bij leerling 1
Duim	± 2,5 cm	= 1/4 palm		
Palm	± 10 cm	= 4 duim		
Span	± 20 cm	= 8 duim = 2 palm		
Voet	± 30 cm	= 12 duim = 3 palm		
El	± 70 cm	-----------------		
Yard	± 90 cm	= 3 voet		
Vadem	± 180 cm	= 6 voet = 2 yard		

Nu zijn deze maten grotendeels verdwenen en worden de kilometer, de meter, de centimeter en zo voorts gebruikt.

De leerling leert lengtes te meten en met elkaar in verband te brengen en met elkaar te vergelijken.
Andere belangrijke vaardigheden zijn:

- Het zelf bedenken van meetstrategieën, ook in het geval van indirect meten:
  Hoe bepaal je het gewicht van je lievelingskonijn dat nooit op de weegschaal blijft zitten?
  Hoe bepaal je de inhoud van een ballon?
- Het opbouwen van een repertoire aan eigen referenties
- Het opbouwen van een repertoire aan gangbare maten en maateenheden
- Verband leggen tussen werkelijkheid en maten

Op basis van redeneren verbanden leren zien tussen maateenheden Wat is een liter? In een meter passen 100 centimeters (de discussie over wel of niet de s in centimeters is voor deze leerlingen niet relevant), en een deciliter moet ook wel een-tiende liter zijn en je schrijft dat als 0,1 l.
De leerling weet dat millimeters veel kleiner zijn dan meters, daarmee kun je beredeneren dat als je iets met millimeters beschrijft een veel groter getal nodig hebt dan dat je meters gebruikt. (Mierenstappen en mensenstappen.)
De cm (Muizenstappen) en km (Monsterstappen?) moeten ook vertrouwd zijn voor de leerling.
Het in elkaar uitdrukken van deze grootheden moet vanuit een contextvraag relevant zijn en dan mag het voor een leerling een weetje zijn dat het om factoren 10, 100 of 1000 gaat.
Voor oppervlakte is het repertoire cm^2, m^2 relevant uitgebreid met relevant oppervlakte uit de beroepsrichting.
Bij inhouden zal het gaan om liters en m^3 met dezelfde uitbreiding. Een liter is een pak melk (wel het goede!!) of 10 cm bij 10 cm bij 10 cm. En je weet dat 1000 liter gaat in één m^3 en hoe lang je daar ongeveer de kraan voor open moet houden. Twijfelgevallen zijn dl en cm^3.
Voor massa(voor deze leerlingen gewicht) gram en kilogram, voor snelheid alleen km/h.
Voor alle genoemde eenheden heeft een leerling eigen referentiematen.
Formules voor oppervlakte en inhoud komen alleen voor als woordformules, direct gekoppeld aan de achterliggende context. Een eventueel repertoire aan formules wordt bepaald door de beroepsrichting van de leerling.
De leerlingen weten dat oppervlakte het aantal passende vierkantjes is en dat doorknippen en verschuiven de totale oppervlakte niet verandert. Inhoud is het aantal maatbekers van een bepaald formaat is dat je er in kunt gieten.
Een formele behandeling van het decimaal stelsel is niet aan de orde.

Kommagetallen en breuken
Tegenwoordig wordt de maatvoering in de bouw in millimeters beschreven. Een van de achterliggende redenen lijkt het vermijden van kommagetallen geweest te zijn vanwege de problemen die dat opleverde bij het interpreteren van bouwtekeningen op de werkvloer. Aangezien de nauwkeurigheid in de bouw eerder in cm wordt gemeten dan in mm, lijkt de maatregel ook te werken.

Dit is niet overal toe te passen, weliswaar is in de praktijk de cent afgeschaft, maar het is nogal onwaarschijnlijk dat heel Europa in hele Euro's gaat rekenen. Dus geld is een context die automatisch kommagetallen genereert.
Natuurlijk is de bouw niet de enige context waarin met maatgetallen wordt gewerkt. Dus kunnen we er van uit gaan dat vanuit het meten ook het kommagetal de wereld van onze doelgroep binnenkomt.
Plaats je het werken met kommagetallen binnen de betreffende contexten, beroepspraktijk of dagelijks leven, dan krijgt de leerling de mogelijkheid om op context en modelondersteund niveau strategieën te onderhouden en te ontwikkelen.
Inhoudelijk zal het dan gaan om een combinatie van contextkennis en vaardigheden daarbinnen. Het onderhoud van de vaardigheden uit in deel 1 zal de basis vormen van het programma.
Uitbreidingen:
De diverse vormen van afronden. Bij de vraag hoeveel pakken Jus d' Orange je kunt kopen voor €20,- moet je 'afkappen'. Bij de vraag hoeveel pakken tegels je nodig hebt voor 20 m^2 moet je 'opronden'. En in beide gevallen kan de uitkomst van een berekening op de rekenmachine vele cijfers achter de komma bevatten.
Het gebruik van kommagetallen in andere vakken en leergebieden zal aandacht vergen. Denk aan het meten van sportprestaties: Is 9,8 s. nu sneller dat 9,91 s of niet? Binnen aardrijkskunde dan wel mens en maatschappij een stad met 1,3 miljoen inwoners.
De precieze vormgeving van dit laatste punt zal vooral afhangen van wat er aan (reken)vaardigheden nodig is om deze informatie te verwerken.

Breuken zijn een manier om deel-geheel relaties te beschrijven. Niet meer en niet minder. Dat twee kwarten samen een halve zijn, mag in woorden op basis van de context worden geconcludeerd maar opschrijven als rekensom in rekennotatie lijkt niet nodig. De relevantie van de berekening voor de situatie is een veel belangrijker criterium.

Andere domeinen
Wij beperken ons verder tot een zeer globale beschrijving of alleen het benoemen van de andere mogelijke onderwerpen. Een verdere uitwerking van deze en de hiervoor genoemde inhouden zal vorm moeten krijgen, door binnen het vmbo ervaringen op te doen met de zwakke rekenaars.

Schaal
Combinatie met plaats bepalen; bij een kaart een ruimtelijk beeld van de bijbehorende omgeving kunnen maken.
Coördinatensystemen
Verband tussen afstanden op de kaart met afstanden in werkelijkheid.

Gebruik hulpmiddelen
Vertalen van contextsituaties naar passende rekenhandelingen op de zakrekenmachine.
Kenmerken van de eigen zrm kennen. Volgorde van bewerkingen, werken met de %-knop, et cetera.
Weten dat andere rekenmachines vaak anders werken, maar op een bepaalde manier toch ook hetzelfde.
Ontwikkelen van modellen waarin je rekenactiviteiten kunt noteren die direct vertaalbaar zijn naar de eigen rekenmachine.
Vraag: Welke soort machine willen we eigenlijk dat de leerlingen gebruiken?
Vraag: Willen wij de leerlingen vaardiger maken op allerlei soorten rekenmachines?

Meetkunde
Schaal, uitslagen, plattegronden,
symmetrie eigenschappen, spiegelen, meetkundige vormen
Redeneren met hoeken
Vergroten en verkleinen
Praktische ervaringen, niet formele eigenschappen
Berekeningen rond lengten (w.o. omtrek), oppervlakte, inhoud

Informatieverwerking en Statistiek
Weergave van data op overzichtelijke wijze

Algebraïsche verbanden
...

2.7 Valkuilen

Uit de nood geboren nemen wiskundedocenten en docenten van andere vakken die een beroep doen op rekenvaardigheden soms hun toevlucht tot didactische kunstgrepen die weliswaar op korte termijn enig effect lijken te sorteren, maar die veelal nauwelijks bijdragen aan een beter begrip en een verdere ontwikkeling van gecijferdheid bij leerlingen. Dit zonder tekort te willen doen aan al het goede didactisch handelen dat ook bij de genoemde groep docenten kan worden gevonden.
Het betreft onder meer de volgende punten:

Focus op eigen repertoire

Waar een docent een voor haar/hem goed werkende rekenstrategie of in het boek gepresenteerde oplossingswijze kent, bestaat de neiging om vooral daarop te focussen in de begeleiding van zwakke leerlingen. Hiermee beperkt een docent zich zeer in het didactisch repertoire bij de begeleiding van zwakke rekenaars. Als de docent geen eigen 'trucje' kent ontstaat vaak pas de ruimte om meerdere strategieën in het denken toe te laten, ook bij het begeleiden van leerlingen.

Vanaf nu wordt overal op dezelfde manier gerekend

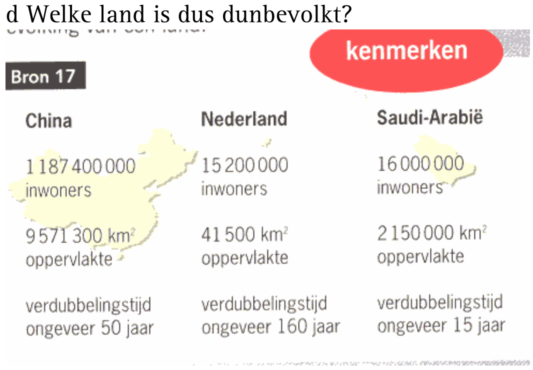
Een vermeende didactische aanpak bij de rekenproblematiek die wijd verspreid is, luidt als volgt:
Laat de leerlingen bij ieder vak steeds volgens dezelfde standaardprocedure werken bij een bepaald type berekening. Bijvoorbeeld, bereken steeds een percentage van een gegeven hoeveelheid volgens het afgesproken algoritme. Waar het standaardalgoritmes betreft gaat deze strategie voorbij aan het gegeven dat het (semi) formeel niveau zo weinig te bieden heeft aan onze doelgroep.
Ook bij minder formeel lijkende strategieën (ieder werkt bij verhoudingsproblemen met de verhoudingstabel) is een groot risico aanwezig dat leerlingen uit onze doelgroep de betekenis van wat zij aan het doen zijn verliezen als zij zelf geen keuzen kunnen maken bij de verbinding tussen context en strategie. Deze valkuil is in feite een variant van de vorige, maar dan op schoolniveau.

Omzeilen van fouten

Bij veel lesmateriaal (zie de analyse van de wiskundemethode) lijkt het er op dat ten aanzien van rekenen vermijdingsgedrag optreedt.
Op verschillende manieren kunnen de angels uit het rekenen worden gehaald. Hieronder enkele voorbeelden uit een waarschijnlijk zeer ruim scala aan mogelijkheden.

- Houdt de getallen eenvoudig; kommagetallen komen alleen voor bij rekenen met geld.
- Breng geen variatie aan in notaties; niet 20.15 uur en kwart voor acht in eenzelfde opdracht.
- Geef opdrachten waarin gerekend wordt een vorm waarin op alternatieve manieren het antwoord te vinden is. Zie het voorbeeld hieronder uit een methode voor aardrijkskunde:

a Welk van de landen uit bron 17 heeft de grootste bevolking?
b Welk van de drie landen heeft de snelste bevolkingsgroei?
c Bereken de bevolkingsdichtheid per land. Kies uit 366 – 124 – 7,4.
d Welke land is dus dunbevolkt?



Van voren af aan beginnen
In wiskundemethoden wordt er soms voor gekozen om onderwerpen uit het basisschoolcurriculum schijnbaar van voren af aan te behandelen. Daarbij worden in een notendop de voornaamste begrippen, relaties, procedures ed. met betrekking tot het betreffende domein behandeld die de auteurs van belang achten.
Wij menen dat ten eerste dit op geen enkele manier recht doet aan wat leerlingen al wel weten over het onderwerp. De wijze van presentatie nodigt de docent ook niet uit om te starten met activiteiten waarin leerlingen kunnen laten zien wat ze al van het onderwerp weten.
Dit sluit aan bij een tweede bezwaar van onze kant, namelijk dat de behandeling in een 'nut-shell' vaak proceduregericht van karakter, dus (semi)formeel is en daarmee weinig tot geen recht doet aan de behoefte van onze doelgroep bij het rekenen te leunen op de context, al dan niet ondersteund door een zelfgekozen model.
Een derde bezwaar is dat het de indruk aan de docent kan geven dat behandeling van het betreffende hoofdstuk volstaat om het betreffende onderwerp voldoende aandacht te geven en dat de leerlingen vervolgens in allerlei rekensituaties uit de voeten zouden kunnen.
Zakrekenmachine als alternatief voor het cijferen
De zakrekenmachine lijkt de oplossing voor problemen bij het cijferend rekenen. Echter het omzetten van een situatie met daarin een rekenprobleem naar verwerking door de zrm en de terugvertaling van de uitkomst naar de situatie blijkt in de praktijk lang niet altijd probleemloos te verlopen. Over de achterliggende oorzaken is discussie mogelijk, nog niet duidelijk is of het hier nu om een probleem met formaliseren gaat of dat het meer een vertaalprobleem tussen de context van het rekenprobleem en de context van de rekenmachine.

2.8 Literatuur en achtergrondinformatie

- Buijs, K. (mei 2006). *Een wereld zonder cijferen.* Volgens Bartjens,. jaargang 25 nr. 5
- Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma. Deel 3B: Kommagetallen.* Zwijsen, Tilburg.
- Zwaart, P. van der (2005). *Kommagetallen in Moderne Wiskunde 7e ed. vbo,* interne publicatie SLO
  Een inventarisatie van het voorkomen van kommagetallen in de betreffende methode.
- Zwaart, P. van der (2005). *Analyse Kommagetallen in Moderne Wiskunde 7e ed. vbo,* interne publicatie SLO
- Zwaart, P. van der (2005). *Kommagetallen in diverse bavomethoden,* interne publicatie SLO
  Een inventarisatie van het voorkomen van kommagetallen in methoden voor nask, economie, aardrijkskunde en geschiedenis.
- Zwaart, P. van der (2005). *Analyse Kommagetallen in diverse bavomethoden,* interne publicatie SLO

De interne publicaties zijn op te vragen bij Pieter van der Zwaart: p.vanderzwaart@slo.nl