Onderweg naar 2F

Werken aan rekenvaardigheid in het vmbo

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

slo

Onderweg naar 2F

Werken aan rekenvaardigheid in het vmbo

Juni 2014

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

Auteurs: Kees Buijs, Victor Schmidt, Anne van Streun, Peter de Wert, Monica Wijers, Pieter van der Zwaart

Informatie
SLO
Afdeling: Beroepsonderwijs
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 663
Internet: www.slo.nl
E-mail: vmbo-mbo@slo.nl

AN: 5.7074.587

Inhoud

1. Inleiding: het streven naar 2F als vaardigheidsniveau

1.1 Rekenen als 'nieuw' vakgebied

Met de invoering van het vak rekenen in het vmbo is een ingrijpende onderwijsoperatie in gang gezet die op veel scholen het nodige stof doet opwaaien. Het betekent immers nogal wat:

- Lesuren in het rooster opnemen (Maar hoeveel uur dan? In welke leerjaren?).
- Rekenleraren aanstellen (Wat voor bevoegdheid is er nodig? Wat voor kwaliteiten moet een rekenleraar hebben?).
- Lesmaterialen aanschaffen (Gekoppeld aan de wiskundemethode, of los daarvan? 'Papieren' materialen (rekenboeken) of digitale? Zijn er rekenmethoden die zorgvuldig naar 2F toe leiden?).
- Toetsen aanschaffen (Wat voor toetsen zijn er naast de 2F-toets? Kunnen er toetsgegevens uit het basisonderwijs benut worden?).

Het beantwoorden van dergelijke vragen heeft nogal wat voeten in de aarde. Sommige scholen zijn hier dan ook geruime tijd mee bezig, waarbij het niet zelden een kwestie van vallen en opstaan is. Bij een door SLO georganiseerde conferentie voor rekenleraren in het najaar van 2011 bleek dat er op dat moment weliswaar op een flink aantal scholen al stevig aan de weg werd getimmerd; maar dat er ook een aanzienlijk aantal scholen was waar het invoeringsproces nog grotendeels van de grond moest komen. Bijvoorbeeld omdat men eerst de 2F-toets wilde afwachten om vast te stellen of er echt wat moest veranderen binnen de school. Of omdat het moeilijk was om ruimte in het lesrooster te vinden om rekenlessen in het programma op te nemen. Verder bleek bij de enquête die voorafgaand aan deze conferentie werd gehouden, dat het accent op nogal wat scholen waar wél rekenlessen plaatsvonden, vrij sterk op zelfstandig werken lag. Voor interactieve instructie zoals de leerlingen in het basisonderwijs veelal gewend zijn, bleek naar verhouding niet veel aandacht te zijn, zie figuur 1.

	1) Bijna geen tijd	2) Minder dan de helft van de tijd	3) Ongeveer de helft van de tijd	4) Meer dan de helft van de tijd
12.1 Leerlingen werken zelfstandig	3%	11%	40%	46%
12.2 Leerlingen krijgen klassikale instructie	17%	61%	17%	5%
12.3 Leerlingen krijgen interactieve instructie	49%	42%	6%	3%
12.4 Leerlingen krijgen in kleine groepen instructie	40%	48%	9%	3%
12.5 Andere werkvormen	74%	11%	0%	15%

Figuur 1. Vraag 12 uit SLO-enquête over de verschillende werkvormen die tijdens de rekenlessen gehanteerd worden (september 2011).

Meer in het algemeen leek er op dat moment bij nogal wat scholen twijfel te bestaan over de vraag of het wel wenselijk was om in aparte lessen systematisch aandacht aan rekenen te besteden. Dit was immers in het basisonderwijs al gebeurd? Was het niet vooral een kwestie van het onderhouden van kennis die daar al door de leerlingen was verworven? Pas toen steeds duidelijker werd dat met name veel leerlingen in de basisberoepsgerichte leerweg in hun leerproces nog niet zo ver gevorderd zijn en dat er voor het bereiken van 2F als vaardigheidsniveau een forse inspanning van de school wordt gevraagd, begon het besef door te dringen dat er actie ondernomen diende te worden.

Het is overigens niet voor het eerst dat zich zo'n onderwijsoperatie voordoet. Ook in de jaren '80 van de vorige eeuw werd er in opdracht van het toenmalige ministerie van OCW door een landelijke werkgroep (project W12-16) vastgesteld dat rekenen een belangrijk leerstofgebied in het voortgezet onderwijs diende te zijn. In het raamwerk dat door deze werkgroep werd ontwikkeld, vormde rekenen een van de vier hoofddomeinen van het wiskundeonderwijs in de onderbouw van het vo.
Een en ander leidde ertoe dat wiskundemethoden destijds ook rekenhoofdstukken gingen bevatten en dat de leerlingen zich regelmatig met rekenopgaven bezig gingen houden (Wijers, 2011). Maar geleidelijk aan verdween het rekenen weer uit de leerboeken, mede onder invloed van de grootschalige invoering van de rekenmachine. Waarom zou je nog aandacht aan rekenvaardigheid besteden als de rekenmachine altijd *stand by* is? Een gevolg was wel dat het vaardigheidsniveau van de leerlingen omlaag ging.

1.2 Het referentiekader taal en rekenen als wettelijk kader

Met de invoering van het Referentiekader taal en rekenen beoogde de overheid verandering in deze situatie te brengen. Dit kader werd in opdracht van het ministerie van OCW opgesteld door een commissie van vakdeskundigen (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008). Het had tot doel om een algemene impuls te geven aan de verhoging van elementaire vaardigheden op het gebied van taal en rekenen en om de totstandkoming van doorlopende leerlijnen te bevorderen. In het kader werd vastgelegd wat de leerlingen op 12-, 16- en 18-jarige leeftijd dienen te beheersen. Voor wat betreft rekenen werd daarbij een onderscheid gemaakt in S- en F-niveaus (respectievelijk streef- en fundamentele niveaus) en voor het vmbo werd 2F als te bereiken eindniveau vastgesteld. Tevens werd bepaald dat het bereiken van dit eindniveau door middel van een landelijke rekentoets zou worden geverifieerd, een toets waarvan het resultaat in de zak-slaagregeling zou gaan meetellen.
Als een wezenlijk kenmerk van het 2F-niveau werd beschouwd dat het niet zozeer om kennis van het rekenen als formeel, vakmatig systeem gaat, maar meer om functionele kennis in de zin van kennis die de leerlingen in staat stelt om in onze maatschappij goed te functioneren. Daarom wordt 2F ook wel aangeduid als het algemene burgerschapsniveau waarbij de nadruk ligt op zaken als:

- Beheersing van basale vaardigheden zoals Optellen en aftrekken tot 100, Tafels van vermenigvuldiging, Rekenen met geld, en Praktisch meten;
- Vaardigheid in het rekenen met eenvoudige breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen in contextopgaven;
- Getalsmatige gegevens in tabellen en grafieken goed kunnen interpreteren en 'bewerken';
- Verstandig gebruik kunnen maken van de rekenmachine bij het uitvoeren van berekeningen.

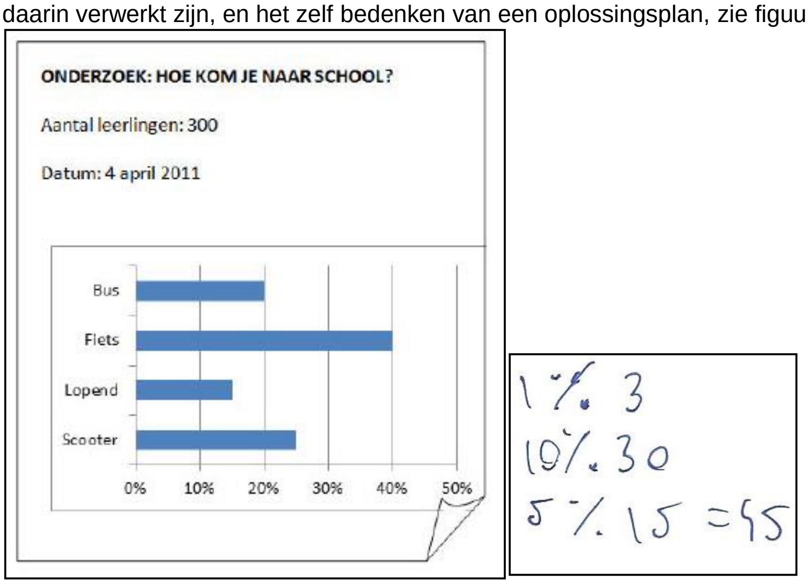
1.3 De 2F-toets als graadmeter voor het bereiken van het 2F-niveau

Enkele jaren later werd er in opdracht van het College voor Examens (CvE) door Cito een eerste versie van een toets ontwikkeld waarmee nagegaan kan worden in hoeverre leerlingen aan het eind van het vmbo het 2F-niveau hebben bereikt. Bij de ontwikkeling van deze toets is er eerst door een speciaal daartoe ingestelde commissie een Rekentoetswijzer 2F ontwikkeld (Dekker & Schmidt, 2011) die een globaal kader voor de toets beschrijft. Vervolgens is Cito aan de slag gegaan om een voorbeeldtoets 2F te ontwikkelen die werd voorgelegd aan een door het CvE ingestelde vaststellingscommisie. Na de nodige aanpassingen is deze toets in twee landelijke toetspilots uitgeprobeerd.
In de Rekentoetswijzer werd vastgelegd dat de 2F-toets zou bestaan uit een beperkte hoeveelheid kale opgaven die de leerlingen zelf dienden uit te rekenen; en een wat groter deel contextopgaven waarbij de rekenmachine ingezet mocht worden[1]. Bij de kale opgaven (figuur 2) gaat het om kennis en vaardigheden met betrekking tot leerstof zoals bewerkingen uit het getallengebied tot 1000, elementaire breuken- en procentenopgaven, opgaven met betrekking tot getalbegrip, enzovoorts.

150 – 29 + 39 = …	**Een kwart van 120 is …**	**¼ deel = … %**
40% van 350 = …	**8 – 1,25 = …**	**9 x 0.25 = …**

Figuur 2. Voorbeelden van 'kale' opgaven

Bij de contextopgaven gaat het om opgaven waarbij in de eerste plaats een element komt kijken van het begrijpen van de situatie in kwestie, het interpreteren van getalsmatige gegevens die daarin verwerkt zijn, en het zelf bedenken van een oplossingsplan, zie figuur 3.



Figuur 3: Voorbeeld van een opgave met een door een leerling bedachte oplossing De vraag bij deze opgave luidt: Hoeveel leerlingen komen lopend naar school? Bron opgave: Cito (2012).

[1] Onlangs heeft de commissie-Bosker zich gebogen over de vraag in hoeverre de 2F-toets een goede operationalisering van het referentiekader is. Men kwam tot de conclusie dat dit nog niet het geval is. Daarnaast concludeerde men dat de toets in een aantal opzichten nog verdere verbetering behoeft. (Bosker & Van de Vorle, 2014).

Vervolgens dient dit oplossingsplan uitgevoerd te worden, al dan niet met gebruikmaking van de rekenmachine. Bij ongeveer de helft van de contextopgaven gaat het overigens om situaties waarbij de machine per definitie niet bruikbaar is omdat het bijvoorbeeld gaat om een meetkundige opgave of een opgave rond digitale tijd. Een dergelijke opzet van de toets komt in hoge mate overeen met de inhoud van andere soorten landelijke toetsen zoals die van het Cito Volgsysteem Primair Onderwijs en die van TIMSS en PISA waarbij de rekenprestaties van een groot aantal landen op het niveau van basisonderwijs en voortgezet onderwijs met elkaar vergeleken worden.

1.4 De toetspilots rond de rekentoets 2F

In maart 2012 en maart 2013 werden twee landelijke toetspilots gehouden waarmee de 2F-toets werd beproefd. De resultaten van deze pilots komen grotendeels met elkaar overeen. Als we ons beperken tot de pilot uit 2013, moet geconstateerd worden dat de resultaten over de hele linie mager waren. Zo bedroeg het percentage bb-leerlingen dat een 4 of lager scoorde ongeveer 46%, een percentage dat voor de leerlingen in de kb- en tl-richtingen overigens nauwelijks lager lag, zie figuur 4. Verder haalde van de bb-leerlingen slechts 24% een voldoende, tegenover 25% van de kb-leerlingen en 32% van de tl-leerlingen.

	BB	KB	GL/TL
aantal leerlingen	24.391	34.439	59.666
gemiddeld cijfer	4,6	4,8	4,9
standaarddeviatie cijfers	1,3	1,4	1,5
percentage cijfers vier of lager	46%	42%	45%
percentage cijfers gelijk aan vijf	31%	34%	23%
percentage cijfers gelijk aan zes	18%	14%	16%
percentage cijfers gelijk aan zeven	4%	7%	10%
percentage cijfers acht of hoger	2%	4%	6%

Figuur 4. Resultaten toetspilot maart 2013 per leerweg vmbo na aanpassing normering. Bron: College voor Examens (2013).

In de Voortgangsrapportage waarin staatssecretaris Dekker over deze pilot rapporteerde (OCW, 2013), werd een aantal factoren genoemd die de resultaten ongunstig beïnvloed hadden. Dit betrof zaken als:

- Het ging om een computertoets waarbij leerlingen geen mogelijkheid hadden om ‘terug te bladeren’ in de zin dat ze de verkregen uitkomsten nog eens konden controleren.
- De totale hoeveelheid opgaven (60, waarvan 12 kale opgaven en 48 contextopgaven) bleek erg groot te zijn om in anderhalf uur te maken.
- De strenge normering: er wordt alleen op goede antwoorden beoordeeld, en niet mede op grond van uitgevoerde berekeningen[2].
- Veel leerlingen waren niet optimaal voorbereid omdat ze in de voorafgaande jaren lang niet altijd regelmatige rekenlessen hadden gehad; Bovendien werden de rekenlessen op nogal wat scholen niet altijd door vakdeskundige rekenleraren verzorgd.
- De in de toets opgenomen contexten bleken soms te complex voor de leerlingen.

Voor sommige scholen vormden deze resultaten een bevestiging van wat ze al vermoedden, namelijk dat 2F als vaardigheidsniveau vooral voor leerlingen in de bb-richting van het vmbo nauwelijks haalbaar is. Er bleken echter ook scholen met veel bb-leerlingen uit sociaal zwakkere milieus te zijn die wél hoge slagingspercentages haalden. Het laat zich dus aanzien dat het niet alleen een kwestie van haalbaarheid is, maar ook van het goed op orde hebben van het rekenonderwijs, het gebruiken van goede lesmaterialen, het inzetten van vakbekwame leraren die in staat zijn om goede rekeninstructie te geven, en dergelijke. Om in deze problematiek te voorzien, kondigde de staatssecretaris daarom een aantal maatregelen aan die er enerzijds op gericht zijn om de toets aan te passen (minder opgaven, minder complexe opgaven, leerlingen moeten kunnen terugbladeren); en anderzijds op het stimuleren van kwaliteitsverbetering van het rekenonderwijs via een ‘Intensiveringstraject’ (OCW, 2013) dat de scholen de mogelijkheid geeft om advies in te winnen over hun rekenonderwijs en over de wenselijkheid om zich verder te professionaliseren binnen dit vakgebied.

1.5 Actie ondernemen om rekenen goed in het leerplan op te nemen

Meer dan ooit is het voor scholen noodzakelijk om aandacht aan het rekenen te besteden en om dit vakgebied op een adequate manier in het leerplan op te nemen. Zoals uit een voorzichtige inventarisatie onder succesvolle scholen blijkt, is dit vooral een kwestie van een combinatie van acties en maatregelen waardoor leerlingen steeds verder richting het beoogde eindniveau van 2F kunnen komen. Enerzijds hebben zulke acties betrekking op het creëren van voorwaarden waaronder het rekenonderwijs goed tot ontwikkeling kan komen, zoals:

- aanschaffen en selectief gebruiken van geschikte lesmaterialen;
- aanstellen van een rekencoördinator en rekenleraren die affiniteit met de inhouden en didactische werkwijzen van het basisonderwijs hebben;
- opnemen van voldoende rekenlessen in het lesrooster;
- creëren van voorzieningen waardoor zwakkere leerlingen gelegenheid hebben om geleidelijk aan verder vertrouwd met de leerstof te raken.

[2] Als gevolg van deze strenge normering doet zich het merkwaardige fenomeen voor dat het gemiddelde cijfer bij het wiskunde-examen in het vmbo, hoewel inhoudelijk van ongeveer gelijke moeilijkheidsgraad, meer dan een punt hoger ligt dan het gemiddelde cijfer bij de rekentoets (Schmidt, 2013).

Anderzijds gaat het vooral om acties die te maken hebben met teamvorming en professionalisering binnen de school, zoals:

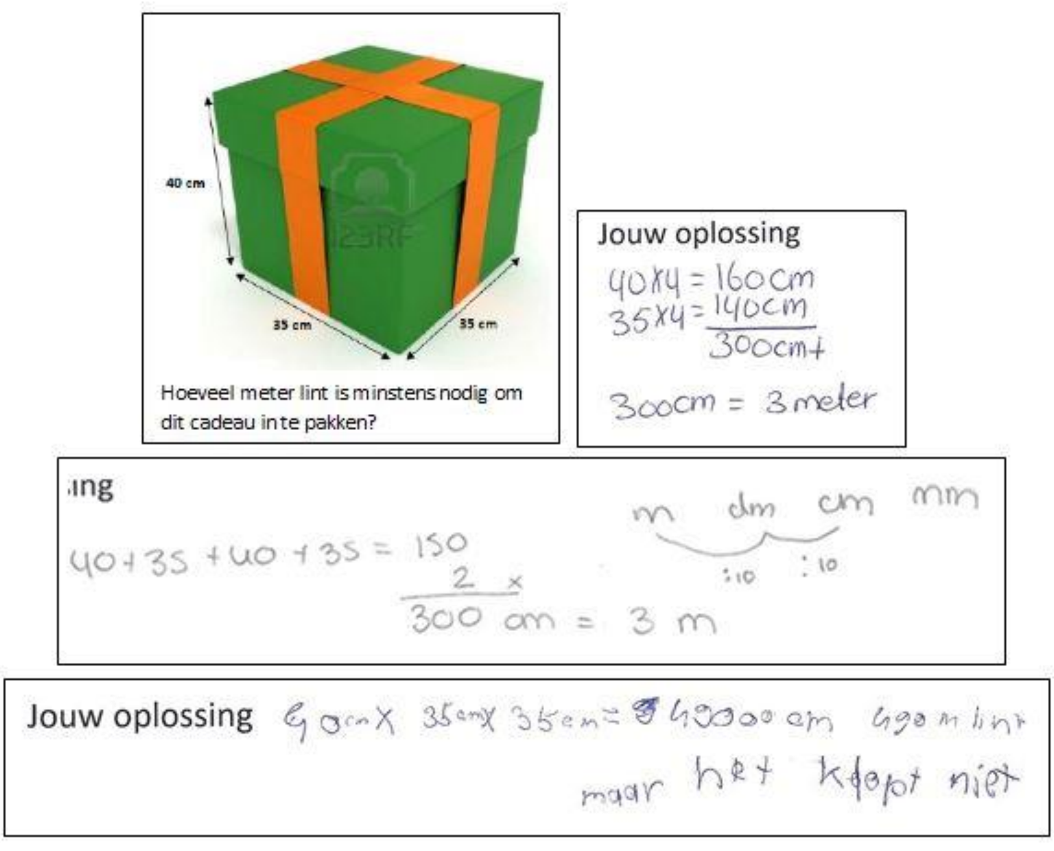
- deelname aan nascholingsactiviteiten onder leiding van vakbekwame begeleiders;
- organiseren van bijeenkomsten gericht op het gezamenlijk uitwisselen van kennis en ervaring; en op het onderling afstemmen van instructiemethoden en dergelijke;
- op elkaar afstemmen van inhouden en werkwijzen met andere vakken waarin rekenonderwerpen aan bod komen, zoals economie (procenten), aardrijkskunde (schaal) en natuurkunde (meten).

In het project waar deze publicatie het resultaat van is, werd samengewerkt met een aantal scholen die bezig waren om hun rekenleerplan op te zetten. Daarbij werden onder meer leraren geïnterviewd over hun ervaringen met rekenlessen en over het beleid dat men op de school met betrekking tot rekenen voerde. Er werden groepjes leerlingen uit verschillende leerjaren over hun rekenkennis geïnterviewd en er werd onderzocht hoe deze leerlingen verder geholpen konden worden. Voorts werden lesmaterialen op hun mogelijkheden en beperkingen onderzocht, terwijl ook werd nagegaan wat voor moeilijkheden leerlingen bij het maken van 2F-opgaven zoal ondervinden en hoe deze moeilijkheden aangepakt kunnen worden. Uiteindelijk heeft dit geresulteerd in een aantal voorlopige leerplanmaterialen en -ideeën die op een tweetal conferenties aan groepen leraren werden voorgelegd.
Gaandeweg is daarbij de overtuiging gegroeid dat er weliswaar veel leerlingen zijn bij wie de rekenvaardigheid bij binnenkomst in het vmbo duidelijk te wensen overlaat; maar dat er eigenlijk maar heel weinig leerlingen zijn bij wie zulke lacunes het gevolg zijn van een soort inherente ‘rekenblindheid’ of vorm van dyscalculie. Bij het overgrote deel van de leerlingen is eerst en vooral sprake van een betrekkelijk trage rekenontwikkeling waaraan in de loop van het vmbo heel veel te verbeteren valt. Misschien zullen niet alle leerlingen uiteindelijk op 2F-niveau uitkomen, maar voor een groot deel zal dit wel het geval kunnen zijn. In de volgende hoofdstukken wordt een aantal aangrijpingspunten beschreven die daar het nodige aan kunnen bijdragen.

2. Voorbeeldopgaven 2F met bijbehorende oplossingswijzen

2.1 Perspectiefrijke oplossingswijzen van leerlingen

Een van de zaken die voor een school van belang zijn om hun leerplan nader inhoud te kunnen geven, heeft betrekking op actuele informatie over de opgaven die in de 2F-toets voorkomen. Wat zijn dat voor opgaven? En wat voor oplossingsstrategieën zijn het die leerlingen zoal gebruiken om dergelijke opgaven op te lossen? Het is waardevol om daar als school het nodige van te weten. Dat geeft immers niet alleen een idee van waar je als rekenleraar qua vaardigheidsniveau naar toe moet werken, maar ook van de oplossingsstrategieën, die in de lessen aan de orde gesteld kunnen worden. In eerste instantie, als de leerlingen nog niet zo ver gevorderd zijn, zijn dit veelal nog niet de meest efficiënte, verkorte strategieën zoals een leraar die voor ogen heeft. Doorgaans zullen het informele oplossingswijzen zijn waarbij leerlingen diverse tussenstappen maken, hulpnotaties gebruiken en soms nog fouten maken. Juist als er over dergelijke strategieën de nodige informatie beschikbaar is, kan dit waardevolle aanknopingspunten bieden voor de vraag hoe je de leerlingen op het spoor van zulke oplossingen zet. Neem bijvoorbeeld de oplossingswijzen bij de opgave in figuur 5 uit de voorbeeldtoets 2F van 2012 (Cito, 2012), afkomstig uit het onderzoek dat verderop in dit hoofdstuk beschreven wordt.



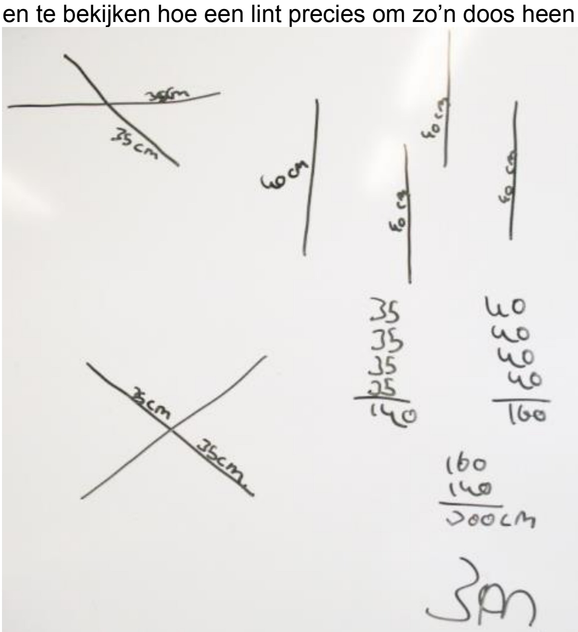
Figuur 5. De cadeaulint-opgave. Bron opgave: Cito (2012).

De bovenste oplossingswijze via 4x40 en 4x35 is een efficiënte strategie van een leerling die de opgave kennelijk goed doorzien heeft. Hij heeft zich gerealiseerd dat het in totaal om 4 ‘staande’ stukjes van 40 cm en 4 ‘liggende’ stukjes van 35 cm gaat. Eerst heeft hij daarna het totaal aantal centimeters bepaald om dit ten slotte om te zetten in meters. De oplossing van de leerling daaronder is ook correct maar wel anders. Deze leerling heeft waarschijnlijk eerst het totaal van de vier zichtbare staande en liggende stukjes bepaald (150 cm). Vervolgens heeft hij zich gerealiseerd dat er ‘aan de achterkant’ evenveel stukjes moeten zijn, waarna 150 is verdubbeld tot 300 cm. Met behulp van de kennis van het metriek stelsel (waarvan een onderdeel aan de berekening is toegevoegd) is ten slotte de uitkomst van 3 meter achterhaald. De onderste oplossing is fout, maar toch interessant. Deze leerling heeft waarschijnlijk gedacht: het is een doos, dus het zal wel iets met ‘lengte keer breedte keer hoogte’ zijn. Met behulp van de rekenmachine heeft hij vervolgens 40x35x35 uitgerekend (uitkomst 49000 cm), om uiteindelijk tot de slotsom te komen dat dit niet goed kan zijn! Wellicht ontbrak de tijd om naar een andere oplossingswijze te zoeken.

Al met al geven deze oplossingsstrategieën een aardig idee van wat er bij het oplossen van contextopgaven op 2F-niveau allemaal komt kijken. Bijvoorbeeld:

- Een voorstelling van de situatie in kwestie kunnen maken en relevante gegevens en termen kunnen interpreteren;
- Op basis daarvan een geschikte oplossingsstrategie kunnen bedenken;
- Deze correct kunnen uitvoeren (al dan niet met behulp van de rekenmachine);
- Het resultaat moet ten slotte naar de probleemsituatie teruggekoppeld kunnen worden.

Voor het onderwijs biedt het bovenstaande de nodige aanknopingspunten. Zo dient een leerling over voldoende maatkennis te beschikken (centimeters in meters kunnen omzetten; bij andere opgaven milliliters in centiliters of grammen in kilogrammen). Ook is het wenselijk dat een leerling enig begrip van getallen heeft evenals enige vaardigheid in het hoofdrekenen zodat niet alles op de rekenmachine uitgerekend hoeft te worden. Daarbij lijkt het belangrijk om te overwegen hoe bevorderd kan worden dat leerlingen zich inderdaad een goede (ruimtelijke) voorstelling bij de situatie leren maken. Mogelijk kan het voor leerlingen die er niet uitkomen (zoals bij de onderste oplossing) waardevol zijn om de staande en liggende stukjes op een kladblaadje of op het bord te tekenen, zie figuur 6. En mogelijk kan het soelaas bieden om nog een stap verder terug te gaan en de situatie te concretiseren aan de hand van een echte doos en te bekijken hoe een lint precies om zo’n doos heen loopt.



Figuur 6. Oplossing door leerling 'cadeaulint'-opgave.

2.2 Onderzoekje naar regelmatig voorkomende oplossingswijzen

Om meer over al dergelijke oplossingswijzen en mogelijke implicaties daarvan voor het onderwijs aan de weet te komen, werd door SLO in het najaar van 2013 een onderzoekje op een drietal vmbo-scholen gehouden. Daarbij werd een grote groep leerlingen uit vmbo-3 een tiental contextopgaven op 2F-niveau voorgelegd. Er werd hen gevraagd om deze opgaven zoveel mogelijk zelfstandig op te lossen en daarbij hun oplossingswijze zo duidelijk mogelijk te noteren. Als ze een opgave niet goed begrepen konden ze de aanwezige leraar om een tip vragen, maar ze konden deze ook overslaan. In totaal maakten meer dan 200 leerlingen afkomstig uit de bb- en kb-richting de opgaven.
De aldus verkregen verzameling oplossingswijzen werd geanalyseerd op veel voorkomende fouten, perspectiefrijke oplossingen, niveaus van oplossing en gebruikte notatiewijzen. Naar aanleiding daarvan werden voor een aantal opgaven ‘bloemlezingen’ van regelmatig voorkomende, perspectiefrijke oplossingen samengesteld, waarbij soms ook onjuiste maar betekenisvolle oplossingen werden toegevoegd. Deze bloemlezingen werden vervolgens ook met de leraren van de betreffende scholen besproken. Op de volgende pagina’s zijn drie van deze bloemlezingen weergegeven, steeds gevolgd door een beknopte analyse.

Onderwijscontext waaruit de oplossingen zijn voortgekomen
Voor het op waarde kunnen schatten van de weergegeven oplossingswijzen kan het nuttig zijn om enig idee te hebben wat voor rekenonderwijs de leerlingen in kwestie reeds achter de rug hadden op het moment dat ze de opgaven maakten, of algemener, van de onderwijscontext waaruit deze oplossingen zijn voortgekomen. Deze context was op alle drie de scholen enigszins vergelijkbaar en kwam in grote lijnen op het volgende neer:

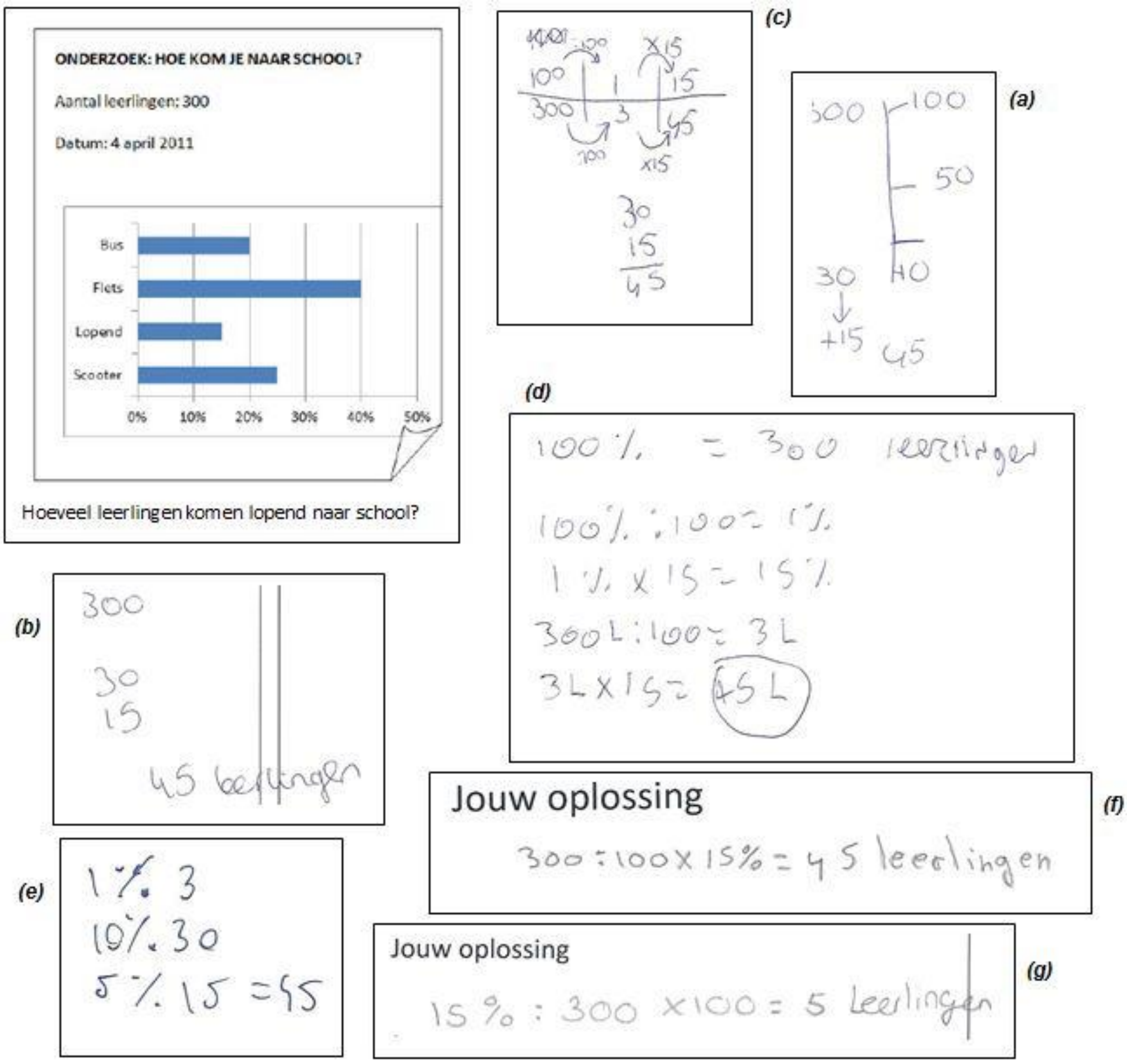
- Er is op alle drie de scholen sinds enkele jaren sprake van een breed gedragen, door de directie ondersteund schoolbeleid ten aanzien van de invoering van rekenen als vakgebied;
- Er zijn veelal vakbekwame rekenleraren binnen de school werkzaam die doorgaans een pabo/po-achtergrond hebben en die redelijk goed op de hoogte zijn van inhouden en didactiek van rekenen-wiskunde in het basisonderwijs;
- Er is op alle drie de scholen een rekencoördinator die zich vakinhoudelijk in een aantal zaken heeft verdiept en die voor aansturing en uitvoering van het rekenbeleid zorgt;
- Er is soms sprake van een vorm van interne uitwisseling en scholing met betrekking tot belangrijke aspecten van het beoogde rekenonderwijs;
- Men is zich steeds meer bewust geworden van het feit dat er met name voor de groep bb-leerlingen (de hoofdmoot van het leerlingenbestand op de scholen), tot op heden geen geschikte rekenmethoden zijn die integraal doorlopen kunnen worden;
- Daarom heeft men voorlopig voor een combinatie van lesmaterialen en instructievormen gekozen waarmee men zelf een zo goed mogelijk leerplan heeft samengesteld dat met een zekere regelmaat wordt bijgesteld of aangevuld (de 'lappendekenbenadering').

2.3 Drie bloemlezingen van perspectiefrijke oplossingen

In deze paragraaf worden drie bloemlezingen van regelmatig voorkomende oplossingswijzen beschreven, steeds gevolgd door een beknopte analyse van de getoonde oplossingen zoals die in de gesprekken met leraren plaatsvond. In de paragraaf daarna wordt vervolgens een vijftal implicaties van deze oplossingswijzen voor het onderwijs besproken[3].

[3] Op de SLO-website zijn alle hier weergegeven oplossingswijzen ook te downloaden in een 'meewerkpracticum' gericht op een gezamenlijke analyse door schoolteams van al deze aanpakken door studenten en schoolteams.

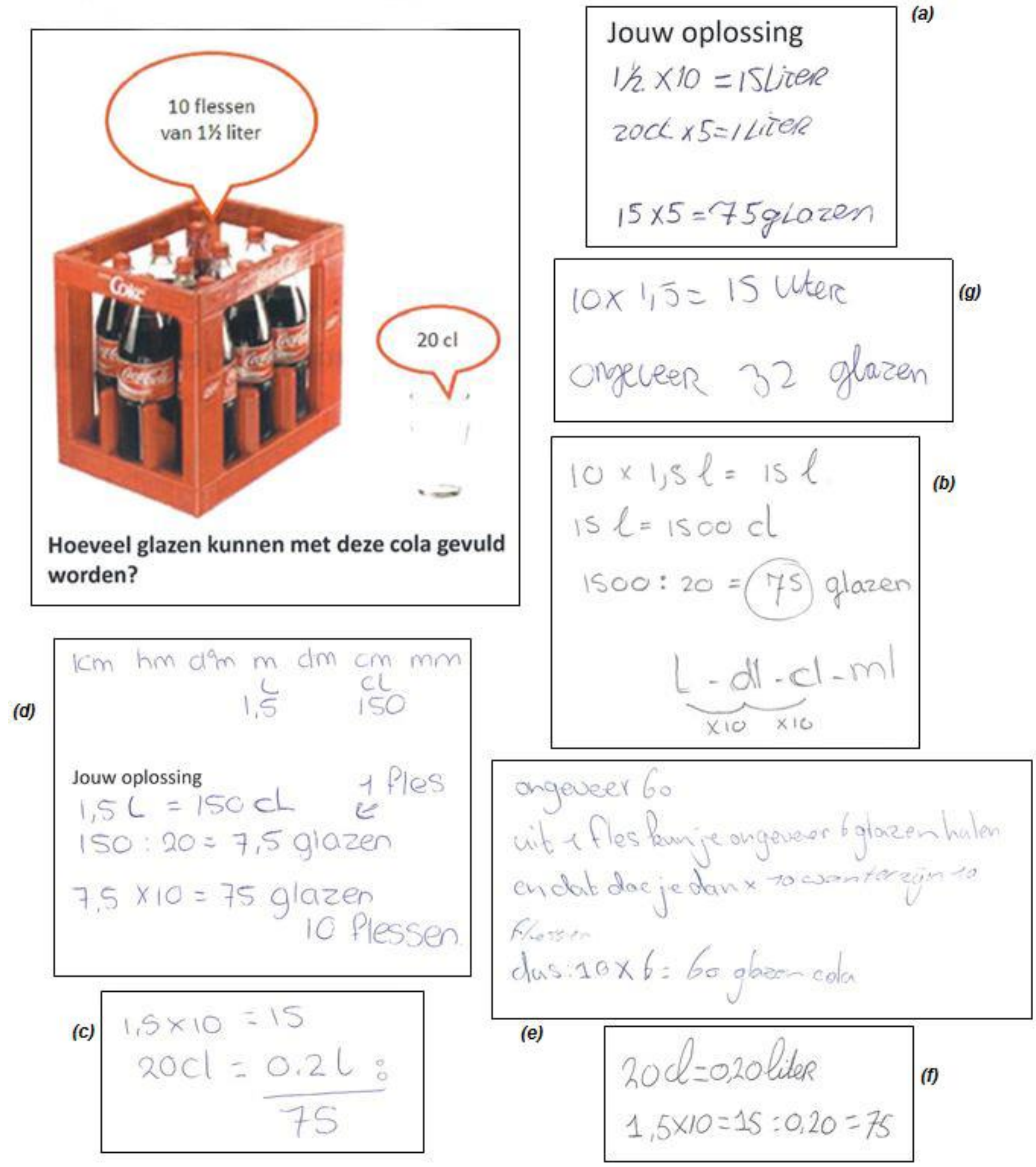
Opgave 'Lopend naar school'



Figuur 7. Opgave 'Lopend naar school'. Bron opgave: Cito (2012).

Het meest basaal lijken de oplossingen waarbij een model of schema is gebruikt. Zo is bij (a) een lijn getekend als schematische weergave van 100%. Aan de hand daarvan is eerst 10% uitgerekend en daarna 5%. Ten slotte zijn de subtotalen opgeteld. Bij (b) is hetzelfde gedaan, alleen de lijn (of strook) is hier niet daadwerkelijk getekend. Bij (c) en (d) wordt via 1% als ankerpunt gewerkt: delen door 100 en vermenigvuldigen met 15. Oplossing (e) is daar een variant op. De meest verkorte, formele oplossingen zijn die van (f) en (g) met dien verstande dat (g) onjuist is, wellicht een niet goed begrepen 'quasi-formele' oplossing.

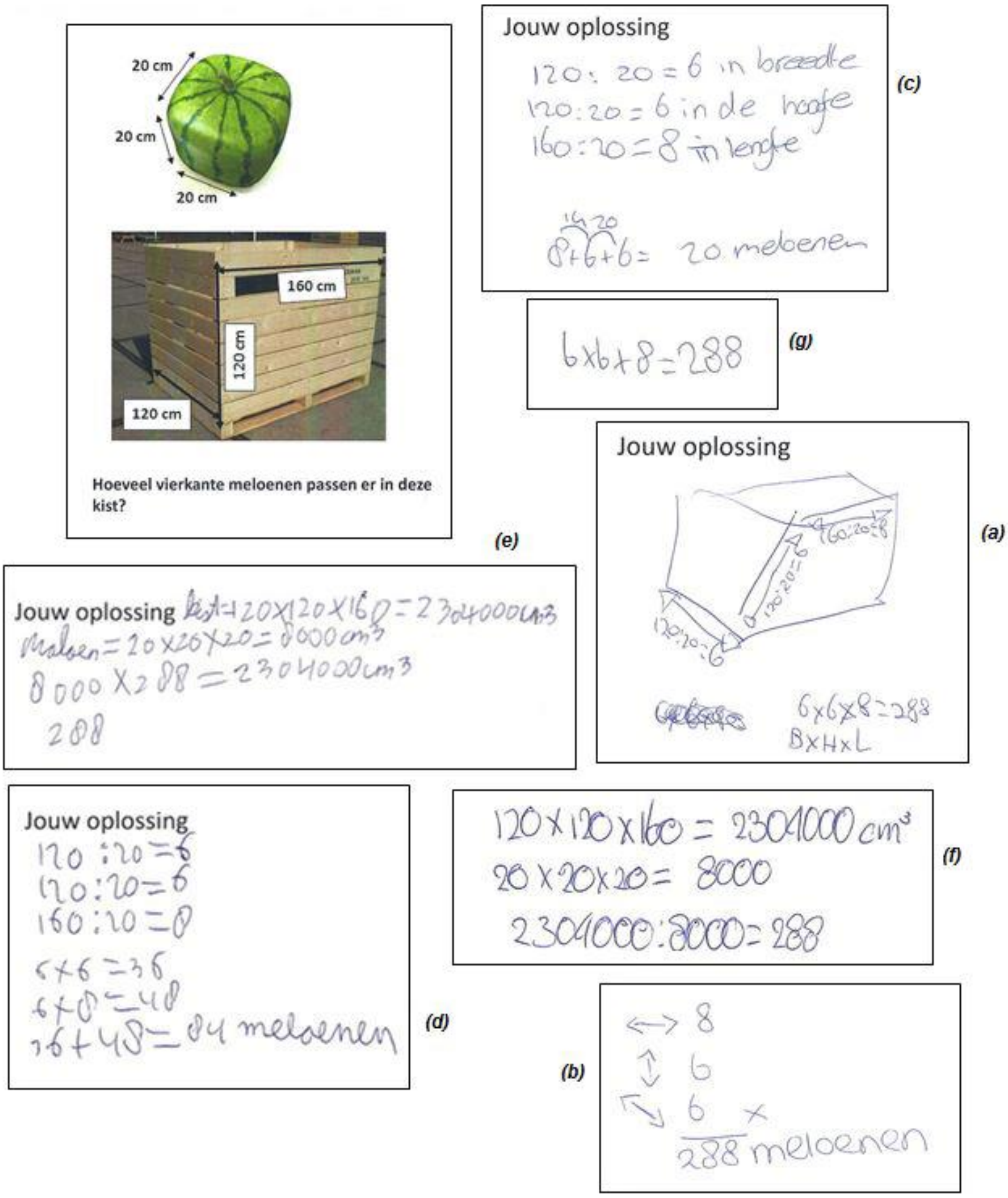
Opgave 'cola'



Figuur 8: Opgave 'Cola'. Bron opgave: Cito (2012).

Bij alle oplossingen is sprake van stapsgewijze hulpnotaties waarmee naar de uitkomst wordt toegewerkt. Bij (a) wordt eerst het totaal aantal liters in 10 flessen bepaald, en daarna het totaal aantal glazen via een vorm van 'opvermenigvuldigen'. Bij (b) en (c) gebeurt hetzelfde, maar daar wordt het totaal aantal glazen wat efficiënter via delen bepaald. Bij (b) wordt bovendien een onderdeel van het metriek stelsel ter ondersteuning weergegeven. Dat gebeurt ook bij (d), maar daar worden ook de corresponderende lengtematen genoteerd. Oplossing (e) is een verdere verkorting richting een meer formele aanpak via x10 en :0,20. Bij (f) en (g) ten slotte wordt een schatting gemaakt; op zich redelijk in de buurt, maar het leidt niet tot een correct antwoord.

Opgave 'meloenen'



*Figuur 9.*Opgave 'Meloenen'. Bron opgave: Cito (2012).

Bij de oplossingen (a) en (b) is sprake van visueel-schematische ondersteuning. Bij (a) is de kist als zodanig getekend, bij (b) alleen de drie dimensies daarvan. In beide gevallen levert dit goede oplossingen op. Bij (c) en (d) daarentegen is wel het aantal meloenen in de lengte, breedte en hoogte correct bepaald, maar vervolgens op verschillende manieren opgeteld, hetgeen natuurlijk tot een onjuiste oplossing leidt[4]. Bij (e) en (f) wordt een andere weg gevolgd waarbij eerst de totale inhoud van de kist en de inhoud van 1 meloen wordt bepaald, en

[4] In hoofdstuk 6 over de afpelbenadering, is in paragraaf 6.5 een voorbeeld van een lessituatie opgenomen waarin de leraar poogt om vergelijkbare onjuiste oplossingen via 'afpellen' bij te sturen.

vervolgens via delen het aantal meloenen dat in de kist past. Bij (g) ten slotte is sprake van een verder verkorte, meer formele oplossing via direct uitvoeren van de vermenigvuldiging 6x6x8.

2.4 Aanknopingspunten voor het onderwijs

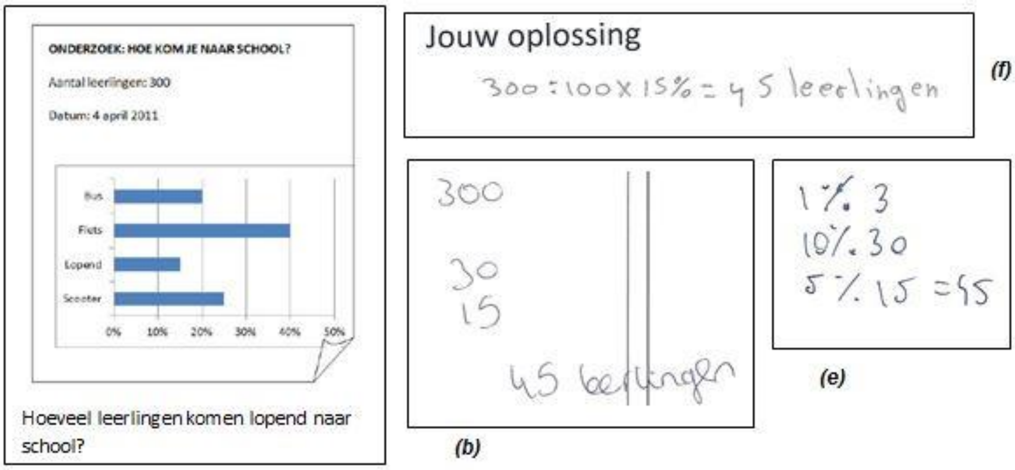
Voorgaande oplossingswijzen geven uiteraard geen compleet beeld van wat de leerlingen in het onderzoekje allemaal lieten zien. Er waren ook heel wat gevallen waarin leerlingen niet tot een oplossing kwamen, of tot een foutieve oplossing. Dit betrof bijvoorbeeld gevallen waarbij een leerling problemen had met het doorzien van de context of het interpreteren van de informatie daarbinnen. Neem bijvoorbeeld de navigatie-opgave (figuur 10).

Figuur 10. Opgave 'Navigatie'. Bron opgave: Cito (2012).

Bij de uitvoering van het onderzoekje bleek dat er leerlingen waren die dergelijke navigatiesystemen helemaal niet kenden of die de gehanteerde termen niet goed konden duiden (wat betekent 'verwachte aankomsttijd'?). In zulke gevallen heb je als leerling meteen al een handicap waardoor het hoogst twijfelachtig is of je überhaupt tot een oplossing kunt komen. Er waren dan ook leerlingen die bij zulke opgaven weliswaar wat opschreven maar die zelf niet het gevoel hadden dat dit goed zou kunnen zijn (zie onderste oplossingswijze). Daarnaast waren er ook bij deze opgave overigens heel wat leerlingen die wél tot een goede oplossing kwamen (bovenste oplossingswijze).
Niettemin lijkt de verzameling oplossingswijzen zoals in de vorige paragraaf is weergegeven, een aantal belangrijke aanknopingspunten voor het onderwijs te geven. Hieronder een beknopt overzicht van punten die tijdens de bespreking van de bloemlezingen met groepen leraren naar voren kwamen.

Gebruik van passende hulpnotaties
Veel leerlingen lieten in hun werk fraaie voorbeelden van hulpnotaties zien. Blijkbaar waren ze zich bewust van het feit dat zulke notaties niet alleen ondersteunend kunnen werken om tot een oplossing te komen, maar ook dat je daardoor achteraf je berekening nog eens kunt langslopen om na te gaan of het allemaal wel klopt. Zoals bij de bespreking van de bloemlezingen bleek, was dit notatiegedrag ongetwijfeld mede het resultaat van het feit dat hier in de rekenlessen regelmatig aandacht aan werd besteed. Bijvoorbeeld doordat leraren naar aanleiding van wat leerlingen aandragen, zelf ook zulke notaties op het bord gebruiken. Het stimuleren van zulk notatiegedrag lijkt dan ook een waardevol aanknopingspunt voor het onderwijs.

Formele oplossingen: waardevol maar niet zaligmakend
De meest efficiënte strategieën die leerlingen lieten zien zijn de formele oplossingen waarbij een leerling waarschijnlijk snel doorzag hoe de situatie in elkaar zat en welke combinatie van bewerkingen gebruikt kon worden om tot een uitkomst te komen. Zo waren er nogal wat leerlingen die bij de ‘lopend naar school’-opgave als berekening ‘:100 en x15’ noteerden; zie oplossing (f) in figuur 11. Op zich zijn dit natuurlijk waardevolle strategieën waarop in het onderwijs aangestuurd kan worden. Maar daarnaast waren er ook veel oplossingen waarbij de leerlingen hun redenering stapsgewijs noteerden; zie oplossingen (b) en (e) hieronder. Weliswaar zijn zulke oplossingen wat omslachtiger, maar toch ook redelijk doelmatig. Het is voor sommige leerlingen al heel wat als ze zulke ‘stapsgewijze oplossingen’ goed kunnen hanteren.



Figuur 11. Gedeelte uit 'Lopend naar school'. Bron opgave: Cito (2012).

Voor het onderwijs lijkt het dan ook aan te bevelen om zeker ook aandacht aan dit type oplossingen te besteden als een alternatief voor de meer formele strategieën.

Gebruik van plaatjes, schema’s en modellen
Met een zekere regelmaat gebruikten de leerlingen behalve stapsgewijze oplossingswijzen ook plaatjes of schema’s om hun oplossing te ondersteunen. Bijvoorbeeld door een strook te tekenen bij het berekenen van een percentage, een schema waarin de drie dimensies staan aangegeven waarin de meloenen gestapeld werden, en een verhoudingstabel of dubbele getallenlijn. Zulke visualiseringen en schema’s kwamen echter naar verhouding niet zoveel voor.

Toch lijkt dit een belangrijk hulpmiddel om het oplossingsproces te ondersteunen – een hulpmiddel dat in het basisonderwijs meer en meer gemeengoed is geworden en dat juist zwakkere leerlingen het nodige houvast kan geven. Het zou waardevol kunnen zijn als leraren in het vmbo hier ook meer aandacht aan schenken. Zo lijkt het aannemelijk dat leerlingen het voor velen lastige procentrekenen makkelijker oppikken als ze hierbij in eerste instantie een strook als ondersteuning kunnen gebruiken.

Praktische ervaringen met concrete materialen als basis voor het verwerven van kennis
Tijdens de uitvoering van het onderzoekje bleek dat er bij de meetopgaven weliswaar regelmatig goede oplossingen geproduceerd werden door leerlingen die het metriek stelsel kennelijk goed kenden. Maar er waren ook heel wat leerlingen die moeite hadden om bijvoorbeeld centiliters in liters of millimeters in centimeters om te zetten. Sommige leerlingen, aldus veel leraren, 'krijgen het metriek stelsel maar niet in hun hoofd'. Iets soortgelijks geldt voor het leren oplossen van problemen met een meetkundig aspect zoals de lint-opgave en de meloenenopgave. Praktische ervaringen met concrete materialen lijken in zulke situaties van grote waarde. Voor wat betreft het meten is het belangrijk om de leerlingen een aantal ervaringen met praktisch meten op te laten doen. Immers, als je zelf als leerling weinig of geen ervaring hebt met een meetlint, een maatbeker of een keukenweegschaal, is het des te moeilijker om elementaire relaties tussen maateenheden zoals centimeter en millimeter of deciliter en liter goed te onthouden. Evenzo is het moeilijk om je voor te stellen hoe bijvoorbeeld het lint om de doos heen loopt of hoe de meloenen in de kist passen als je zulke handelingen niet eerst op een concreet niveau hebt uitgevoerd.

3. Contouren van een leerplan richting 2F

3.1 Grote verschillen tussen leerlingen

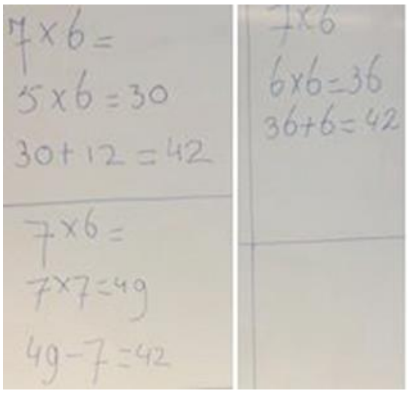
In het vorige hoofdstuk is besproken hoe redelijk succesvolle leerlingen bij 2F-opgaven zoal tot een oplossing komen en wat daaruit valt af te leiden voor het te geven rekenonderwijs. Een punt dat daarbij ook al is aangestipt, heeft betrekking op de grote verschillen in vaardigheidsniveau van leerlingen bij binnenkomst van het vmbo. Deze verschillen hebben vaak betrekking op verschillende kennisaspecten en hebben deels te maken met de soms sterk uiteenlopende ‘voorgeschiedenis’ van leerlingen in het basisonderwijs. Het kan immers een groot verschil uitmaken of je als leerling in een klas hebt gezeten waarin veel in het werk is gesteld om je ook bij onderwerpen als breuken, procenten en meten mee te laten doen met de rest van klas; of dat je in een ‘individuele leerlijn’ hebt gezeten waarbij de nadruk sterk op zelfstandig oefenen lag en waarbij de genoemde onderwerpen grotendeels buiten beschouwing bleven. Verschillen kunnen meer in het algemeen betrekking hebben op:

- het vaardigheidsniveau met betrekking tot basiskennis, variërend van nog altijd moeite hebben om aftrekopgaven onder de 100 zoals 72-25 efficiënt uit te rekenen tot aan het vlot uit het hoofd kunnen uitrekenen van dergelijke opgaven, en variërend van weinig idee hebben hoe je een praktische meting met behulp van een duimstok of rolmaat uitvoert, tot aan het vlot kunnen uitvoeren van zo’n meting en bovendien kennis hebben van elementaire relaties tussen de bijbehorende maateenheden (100 cm in 1 m; 10 mm in 1 cm; …);
- de sociaal-culturele achtergrond en het daarmee samenhangende taalvaardigheidsniveau, bijvoorbeeld wat betreft het kunnen doorzien van contexten en daarin gehanteerde termen, het kunnen verwoorden van een gebruikte rekenstrategie en het kunnen volgen van een door een medeleerling onder woorden gebrachte oplossing;
- de rekenhouding van leerlingen, variërend van het hebben van een steeds verder gegroeide aversie tegen rekenen (‘Ik heb het nooit begrepen…’), tot aan het ‘toch wel een leuk vak vinden’ omdat hij eigenlijk best goed uit de voeten kon met zaken als hoofdrekenen en eenvoudige breuken;
- de mate waarin leerlingen gelegenheid hebben gehad om zich elementaire kennis te verwerven op het gebied van ‘gevorderde leerstof’ zoals breuken, verhoudingen, kommagetallen, procenten en meten, variërend van nauwelijks met deze leerstof in aanraking zijn geweest tot aan daarmee een zekere vertrouwdheid hebben opgebouwd.

Het laat zich raden dat het verre van eenvoudig is om rekening met al dergelijke verschillen te houden. Waardevol kan het voor leraren in ieder geval zijn om leerlingengegevens uit het basisonderwijs ter beschikking te hebben, zoals uit een leerlingvolgsysteem. Dat geeft veelal een goede indicatie hoe ver leerlingen zijn gekomen. Soms wordt er bij binnenkomst in het vmbo ook een instaptoets afgenomen om een (nader) beeld van het vaardigheidsniveau te krijgen, ook dit kan uiteraard helpen. Op grond daarvan worden leerlingen soms in niveaugroepen ingedeeld waarbij ze al naar gelang het vaardigheidsniveau bepaalde rekenleerstof krijgen aangeboden. Het voordeel kan zijn dat leerlingen van ongeveer gelijk niveau dan in dezelfde groep komen te zitten, waardoor het wat makkelijker wordt om het onderwijs vorm te geven. Een nadeel kan echter zijn dat op die manier de zwakste leerlingen de impulsen van de inbreng van betere leerlingen missen, impulsen die in het onderwijs juist zo bruikbaar zijn om met alle leerlingen samen stappen verder te komen.

3.2 Werken aan doorlopende leerlijnen – waar beginnen?

Rekenonderwijs in het vmbo opzetten heeft iets weg van het in een rijdende trein springen. De leerlingen hebben op rekengebied in het basisonderwijs immers al een heel leertraject achter de rug – echter meestal zonder dat de leraar daar het fijne van weet. Waarschijnlijk hebben de meeste leerlingen dus bijvoorbeeld al enige kennis van breuken, verhoudingen of procenten en is het niet nodig om van voren af aan te beginnen. Ook is er vaak wel enige kennis van belangrijke rekeneigenschappen zoals de commutatieve eigenschap (‘omkeerregel’), verkorte strategieën zoals bij uitrekenen van tafelopgaven, zie figuur 12, en van de tienregel (10x24 is ‘24 met een nul erachter’). Maar dat geldt niet voor alle leerlingen en het kan lastig zijn om te bepalen waar je moet beginnen.



Figuur 12. Inventarisatie efficiënte strategieën tafelopgave 7x6.

Op veel scholen kiest men er daarom voor om de leerlingen in een eerste periode grotendeels zelfstandig uit het rekenboek in kwestie te laten werken. Op zich valt daar wat voor te zeggen omdat dit de leraar de gelegenheid biedt om een eerste, globale indruk te krijgen van wat leerlingen aan kunnen, waar eventuele moeilijkheden liggen, enzovoorts. Een mogelijk bezwaar is echter dat sommige leerlingen in het basisonderwijs ook al heel lang met zelfstandig oefenen zijn bezig geweest en dus bevestigd worden in hun idee van rekenen als saai en moeilijk vak. Ook is er het gevaar dat er in eerste instantie gekozen wordt voor leerstof waar de leerlingen nog maar weinig vertrouwd mee zijn en dat dus eigenlijk instructie gewenst is om ze verder te helpen. Een mogelijkheid om hieraan tegemoet te komen is om de leerlingen in het begin enkele keren open opgaven voor te leggen onder het motto ‘laat zien wat je kunt!’.
Daarbij kan de opdracht luiden om de opgaven in kwestie op je eigen manier op te lossen en zo duidelijk mogelijk te noteren hoe je dat aanpakt. Ter afsluiting van de les kan dan geïnventariseerd worden hoe ze een opgave hebben opgelost en wat voor strategieën er zijn gebruikt. Zo kan naar voren komen dat er verschillende soorten strategieën zijn (hoofdrekenen, kolomsgewijs rekenen, cijferen) en dat al naar gelang de situatie en de eigen voorkeur voor de ene dan wel voor de andere strategie gekozen kan worden. Zeker als leerlingen van tijd tot tijd hun strategie zelf op het bord mogen noteren, kan dit een rekenles levendig en leerzaam maken.
Ook praktische meetactiviteiten lenen zich uitstekend om ‘te laten zien wat je kunt’. De leerlingen kunnen hierbij in groepjes van twee of drie werken en een meetcircuit doorlopen waarbij beurtelings de hoogte van een deur, de breedte van een tafel en de afmetingen van een placemat gemeten worden. Na afloop kunnen de groepjes demonstreren hoe je zo’n meting nu precies uitvoert en hoe je het resultaat noteert. Niet alleen kan de leraar op deze manier een idee krijgen van wat de leerlingen zoal kunnen en weten, maar ook kan dit de leerlingen een positief gevoel geven omdat ze niet aangesproken worden op wat ze moeilijk vinden, maar juist

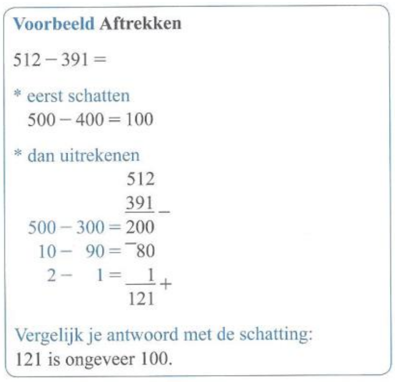
op wat ze wél kunnen. En mochten sommige leerlingen niet goed op de hoogte zijn van het feit dat je bij meten altijd ‘bij de nul’ begint (zoals door enkele leraren tijdens een pilot werd gesignaleerd), dan kan de leraar hier enige instructie over geven.

Bij onderwerpen zoals breuken, kommagetallen en procenten zijn zulke open opgaven ook te bedenken. Bijvoorbeeld: gegeven een laptop van 440 euro, bedenk zelf welke percentages korting jij makkelijk kunt uitrekenen. Lastig kan het wel zijn dat sommige leerlingen wellicht nog nauwelijks onderwijs in zulke onderwerpen hebben gehad, die zullen dus al snel moeilijkheden hebben om ‘te laten zien wat ze kunnen’ op dat vlak.

3.3 Selectief gebruik maken van een rekenmethode

Er is de laatste jaren, mede als gevolg van de invoering van het referentiekader, een veelheid aan rekenboeken en –methoden voor het vo op de markt gekomen. Deels betreft dit methoden die gekoppeld zijn aan de bijbehorende wiskundemethode (zoals bij *Getal en Ruimte* en *Moderne Wiskunde*), deels gaat het om op zichzelf staande methoden (zoals bij *Rekenblokken*, *Startrekenen* en *Nu Rekenen*). Bij deze methoden horen gewoonlijk ook digitale oefenprogramma’s. Daarnaast zijn er op zichzelf staande digitale oefenprogramma’s zoals *Rekentuin*, *Rekenweb* en *Rekentrainer*.

Bij de rekenmethoden zijn er gewoonlijk aparte delen voor havo/vwo en vmbo, waarbij wordt vermeld welk niveau van het referentiekader als einddoel wordt gehanteerd. Ten slotte zijn er ook nog allerlei lesmaterialen die zich specifiek op een bepaalde subcategorie van leerlingen richten, zoals de Praktijkkernen bij *Getal en Ruimte*. (Zie figuur 13.)


Voorbeeld Aftrekken

512 − 391 =

* eerst schatten
500 − 400 = 100

* dan uitrekenen

	512
	391 −
500 − 300 =	200
10 − 90 =	⁻80
2 − 1 =	1 +
	121

Vergelijk je antwoord met de schatting:
121 is ongeveer 100.

Figuur 13. Opgave aftrekken. Bron: Getal & Ruimte, Rekenboek 1 vmbo-bk, Groningen, Noordhoff.

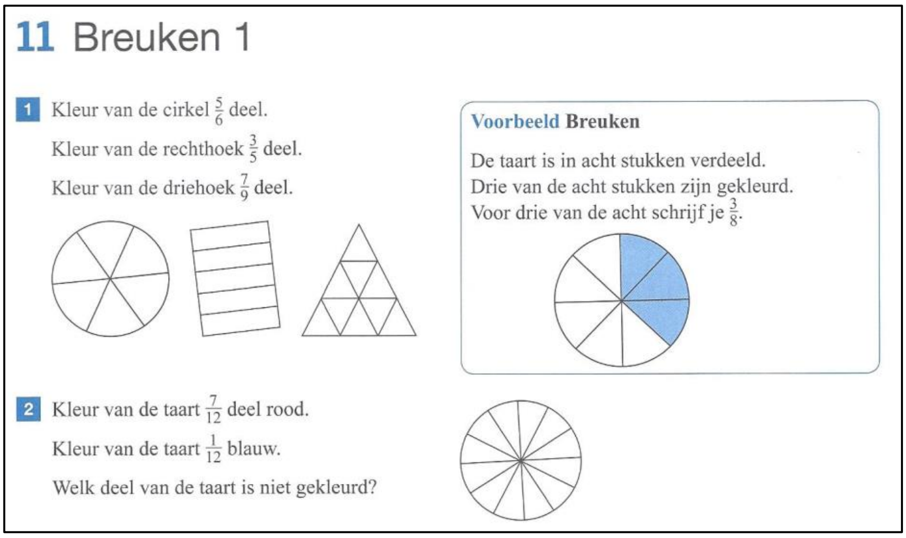
In de rekenmethoden worden alle belangrijke rekenonderwerpen uit het basisonderwijs doorgaans op een systematische en beknopte manier behandeld. Begonnen wordt meestal met een of meer hoofdstukken over Getallen, daarna volgen hoofdstukken over Bewerkingen met hele getallen, over Meten, Breuken, Grafieken, enzovoorts. De opzet van deze hoofdstukken lijkt direct ontleend aan de gangbare wiskundemethoden waarbij in opeenvolgende paragrafen bijvoorbeeld de verschillende bewerkingen behandeld worden en waarbij wordt afgesloten met gemengde opgaven alsmede een reeks ‘testopgaven’ waarmee een leerling kan nagaan in hoeverre hij de leerstof beheerst. In tegenstelling tot de reken-wiskundemethoden uit het basisonderwijs zijn er bij de vo-rekenmethoden maar zeer summiere handleidingen beschikbaar. Men gaat ervan uit dat de leerlingen voor een aanzienlijk deel zelfstandig uit de rekenboeken werken en dat leraren zelf bepalen hoe ze hun instructie geven. In die rekenboeken zijn er veelal korte passages met gerichte uitleg over een bepaalde procedure of eigenschap opgenomen.

Bij de meeste methoden wordt veelal eerst theorie behandeld, waarbij in het boek zelf uitleg wordt gegeven over bijvoorbeeld omrekenen in het metriek stelsel. Daarna volgen toepassingen in de vorm van contextopgaven. Soms zijn er hoofdstukken die louter gericht zijn op ‘Praktisch rekenen’. Bij de hierboven genoemde Praktijkkernen (*Getal en Ruimte*) wordt het vertrekpunt veelal gekozen in voor de leerlingen inleefbare situaties uit het leven van alledag.

Over de wijze waarop deze lesmaterialen in de klas door leraren gebruikt worden, is niet veel bekend. Ook over de effectiviteit is nauwelijks iets bekend. Mogelijk voldoen ze goed voor leerlingen die in het basisonderwijs het hele rekenprogramma doorlopen hebben en die daarbij bevredigende resultaten geboekt hebben. Voor zulke leerlingen worden de voornaamste onderwerpen in een notendop nog eens behandeld, hetgeen er ongetwijfeld toe bijdraagt dat de rekenkennis onderhouden wordt.
Voor de leerlingen die de doelgroep van deze publicatie vormen, de zwakkere bb- en kb-leerlingen in het vmbo, voldoen deze materialen echter niet zonder meer. Bij hen is het leerproces in het basisonderwijs om wat voor reden dan ook veelal aanzienlijk minder ver gevorderd, met als gevolg dat nogal wat onderwerpen betrekkelijk nieuw zijn. Ook de basiskennis van deze leerlingen is soms aanzienlijk minder (tafels van vermenigvuldiging, optellen en aftrekken tot 100, geldrekenen). Zij hebben primair behoefte aan een type onderwijs dat gericht is op

- versterking en uitbouw van basiskennis;
- interactieve instructie waarbij de leraar didactische aanpakken en instructiewijzen hanteert die aansluiten bij het basisonderwijs;
- aanvullende begripsvorming ten aanzien van begrippen zoals breuken, procenten en verhoudingen;
- inperking van de leerstof waar het gaat om formele procedures voor bijvoorbeeld het rekenen met breuken en kommagetallen;
- verstandig leren omgaan met de rekenmachine, bewust leren kiezen voor Z (zelf rekenen) of RM (rekenmachine inzetten).

Voor leraren betekent dit in de eerste plaats dat kennis van didactische aanpakken en instructiewijzen uit het basisonderwijs van grote waarde kan zijn. Bijvoorbeeld: Hoe kun je de leerlingen leren wat 2/5 stokbrood of 3/4 pizza inhoudt? En hoe kun je het leerproces bij verhoudingen ondersteunen als het gaat om opgaven als ‘wat kost 150 gram kaas als de kiloprijs € 28,- is?’ En hoe kun je ze leren om 12% van 350 euro uit te rekenen? Verderop in deze publicatie gaan we daar nader op in.
In de tweede plaats betekent het dat het voor leraren die veel met groepen bb-leerlingen werken, aan te bevelen is om een methode niet van paragraaf tot paragraaf en van hoofdstuk tot hoofdstuk door te werken, maar om selecties uit de leerstof te maken en daarbij didactische werkwijzen uit het basisonderwijs in te zetten.
Neem bijvoorbeeld het onderwerp Breuken. In rekenboek 1 van de methode *Getal en Ruimte*, bestemd voor bb- en kb-leerlingen, wordt de breukentaal in slechts twee opgaven (zie figuur 14) behandeld. Daarna volgen meteen opgaven van het type 3/8 x 56 = .. . In Rekenboek 2 zijn er vervolgens twee paragrafen waarin het omzetten van breuken in kommagetallen (decimale getallen) wordt behandeld, alsmede het optellen van gelijknamige breuken (2/9+5/9=..).



11 Breuken 1

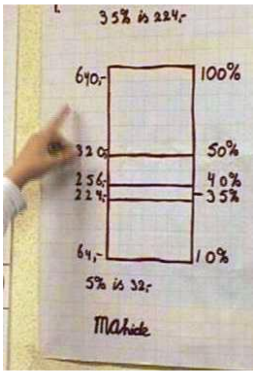
1 Kleur van de cirkel $\frac{5}{6}$ deel.
Kleur van de rechthoek $\frac{3}{5}$ deel.
Kleur van de driehoek $\frac{7}{9}$ deel.

Voorbeeld Breuken
De taart is in acht stukken verdeeld.
Drie van de acht stukken zijn gekleurd.
Voor drie van de acht schrijf je $\frac{3}{8}$.

2 Kleur van de taart $\frac{7}{12}$ deel rood.
Kleur van de taart $\frac{1}{12}$ blauw.
Welk deel van de taart is niet gekleurd?

Figuur 14. Opgave Breuken. Bron: Getal en Ruimte, Rekenboek 1 vmbo-bk. Groningen, Noordhoff.

Het lijkt aannemelijk dat dit voor leerlingen voor wie breuken een betrekkelijk nieuw fenomeen zijn, te snel gaat. Voor hen is het belangrijk om, conform de werkwijze van het basisonderwijs, eerst enige tijd met stambreuken te werken waarbij aanduidingen als ‘3 stukjes van 1/8 pizza’ gebruikt worden. Als een verkorting daarvan kan vervolgens de gangbare breukentaal geïntroduceerd worden. Een aanduiding als ‘2/3 wortel’ heeft dan betekenis voor de leerlingen als ‘2 stukjes van 1/3 wortel’. Oftewel, in handelingstermen: je snijdt de wortel in 3 gelijke stukken en neemt er daarvan 2. Door vervolgens te bespreken waar de breuken op de getallenlijn thuishoren in de vorm van een maatlijn (hoe hoog staat de melk als je 2/3 liter in de maatbeker giet?), krijgt de breuk de status van een nieuwe getallensoort.
Opgaven als 2/3 x 120 kunnen daarna verkend worden in de context ‘Kop van Jut’ waarbij de strook naar voren kan komen als een schematisch hulpmiddel om het denken van de leerlingen te ondersteunen.
Naderhand kan deze strook vervolgens ingezet worden om het denken te ondersteunen bij het leren oplossen van opgaven rond percentages, zie voorbeeld in figuur 15.



Figuur 15. Voorbeeld oplossing m.b.v. strook.

Op scholen met voornamelijk bb- en kb-leerlingen wordt men zich steeds meer bewust van deze noodzaak om selecties uit de rekenmethode te maken en daarbij didactische werkwijzen uit het basisonderwijs in te zetten. Een reden te meer om dit te doen vormt het feit dat nogal wat van de leerstof die in de vo-rekenboeken behandeld wordt, voor het bereiken van het 2F-niveau zoals dat in de rekentoets getoetst wordt, niet of nauwelijks van belang is. Het gaat daar immers om functionele rekensituaties, opgaven als 2/9+5/9=.. komen in de 2F-toets helemaal niet voor.

3.4 Globaal raamwerk voor een leerplan rekenen

Bekijken we nu het leerplan voor rekenen op een meer globaal niveau (zie figuur 16), dan lijkt het aan te bevelen om de nadruk in klas 1 en 2 qua leerstofinhouden op drie zaken te leggen:

- versterking en uitbouw van basiskennis;
- begripsvorming en functionele bewerkingen met breuken, procenten, verhoudingen en dergelijke;
- praktische meet- en meetkundeactiviteiten.

Over de eerste twee van deze punten is in het voorgaande al het nodige gezegd. Naderhand komen we daar nog op terug. Wat betreft het derde punt geldt dat zulke activiteiten gericht kunnen zijn op het meten met eenvoudige meetinstrumenten zoals meetlint, maatbeker en keukenweegschaal, en op activiteiten in het verlengde daarvan waarbij relaties tussen de gebruikte maateenheden op een rij gezet en ingeoefend worden. Dit kan voor een basis zorgen waarop naderhand het oplossen van 2F-opgaven rond het herleiden van maateenheden steeds meer beoefend kan worden. Daarnaast kunnen deze activiteiten gericht zijn op fundamentele meetkundige ervaringen zoals het werken met plattegronden en het werken met schaalafbeeldingen van objecten.

	Klas 1 en 2	**Klas 3 en 4**
Leerstofinhouden	• versterking en uitbouw basis-vaardigheden; • begripsvorming en eenvoudige bewerkingen bij breuken, procenten, kommagetallen, verhoudingen; • praktische meet- en meetkundeactiviteiten.	• onderhouden en uitbouwen kennis van breuken, procenten, kommagetallen, verhoudingen; • werken aan leren probleemoplossen, oefenen met 2F-opgaven.
Lesactiviteit / Organisatie	• combinatie van zelfstandig oefenen en korte, interactieve instructiemomenten; • groepsgerichte lessen met instructie- en verwerkingsmomenten; • circuits met nabesprekingsmomenten.	• Combinatie van zelfstandig oefenen en korte, interactieve instructiemomenten; • Groepsgerichte lessen met instructie- en verwerkingsmomenten.
Lesmaterialen	• computerprogramma's en onderdelen uit methoden; • onderdelen uit methode gecombineerd met didactische aanpakken uit basisonderwijs; • zelf meetcircuits samenstellen.	• Onderdelen uit methode; • Voorbeeldopgaven 2F (Cito, methoden).
Rooster / Toetsing	• bij voorkeur twee lesuren per week; • niveaubepaling m.b.v. LOVS-gegevens; • eventueel instaptoets en diagnostische toets eind klas 2.	• 1 lesuur per week; • Geïntegreerde rekenactiviteiten in beroepsgerichte vakken; • Eindtoets 2F.

Figuur 16. Weergave leerplan in grote lijnen.

In klas 3 en 4 kan de focus geleidelijk aan steeds meer verschuiven in de richting van het oplossen van 2F-opgaven, met daarnaast blijvende aandacht voor het onderhouden van de verworven kennis rond breuken, procenten, verhoudingen en kommagetallen. Al met al leidt dit tot een leerplan dat er in grote lijnen uitziet zoals weergegeven in figuur 16. Een dergelijk leerplan blijkt op een aantal scholen ook al op deze manier in gebruik te zijn. Interviews met de betreffende leraren laten zien dat het een heel karwei is om zo'n soort lappendeken aan inhouden en activiteiten op te zetten en dat er de nodige beleidsmatige én vakinhoudelijke kennis bij komt kijken om dit te realiseren. Zo'n leerplan komt ook niet van de ene op de andere dag tot stand, er zijn vooral in het begin regelmatig bijstellingen nodig. Maar de resultaten kunnen dan ook navenant zijn. Zo bleek dat drie scholen waarop deze aanpak gehanteerd is, tijdens de landelijke toetspilot in 2012 en 2013 betrekkelijke hoge scores haalden op de 2F-toets (bijna alle leerlingen geslaagd).

3.5 Praktijkvoorbeeld van de 'lappendekenbenadering'

De N-school is een relatief kleine, zelfstandige vmbo-school met ongeveer 400 leerlingen in een van de grote steden. Het betreft overwegend bb- en kb-leerlingen met veel verschillende nationaliteiten waarvan ongeveer 20 à 30% met een LWO-indicatie. Sinds een jaar of vier (vanaf 2009) is men bezig met het invoeren van rekenen als vakgebied. Er zijn twee rekencoördinatoren die in overleg met de overige rekenleraren (in totaal circa 10 leraren) de hoofdlijnen van het rekenbeleid hebben uitgezet, lesmaterialen hebben aangeschaft en het onderwijsprogramma samenstellen. Een flink deel van de rekenleraren in de onderbouw heeft de nodige ervaring in het basisonderwijs en is redelijk goed op de hoogte van inhouden en didactische aanpakken daarvan.
Zowel in de onderbouw als in de bovenbouw zijn er twee lesuren rekenen per week. Zwakke rekenaars krijgen in de bovenbouw in aanvulling daarop één keer per week 'steunles'. Er wordt geprobeerd om zoveel mogelijk gedifferentieerd les te geven, maar dit moet nog beter georganiseerd worden (aldus de leraren). Er is nog weinig integratie met andere vakgebieden, ook hier geldt dat men dit in de toekomst beter wil organiseren. In een gesprek op de N-school geven de beide rekencoördinatoren aan dat men het gevoel heeft op de goede weg te zitten, maar dat het ook een kwestie van vallen en opstaan is waar soms veel tijd in gaan zitten.

In de onderbouw wordt gewerkt met leskaternen die door de rekencoördinatoren zijn samengesteld. Er wordt gebruik gemaakt van lesstof uit verschillende methoden waaronder het lespakket *Verder met Rekenen* (Buys & Zwaart, van der, 2010). Het interessante van deze map is dat er voorbeeldmatig een uitwerking van drie belangrijke onderwerpen (Rekenen met geld, Procenten en Meten) voor de bb-richting van het vmbo is gemaakt, waarbij didactische werkwijzen uit het basisonderwijs worden gebruikt. In principe wordt er op niveau gewerkt. Snelle rekenaars maken een toets dus eerder dan leerlingen die meer moeite met de lesstof hebben. Er wordt ook regelmatig op de computer geoefend, gebruikmakend van de Digitrainer bij de methode *Moderne Wiskunde*.

In de bovenbouw van de school wordt ook gewerkt met zelf samengestelde katernen, met een accent op het werken aan contextopgaven zoals die in de 2F-toets veel voorkomen. Voor deze katernen wordt voornamelijk geput uit *Moderne Wiskunde* en *Nu Rekenen*.
Bij de tweede landelijke toetspilot van maart 2013 haalde de N-school een relatief hoge score: 90% van de leerlingen bleek geslaagd.

4. Werken aan basale en minder basale vaardigheden

4.1 Haperende basisvaardigheden

Veel leraren worden er van tijd tot tijd mee geconfronteerd: haperende basisvaardigheden bij hun leerlingen. Het gaat dan om situaties waarin een leerling moeite blijkt te hebben met bijvoorbeeld:

- het vlot uit het hoofd uitrekenen van elementaire optel- en aftrekopgaven tot 100 en tot 1000 (30+56, 340+85; 72-25, 810-150);
- het vlot kunnen reproduceren van de uitkomsten van basale vermenigvuldig- en deelopgaven (6x8, 4x120; 56:7, 600:4);
- het beredeneerd kunnen schatten van de uitkomst van eenvoudige geldopgaven (heb je aan een tientje genoeg om 4 molentjes van € 2,65 te betalen?)
- het gebruik van de tienregel met hele getallen en eenvoudige kommagetallen (10x65, 10x3,4; 240:10, 35:10).

Het is niet altijd even makkelijk om als leraar in dergelijke situaties adequaat te reageren. Wat doe je als een leerling een omslachtige of foutieve strategie hanteert? Laat je zulke leerlingen vooral veel extra oefenen, bijvoorbeeld op de computer? Hoe geef je instructie over dergelijke zaken? En hoe voorkom je dat leerlingen blind varen op uitkomsten op de rekenmachine? Hier ligt kortom een lastige thematiek.
Dat deze thematiek belangrijk is in verband met het toewerken naar 2F, laat zich raden. De opgaven uit de 2F-toets (figuur 17), die de leerlingen zonder rekenmachine moeten maken, zijn immers voor het overgrote deel opgaven die een direct beroep doen op basisvaardigheden.

150 – 29 + 39 = …
Een kwart van 120 is …
40% van 85 is …
5,7 + 3,6 = …

Figuur 17. Opgaven afkomstig uit de voorbeeldtoetsen 2F, Cito (2012), Cito (2013).

Voor de tweede opgave moet je bijvoorbeeld 120 vlot door 4 kunnen delen, terwijl het voor de derde opgave belangrijk is dat je 85 probleemloos door 10 kunt delen. Het is overigens juist de bewerking delen die leerlingen vaak nog de nodige problemen geeft, zo blijkt uit de ervaringen van veel leraren.

Daarnaast zijn basisvaardigheden van belang om te zorgen dat je als leerling overzicht over je berekening houdt. Als je immers voor elke eenvoudige bewerking de rekenmachine nodig hebt, is het veel lastiger om je op de totaliteit van je berekening te concentreren. Ook het niet goed kunnen schatten van een uitkomst op basis van passende afrondingen kan een handicap vormen. Dat belemmert je immers om een berekening globaal te controleren en na te gaan of een uitkomst grofweg in de buurt zit.
Zo moet een leerling bij het maken van de opgave in figuur 18 in staat zijn om een redenering te hanteren in de trant van: het nog te sparen bedrag is 270-45 dus 225 euro. Thijs verdient iets minder dan 4 euro per uur, dus de uitkomst moet iets boven de 50 uur liggen. Daarmee kan het

resultaat van op de machine uitgevoerde handelingen (270 – 45 = 225 en 225 : 3,75 = 60) direct gecontroleerd worden.

Figuur 18. Opgave 'Spelcomputer'. Bron opgave: Cito (2012).

In de volgende paragrafen gaan we nader in op dit thema van het werken aan basisvaardigheden. Er worden enkele voorbeelden van praktijksituaties beschreven waarin leerlingen laten zien wat ze af weten van basale opgaven zoals 7x6 en 72-25. In aansluiting daarop gaan we in op de vraag in hoeverre gerichte instructie voor sommige van deze leerlingen gewenst is, waarbij de mogelijkheid van 'verbindende instructie' besproken wordt. Verder gaan we in op enkele vaardigheden die niet direct tot de basisvaardigheden gerekend worden maar die toch tamelijk basaal zijn en die voor de hele rekenontwikkeling van leerlingen van belang zijn: rekenen met geld en praktisch meten.

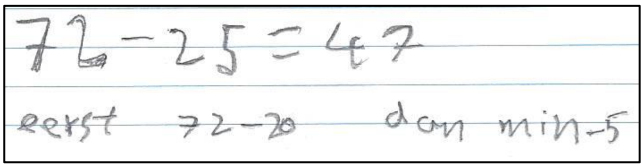
4.2 Praktijkonderzoek: Basisbewerkingen binnen het getallengebied tot 100

In de kaders worden twee observaties beschreven uit een klein praktijkonderzoek naar de stand van zaken wat betreft de beheersing van basisvaardigheden onder leerlingen uit vmbo-1. Daarbij werd geprobeerd om voorbeeldmatig te achterhalen wat leerlingen zoal weten en niet weten van elementaire opgaven uit het getallengebied tot 100: Tafels van vermenigvuldiging en Optellen en aftrekken tot 100. Het werd gehouden onder ongeveer 20 leerlingen uit de bb-richting, waarbij alles gefilmd werd om nader te kunnen analyseren.

Tafels van vermenigvuldiging: hoe reken je 7x6 uit?
Op de vraag van de leraar wie 7x6 vlot kan uitrekenen, steken drie leerlingen hun vinger op; de andere vijf wachten af, zij lijken het antwoord niet te weten of snel te kunnen achterhalen.
Tim: '7x6 is 42 (leraar: hoe wist je dat?) Nou, want 5x6 is 30, en dan 2x6 erbij is 12, en 30+12 is 42' (leraar noteert deze oplossingswijze op het bord).
Ruben: 'Ik gebruik een andere manier: 7x6 vind ik moeilijk om te onthouden, maar ik weet wel dat 7x7 49 is; en dan 7 eraf is 42' (leraar noteert dit weer op het bord).
Sacha: 'Ik doe het nog anders. Ik weet dat 6x6 36 is; en dan nog een keer 6 erbij, heb je ook 42.'
Twee andere leerlingen geven een blijk van herkenning in de zin dat ze dit soort strategieën ook wel gebruiken. Maar voor de overige drie lijkt dit nauwelijks te gelden; zij weten de uitkomst niet en hebben weinig idee hoe je deze op een efficiënte manier kunt achterhalen.

Aftrekken tot 100: hoe reken je 72-25 uit?
Bij deze opgave krijgen de leerlingen een kladblaadje om een eventuele berekening te noteren. Na enige tijd worden de resultaten daarvan besproken.
Boris: 'Ik snap hem niet goed… Ik heb eerst 70-20 gedaan, dat was 50. Maar toen wist ik het niet meer.'
Leraar: 'Is er iemand die ook eerst 70-20 heeft gedaan? Misschien kan die Boris verder helpen.'
Orwin: 'Ik. Daarna heb ik 7-50 gedaan, is 43. Oh nee, laat maar, niet goed (leraar: Hoe zo?) Ik had die 2 en 5 opgeteld, maar dat klopt niet. (leraar: waarom klopt het niet?) Nou, misschien klopt het wel…'
Sacha: 'Ik heb het onder elkaar gedaan. Toen deed ik 2-5 dat is 3; en 7-2 is 5; kom ik op 53 uit.'
Leraar: 'Oké, nu hebben we al twee antwoorden…'
Tim: 'Ik doe eerst 72-20, dat is 52. En dan nog die 5 eraf, is 47.'
Leraar: En hoe doe je dat, die 5 eraf?
Tim: Op m'n vingers.
(In het vervolg blijkt uiteindelijk 47 het juiste antwoord terwijl de manier van Tim als een 'veilige manier' wordt aangemerkt.)

Enkele aspecten uit deze fragmenten springen in het oog. In de eerste plaats is er de grote mate van onzekerheid die het handelen van nogal wat leerlingen kenmerkt. Vooral bij de aftrekopgave komt dit naar voren: leerlingen hebben vaak wel een oplossingsstrategie, maar tegelijkertijd hebben ze weinig idee of deze correct is. Verder doen zich grote verschillen voor. Er zijn leerlingen die een opgave als 72-25 redelijk vlot en goed weten uit te rekenen (zie figuur 19), er zijn ook leerlingen die weinig idee hebben hoe dat kan. Hetzelfde geldt voor tafelopgaven zoals 7x6.



Figuur 19. Oplossing van opgave 72-25.

In de derde plaats lijkt het op z'n minst voor een deel van de leerlingen wenselijk om gerichte instructie over dergelijke basale leerstof te krijgen. Als je immers omslachtige of onjuiste strategieën gebruikt (of als je helemaal geen strategie ter beschikking hebt), dan heeft zelfstandig oefenen op de computer of uit een rekenboek niet veel zin. Daarbij lijkt het wenselijk om tot op zekere hoogte aan te sluiten bij wat de leerlingen al weten (of denken te weten), ze zijn met deze leerstof immers in het basisonderwijs al geruime tijd bezig geweest. Kortom, het is aan te bevelen om interactieve instructie te geven waarbij de leraar mede op basis van wat de leerlingen al weten en kunnen, bespreekt hoe je dergelijke opgaven efficiënt kunt oplossen.

4.3 De mogelijkheden van verbindende instructie

Een leraar kan zulke instructie gestalte geven door 'verbindingen' te leggen. Het gaat daarbij grofweg om drie soorten verbindingen die ervoor kunnen zorgen dat leerlingen beter greep op de opgaven in kwestie krijgen:

- Verbinden van (kale) opgaven met de alledaagse realiteit.
- Verbinden van zulke opgaven met schema's en modellen die het oplossingsproces kunnen ondersteunen.
- Verbinden van zulke opgaven met efficiënte, algemeen bruikbare oplossingsstrategieën.

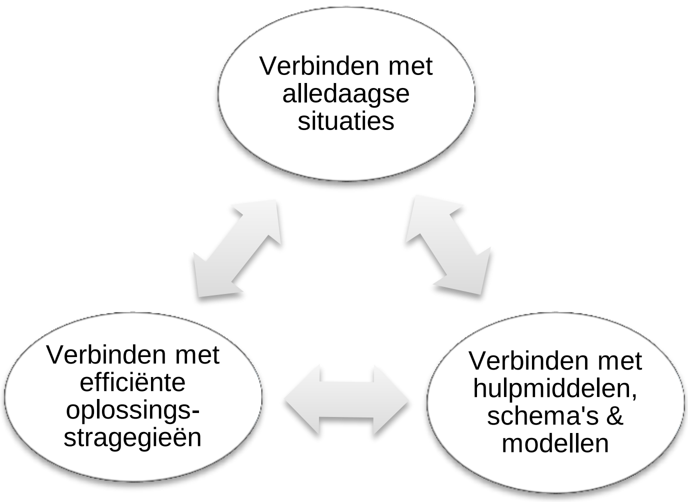
Deze drie verbindingen worden in deze paragraaf nader uitgewerkt, toegespitst op de leerstofgebieden uit de vorige paragraaf: Optellen en aftrekken tot 100 en Tafels van vermenigvuldiging.

Verbinden met de alledaagse realiteit
Voor deze aanpak geldt dat leerlingen soms door het vele oefenen met kale opgaven de relatie van deze opgaven met de alledaagse realiteit uit het oog verloren zijn. Ze zijn zich niet goed meer bewust dat een opgave als 72-25 kan staan voor een situatie als:

- Je hebt 72 euro in je portemonnee en koopt iets van 25 euro.
- Er zijn 72 zakken chips in voorraad, daarvan worden er 25 verkocht.
- Je bent bezig een afstand van 72 km te fietsen en je hebt al 25 km gefietst.

Niet alleen kan een instructie rond deze verbinding helpen om je iets bij zo'n opgave voor te stellen, maar ook kan het helpen om efficiënt tot een oplossing te komen, bijvoorbeeld door eerst 20 euro weg te halen en daarna nog 5 euro; of door aan te vullen van 25 km naar 72 km. Bovendien kan deze verbinding helpen om beter greep op een dubieuze of onjuiste strategie te krijgen. Zo kan de onjuistheid van de strategie van het 'verkeerd splitsen' uit de vorige paragraaf (de strategie waarbij een leerling redeneert: 70-20 is 50; 5-2 is 3; antwoord dus 53) 'ontmaskerd' worden door de opgave te verbinden met een concrete situatie zoals: je hebt 72 euro in je portemonnee en je moet er 25 betalen. Door eerst 20 euro te betalen (cq. weg te halen uit de portemonnee) en daarna nog 5, kan onderbouwd worden dat de 5 euro van de resterende 52 afgehaald moet worden.
Op een vergelijkbare manier kan een opgave als 7x6 of 8x7 verbonden worden met een concrete situatie zoals '7 cd's van 6 euro' of '8 rijen van 7 parkeerplaatsen'.

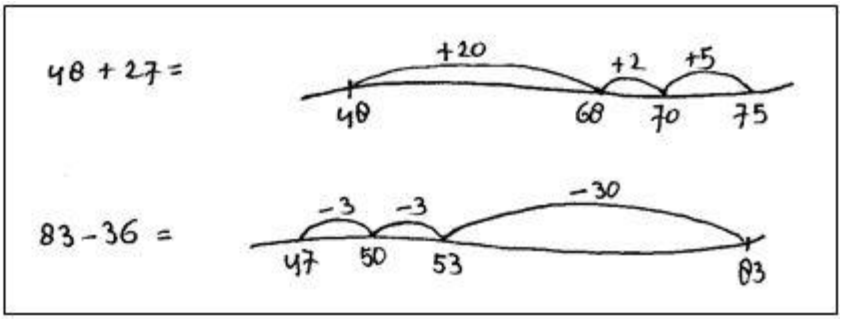
Verbinden met modellen en efficiënte strategieën
Bovenstaande laat al zien dat het verbinden met de alledaagse realiteit samenhangt met dat van het verbinden met efficiënte strategieën. Dat geldt ook voor het verbinden met modellen en schema's, zie figuur 20. Verderop wordt deze samenhang voor de beide besproken leerstofdomeinen nog wat verder uitgewerkt.



Figuur 20: Verbindingen.

Optellen en aftrekken tot 100

In het basisonderwijs wordt voor dit leerstofgebied de rijgaanpak gewoonlijk als ‘veilige basisstrategie’ aangeleerd. Deze aanpak komt erop neer dat het eerste getal in een opgave als geheel wordt opgevat terwijl het tweede getal er in (decimale) gedeeltes wordt bijgedaan of afgehaald. Veelal wordt deze rijgaanpak onderbouwd met een kralensnoer met 100 kralen en met de daarvan afgeleide lege getallenlijn. De optelling of aftrekking wordt op deze lege getallenlijn als een serie sprongen voorgesteld. Bij optellen wordt het begingetal gewoonlijk aan de linkerkant genoteerd, terwijl de sprongen naar rechts gaan; bij aftrekken wordt rechts begonnen terwijl de sprongen naar links gaan, zie figuur 21.



Figuur 21. Sprongen op getallenlijn – optellen en aftrekken.

Uiteindelijk leren de leerlingen om dergelijke opgaven direct uit het hoofd uit te rekenen. Maar in de aanloop daar naar toe worden de verschillende stappen eerst enige tijd regelgewijs in rekentaal genoteerd, zie figuur 22.

48 + 27 =	48 + 20 = 68	83 - 36 =	83 - 30 = 53
	68 + 2 = 70		53 - 3 = 50
	70 + 5 = 75		50 - 3 = 47

Figuur 22. Optellen en aftrekken in stappen.

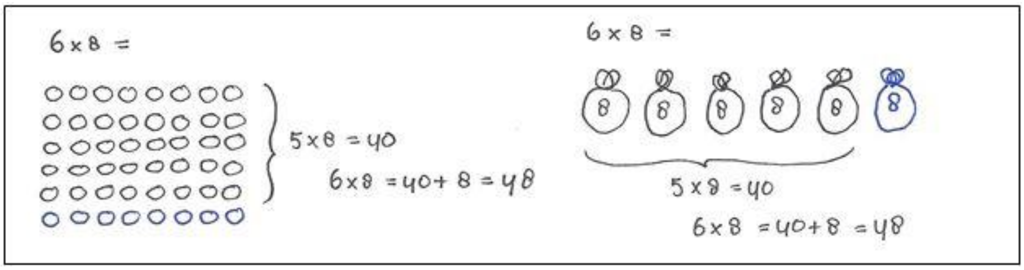
Het is bij ondersteunende activiteiten met vmbo-leerlingen uiteraard niet de bedoeling om deze didactische aanpak van het basisonderwijs in z’n geheel over te doen. Maar wel kan het, in aansluiting op wat u uw leerlingen ziet doen, de moeite waard zijn om de rijgaanpak nog eens gericht aan de orde te stellen.
Naast de rijgaanpak wordt in het basisonderwijs gewoonlijk ook de splitsaanpak aan de orde gesteld. Bij deze aanpak worden beide getallen decimaal gesplitst en bij elkaar gedaan of van elkaar afgehaald. Veel leerlingen gebruiken deze strategie vooral bij optellen (48+27 via 40+20=60; 8+7=15; 60+15=75). Bij aftrekken worden, zoals hierboven al is besproken, met deze aanpak echter regelmatig fouten gemaakt doordat een leerling altijd ‘klein van groot' afhaalt (83-36 via: 80-30=30; 3-6 kan niet, dus dan maar 6-3=3; 30+3=33). In dit geval verdient de rijgaanpak in combinatie met de verbinding met de alledaagse werkelijkheid de voorkeur.

Tafels van vermenigvuldiging

Het grote probleem met niet-geautomatiseerde kennis van de tafels is vaak dat het voor de leerlingen een kwestie is van ‘je weet het of je weet het niet’. En als de leerling de uitkomst van een opgave als 6x8 niet weet, kan hij die hoogstens achterhalen door de hele tafelrij op te zeggen: 8 (1x), 16 (2x), 24 (3x), … Dat is bij veel opgaven een lange, omslachtige manier om een uitkomst te achterhalen. Daarom worden in het basisonderwijs gewoonlijk een beperkt aantal verkorte strategieën behandeld om de leerlingen efficiënter tot automatisering te brengen. De belangrijkste daarvan zijn:

- verdubbelen: 4x8 uitrekenen via: 2x8 is 16; 16 en 16 is 32;
- gebruik van 5x als steunpunt: 6x8 uitrekenen via 5x8 is 40 (makkelijke som, 5x8 is immers evenveel als 8x5 en dat is 40); 6x8 is 8 erbij, dus 48;
- gebruik van 10x als steunpunt: 9x6 uitrekenen via 10x6 is 60, 9x6 is 6 minder dus 54.

Belangrijk is om begripsmatige ondersteuning te bieden bij het aanreiken van zulke verkorte strategieën. In het basisonderwijs worden daarvoor gewoonlijk verschillende modellen gebruikt: het groepjesmodel (waarbij 6x8 wordt voorgesteld als 6 groepjes van 8) en het rechthoekmodel (waarbij 6x8 wordt voorgesteld als 6 rijen van 8). (Zie figuur 23).



Figuur 23: Het groepjesmodel.

In het vmbo kunnen deze verkorte strategieën ondersteund met schematische voorstellingen en modellen opgefrist worden om de leerlingen tot verdere automatisering te laten komen.

4.4 Praktijkonderzoek: Elementair rekenen met geld en praktisch meten

De term basisvaardigheden wordt in het basisonderwijs vooral gebruikt om te verwijzen naar het feit dat het om vaardigheden gaat die de basis vormen van de hele verdere rekenontwikkeling. In die zin zijn deze vaardigheden van doorslaggevend belang voor leerlingen om verder te komen, ook richting 2F. Hierboven werd een viertal van deze vaardigheden genoemd, namelijk:

1. elementaire optel- en aftrekopgaven tot 100 en tot 1000;
2. vermenigvuldig- en deelopgaven uit het gebied van de tafels en uitbreidingen daarvan tot 1000;
3. beredeneerd schatten van uitkomsten;
4. gebruik van de tienregel.

Naast deze vaardigheden zijn er ook nog vaardigheden die weliswaar niet tot de basisvaardigheden gerekend worden, maar die toch tamelijk basaal zijn, zeker met het oog op het bereiken van 2F. Dit betreft in ieder geval:

- elementair rekenen met geld;
- praktische meetvaardigheid.

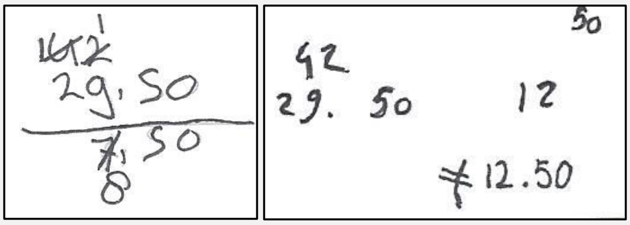
Wat betreft het eerste gebied geldt dat een goede kennis van ons geldsysteem onontbeerlijk is als basiskennis voor het kunnen oplossen van 2F-opgaven. Hierbij gaat het bijvoorbeeld om het doorzien van de structuur van dat systeem, elementaire betaalopgaven en om de relatie met kommagetallen.
Voor wat betreft praktische meetvaardigheid geldt dat deze vaardigheid als de basis beschouwd moet worden van een goede kennis van ons maatstelsel. Als je als leerling immers niet goed thuis bent in het praktisch meten, is het lastig om je iets voor te stellen bij maateenheden als centimeter, milliliter en gram en om een goede kennis op te bouwen van elementaire relaties tussen deze eenheden. Bovendien is vaardigheid in het praktisch meten belangrijk in verband met het functioneren in onze maatschappij en met het oog op beroepsvoorbereiding.
Hoe staat het er nu voor met de kennis van leerlingen rond deze vaardigheden? Om hier meer over aan de weet te komen, werd op drie scholen een klein onderzoek uitgevoerd onder

groepen leerlingen uit vmbo-1 en -2. Zij werden in groepjes van twee of drie geïnterviewd over hun kennis van ons geldsysteem en van het praktisch meten. In de kaders twee fragmenten uit dit onderzoekje die als typerend voor de stand van zaken beschouwd kunnen worden.

Rekenen met geld: gymschoenenopgave

Figuur 24. De gymschoenenopgave.

Remco en Vera (vmbo-1) nemen ruim de tijd om tot een oplossing te komen. Vera gebruikt de cijferstrategie en noteert haar berekening op het kladblaadje, (figuur 25, links). Ze komt tot € 8,50 als uitkomst. Deze uitkomst lijkt haar bij nader inzien dubieus. Ze pakt haar mobieltje erbij, toetst de aftrekking correct in en komt tot het juiste antwoord van € 12,50. Remco heeft voor zichzelf eerst naast elkaar 42-29,50 genoteerd. Vervolgens probeert hij 'van 29,50 euro 42 euro te maken' (zoals hij het formuleert), en komt op € 23,50 als antwoord uit. 'Maar het is niet goed, denk ik, er is iets misgegaan'.



Figuur 25. Oplossingen gymschoenenopgave.

Ilse en Patricia (vmbo-1) gebruiken beiden een hoofdrekenstrategie. Ilse gaat uit van 29,50 en doet er eerst 50 cent bij 'om er 30 van te maken'; ze noteert dit als tussenstap, (figuur 25, rechts). Vervolgens stelt ze vast dat er nog 12 bij moet om bij 42 te komen (noteert dit ook) en besluit dat de uitkomst € 12,50 moet zijn. Patricia volgt eveneens deze aanvulstrategie. Zij redeneert: 50 cent erbij is 30 euro; dan doe ik 42-30 is 12 euro; daar moet die 50 cent dan nog vanaf, dus dat wordt € 11,50. Controle op de rekenmachine leert dat 12,50 de juiste uitkomst is. Patricia: 'Het moet ergens fout zijn gegaan'.

Praktisch meten en meten op papier: de balkopgave

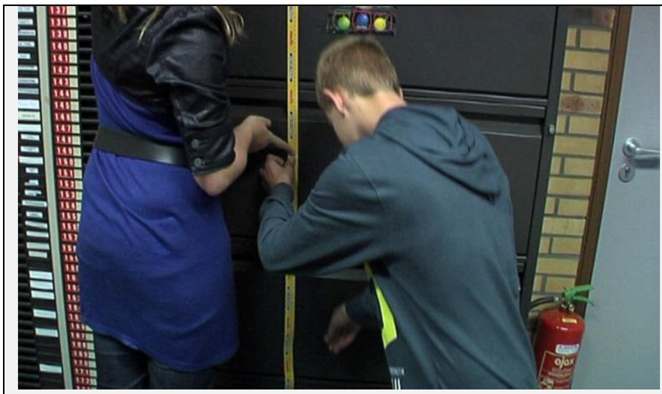
Figuur 26. De balkopgave.

Het opmeten van twee houten latten gaat Amber en Chaima (vmbo-2) goed af. Chaima neemt de lange lat voor haar rekening en laat zien hoe ze dat aanpakt: eerst het hele meetlint langs de lat houden, beginnend bij 0 (100 cm); daarna de vinger bij het punt leggen waar ze gebleven was, en het resterende stukje opmeten (11 cm. (Zie figuur 27).

Figuur 27.

In totaal 111 cm, aldus Chaima. Hoe je dit met meters schrijft, is haar en Amber niet duidelijk. Ook het opmeten van de hoogte van een kast doen ze samen en gaan ze op dezelfde manier te werk. Ze komen tot 207 cm: Amber noteert dit abusievelijk als 2,7 m.
Bij de balkopgave (zie figuur 26) houdt Chaima het eerst op 3 mm. Amber: 'Nee, dan wordt het juist kleiner, het moet meer zijn'. Dan vragen ze zich af hoeveel mm er in 1 cm zitten. Dit blijkt niet goed bekend, maar na raadplegen van het meetlint stellen ze vast dat dit er 10 zijn. Amber: '6 centimeter is dan 60 millimeter; en dan nog die halve centimeter. Dat is…, 70 millimeter, denk ik.

Rick en Tess (vmbo-2) komen goed uit het opmeten van de latten. Tess meldt bij de korte lat: 'Gewoon nul bij het begin en dan is het 81 cm'. Rick heeft de lat rechtop gezet en demonstreert hoe hij meet via afpassen van 1 m. Hij vergeet echter het loze stukje aan het begin van het meetlint. Tess schat de hoogte van de kast op 50 cm. Rick meldt: ongeveer 1,90 m, want de deur is ongeveer 2 m en er zit ongeveer 10 cm tussen. Hij begint de meting nu aan de onderkant, waarna Tess met haar eigen meetlint doorgaat naar boven, zie figuur 28. Ze komen uiteindelijk op 2 meter en 4 centimeter, en noteren dit ook als zodanig.



Figuur 28.

Bij de balkopgave loopt Tess al gauw vast, ze komt er niet uit. Rick kan met deze opgave wel uit de voeten. Hij redeneert: 1 cm is 10 mm, dus 6 cm is 60 mm; dan nog die halve cm is 5 mm; bij elkaar 65 mm. Tess laat zich hier graag op sleeptouw nemen, ze neemt zonder meer aan dat dit de goede oplossing is.

Bij de geldopgave werden er globaal twee typen rekenstrategieën gebruikt: via de cijferprocedure of via een hoofdrekenstrategie, waarbij de rekenmachine hoofdzakelijk ter controle werd ingezet. Een deel van de leerlingen blijkt de cijferprocedure niet goed te beheersen. Bij de tweede strategie viel op dat veel leerlingen de aanvulstrategie gebruikten, maar daarbij soms fouten maakten. Met name degenen die geen hulpnotaties gebruikten, leken het spoor van hun eigen redenering soms kwijt te raken.

Wat betreft het meten viel op dat de leerlingen over het algemeen niet veel problemen met het praktisch meten hadden; ze leken de principes waarop dit berust, goed te doorzien. Maar de kennis van elementaire relaties tussen maateenheden (hoeveel mm in 1 cm, hoeveel dl in 1 l, hoeveel g in 1 kg) bleek vaak wankel en onvolledig. Leerlingen leken zich niet bewust van het feit dat je dergelijke relaties als het ware aan de gebruikte meetinstrumenten kunt aflezen. Verder viel op dat het gebruik van dergelijke maatrelaties in ‘papieren’ meetopgaven (hoeveel mm dik is een balk van 6 1/2 cm) veel problemen gaf. Al met al lijkt het aan te bevelen om ook rond de vaardigheden die hier in het geding zijn, instructieactiviteiten in het programma op te nemen.

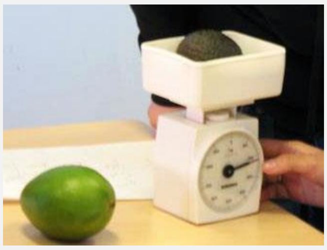
4.5 Ruimte voor basale vaardigheden in het lesprogramma

Hoe intensief dient er in de rekenlessen aandacht aan de hierboven besproken (en eventuele andere) vaardigheden besteed te worden? Dat hangt in de eerste plaats natuurlijk af van de leerlingenpopulatie op een school. Zijn er betrekkelijk weinig leerlingen met een laag vaardigheidsniveau, dan ligt het voor de hand voor een opzet te kiezen waarin het versterken van de basisvaardigheden zoals besproken in paragraaf 4.2 niet veel nadruk krijgt. Daarnaast kunnen de leerlingen voor wie dat nodig is, gerichte ondersteuning in kleine groepen krijgen in de trant zoals hierboven is beschreven.
Op een groot aantal scholen is het aantal leerlingen met haperende basisvaardigheden echter aanzienlijk. In dat geval verdient het aanbeveling om hier in de rekenlessen systematisch aandacht aan te schenken. En dan niet zozeer in de vorm van complete lessen, maar meer via korte, interactieve oefenmomenten waarmee de rekenles begint. In het raamwerk van het vorige hoofdstuk is dit ook als zodanig aangegeven. Dat kan bijvoorbeeld door één keer per week een kwartier aandacht te besteden aan de basisvaardigheden rond het getallengebied tot 1000 (genoemd in de punten (1) t/m (4) in paragraaf 4.4), waarbij de nadruk kan liggen op interactieve, verbindende instructie zoals die beschreven is in paragraaf 4.2. Ook het rekenen met geld kan op deze manier aan de orde komen. Daarnaast kan van tijd tot tijd een activiteit

rond praktisch meten plaatsvinden waarbij hetzij klassikaal, hetzij in kleine groepjes gewerkt wordt aan het meten van allerlei objecten met eenvoudige instrumenten zoals een meetlint (rolmaat, duimstok, centimeter, …), een maatbeker en een keukenweegschaal. Een aantal voorbeelden van zulke activiteiten is te vinden in het lesprogramma *Verder met rekenen*.
Het meest effectief zijn zulke activiteiten, zo heeft de ervaring geleerd, als er binnen de les een directe relatie is met wat vlak daarna aan de orde wordt gesteld. Gaat het bijvoorbeeld in de rest van de les om procentenopgaven waarbij delen door 10 en door 100 een belangrijke onderliggende vaardigheid is, dan is het de moeite waard om dat delen door 10 en door 100 voorafgaand daaraan in een korte interactieve oefenactiviteit aan de orde te stellen. En gaat het in de rest van de les om meetopgaven waarbij het herleiden van maateenheden aan bod komt (zoals in het geval van de balkopgave), dan is het interessant om direct voorafgaand daaraan het meten met een meetlint nog even te laten beoefenen en daarbij de relaties tussen bijvoorbeeld mm, cm en m nog eens te expliciteren.

Tot besluit van dit hoofdstuk geven we een praktijkvoorbeeld van een geïntegreerde lesactiviteit, afkomstig uit het genoemde lespakket *Verder met Rekenen*. De betreffende les begint met een korte oefenactiviteit rond het schatten en wegen van verschillende soorten fruit. Daarna volgt een activiteit rond prijs-gewicht-verhoudingen (wat betaal je voor 150 gram kaas als de kiloprijs € 12,- is?). Hieronder volgt een impressie van deze les, gegeven op een Amsterdamse vmbo-school.

Even oefenen: hoe zwaar weegt het? (10 minuten)
Voor de klas staat een keukenweegschaal met een aantal vruchten en een pak zout erbij. Eerst wordt gezamenlijk bekeken wat er op de schaalverdeling van de weegschaal is te zien, waarbij de streepjes van 100 gram en de kilogramaanduiding ter sprake komen. Vervolgens mogen enkele leerlingen op de hand schatten hoe zwaar de mango is. De schattingen variëren van 400 tot 600 gram. Daarna mag een leerling het echte gewicht bepalen, en dit leidt tot de vaststelling dat de mango 480 gram weegt. Het goed aflezen van een dergelijke schaalverdeling blijkt overigens nog niet zo eenvoudig. De wijzer staat iets voorbij de 400, maar hoe ver is dat nu? (Figuur 29).

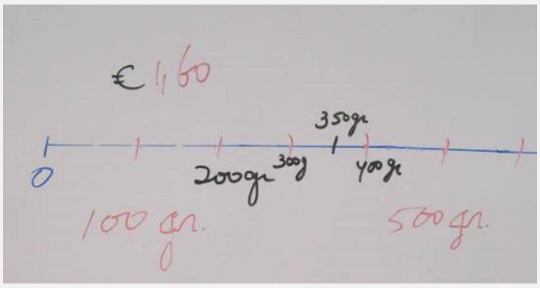


Figuur 29. Aflezen weegschaal.

Pas nadat bepaald is dat het nog voorbij het streepje midden tussen 400 en 500 is, komt vast te staan dat het ongeveer 480 gram is. Aansluitend wordt hetzelfde gedaan voor een avocado (figuur 30) (210 gram; schattingen tussen 150 en 350 gram), en voor het pak zout (velen houden het op 600 tot 700 gram, maar het blijkt 1 kg en 40 gram te zijn).
Bij dit laatste wordt nog vastgesteld dat de verpakking ook wat weegt en dat 1 kg en 40 gram dus wel klopt.

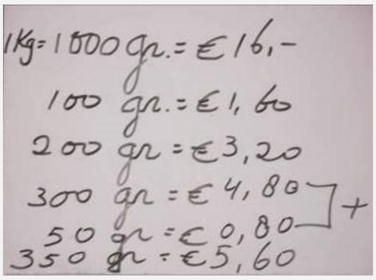
Figuur 30. Op de hand schatten van een avocado.

Prijs-gewicht verhoudingen: hoeveel kost 150 gram kaas? (30 minuten)
In aansluiting op de weegactiviteit brengt de leraar de voorafgaande les in herinnering. Daarbij was sprake van een probleem waarbij de prijs van 350 gram noten berekend moest worden bij een kiloprijs van 16 euro. Zij tekent een 'maatlijn' (getallenlijn) (figuur 31) op het bord van 0 tot 1000 gram, en stelt samen met de leerlingen nog eens vast waar 350 gram op die getallenlijn zit, en dat je dit kunt zien als 100+100+100+50 gram.



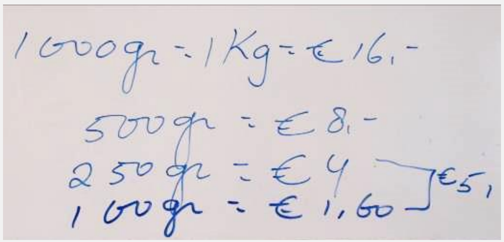
Figuur 31. Getallenlijn.

Vervolgens wordt vastgesteld dat de prijs van 100 gram al was bepaald: €1,60. Hoe kon je nu de prijs van 350 gram achterhalen? Gezamenlijk wordt dit met de klas opgebouwd: eerst 200 gram, dan 300, en dan nog 50 gram erbij. (Figuur 32).



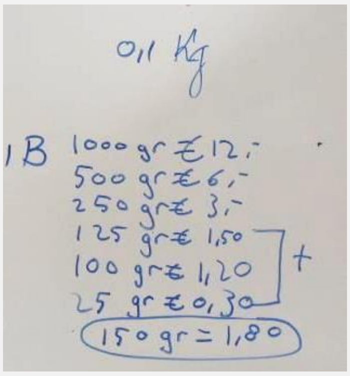
Figuur 32. Oplossing klas.

Zo wordt uiteindelijk de precieze prijs bepaald: € 5,60. Er blijkt ook nog een alternatieve aanpak. Yasmin meldt dat ze op haar kladblaadje (figuur 33) eerst de helft en daar weer de helft van 1000 gram had bepaald, dus 250 gram; dat is dan is 4 euro. En dan nog eens 100 gram via delen door 10, dat is €1,60. Ten slotte moet je 250 gram en 100 gram nog optellen, aldus Yasmin.



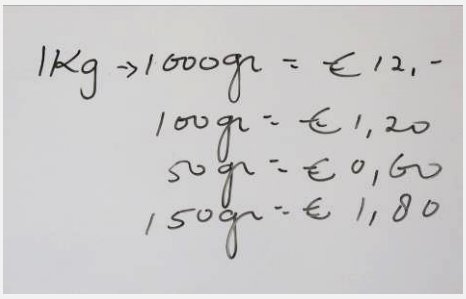
Figuur 33. Oplossing Yasmin.

Na deze instructie gaat iedereen aan de slag met een opgave waarbij de prijs van respectievelijk 150 gram en 450 gram kaas bepaald moet worden. Verreweg de meeste leerlingen blijken redelijk goed uit de voeten te komen, waarbij ze als een soort basisstrategie via 100 gram redeneren.
Tijdens het laatste deel van de verwerking heeft de leraar één leerling (Halil) gevraagd om zijn berekening bij de eerste opgave alvast op het bord te zetten. Bij de afsluitende nabespreking verduidelijkt Halil wat hij heeft gedaan: eerst 500 gram uitgerekend, toen verder naar 250 gram en 125 gram; maar dit leidde niet meteen tot een oplossing. Daarom had hij vervolgens eerst 100 gram bepaald en 25 gram, om ten slotte de prijs van 125 en 25 gram samen te nemen. Zie figuur 34. Men is het erover eens dat dit een goede strategie is, maar wel omslachtig!



Figuur 34. Oplossing Halil.

Anderen hebben het eenvoudiger gedaan. Rajae licht toe hoe ze eerst 100 gram heeft uitgerekend (delen door 10, dus komma één plaats naar links), dat is €1,20. En dan 50 gram, is de helft dus 60 cent; en ten slotte nog die €1,20 en €0,60 bij elkaar optellen, €1,80. Iedereen is het erover eens dat dit een makkelijkere manier is. Zie figuur 35.



Figuur 35. Oplossing Rajae.

5. Twee voorbeelden van doorlopende leerlijnen

5.1 Het lastige van het werken aan doorlopende leerlijnen

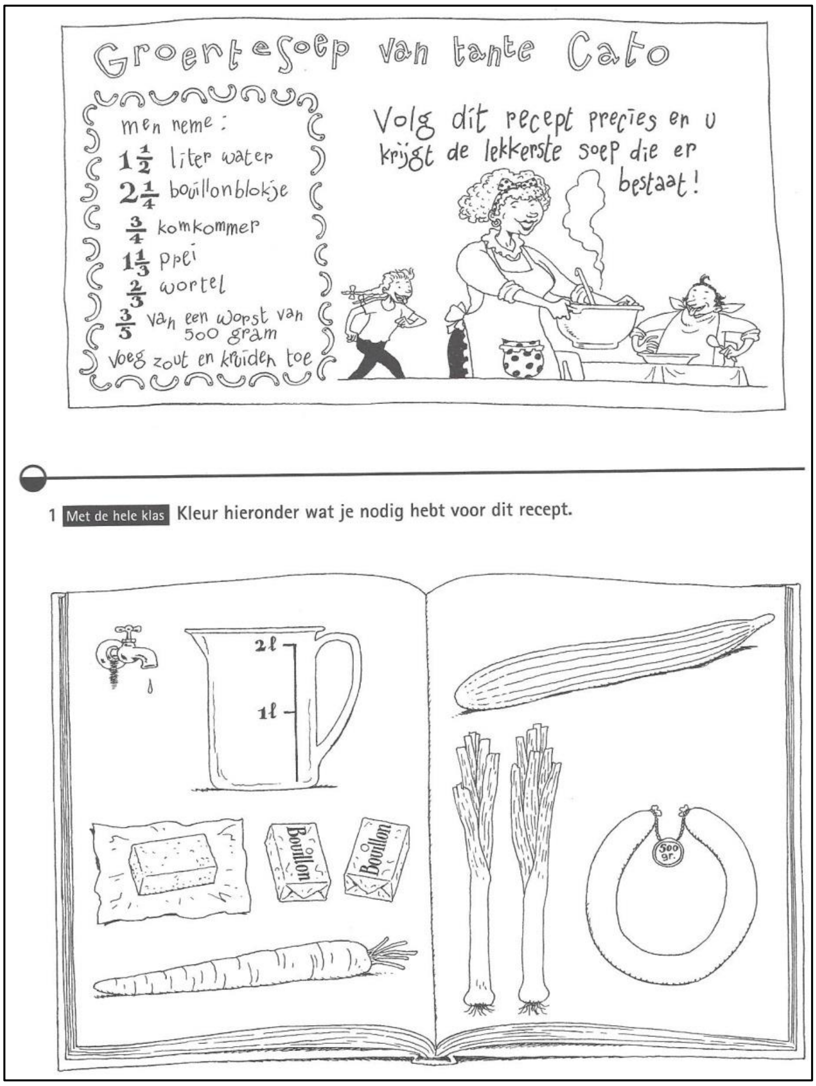
Een belangrijk doel van de invoering van het referentiekader is gelegen in de wens om doorlopende leerlijnen voor de leerlingen te realiseren. Voor het vmbo houdt dit in dat in het onderwijs voortgeborduurd dient te worden op wat de leerlingen in het basisonderwijs aan rekenkennis hebben verworven en dat ze het leerproces als een natuurlijke voortzetting daarvan kunnen ervaren. Een lastig punt daarbij is dat het, zeker voor leerlingen in de bb-richting, om leerprocessen gaat die in het basisonderwijs veelal verre van afgerond zijn en die in het vmbo voor een deel alsnog doorlopen dienen te worden. Dit geldt met name voor belangrijke onderwerpen uit groep 6 tot en met 8 zoals breuken, kommagetallen, procenten en meten. Een deel van de leerlingen is aan deze leerstof maar beperkt toegekomen. Juist voor zulke onderwerpen is het dan ook belangrijk dat er doorlopende leerlijnen gerealiseerd worden, inclusief regelmatige instructiemomenten rond centrale begrippen, strategieën en regels.
Een tweede lastig punt betreft het feit dat de eigen rekenkennis van leerling tot leerling kan verschillen. Dat maakt het moeilijk om een geschikt startpunt voor het onderwijs te kiezen. In hoofdstuk 3 is al beschreven hoe aan deze verschillen enigszins tegemoet gekomen kan worden door vooral in het begin af en toe lesactiviteiten uit te voeren onder het motto ‘laten zien wat je kunt’. Maar hoe realiseer je als leraar en als team nu bijvoorbeeld een doorlopende leerlijn op het gebied van breuken? En hoe houd je rekening met de verschillen tussen leerlingen? Het lijkt in ieder geval wenselijk om aansluiting te zoeken bij de wijze waarop zulke onderwerpen in het basisonderwijs behandeld worden, de leerlingen hebben daar immers veelal al de nodige ervaring mee. Grondige kennis van de voornaamste leerlijnen uit groep 6, 7 en 8 kan voor rekenleraren dan ook nuttig zijn. Daarnaast is het van belang goed voor ogen te hebben waar het heen moet, dat wil zeggen wat er op 2F-niveau aan kennis van de leerlingen gevraagd wordt.

Als voorbeeld nemen we het leerstofgebied van de breuken. Duidelijk is in ieder geval dat de leerlingen voor het bereiken van het 2F-niveau geen kennis van formele rekenprocedures met breuken hoeven te hebben. Het gaat bij 2F immers om functionele rekenkennis, en leerlingen hoeven niet in staat te zijn opgaven als 3/5 - 1/4 of 1 2/3 x 5/6 uit te rekenen. Wat is dan wel van belang voor 2F? Grofweg kunnen vijf doelen, opklimmend in moeilijkheidsgraad, onderscheiden worden:

1. begrip van de breukentaal, begrijpen wat met een aanduiding als 3/5 stokbrood of 2/3 liter bedoeld wordt;
2. eenvoudige benoemde breuken kunnen vergelijken, ordenen en op de getallenlijn plaatsen (wat is meer: 1/2 pizza of 2/3 pizza?);
3. de breuk als operator kunnen hanteren: 2/3 deel van 12 liter is ..;
4. Inzicht in de samenhang van breuken met eenvoudige kommagetallen, percentages en verhoudingen (3/5 deel is ..%);
5. eenvoudige bewerkingen met breuken kunnen uitvoeren in functionele situaties.

Gezien deze leerdoelen kan een doorlopende leerlijn breuken voor het vmbo inhouden dat in ieder geval aandacht wordt besteed aan ‘aanvullende begripsvorming’ rond de punten (1) en (2). Als een leerling immers niet goed snapt wat bijvoorbeeld bedoeld wordt met 3/5 stokbrood, of niet kan beredeneren dat 2/3 pizza meer dan 1/2 pizza is, dan houdt de rest ook op. In de

voornaamste in het vmbo gebruikte rekenmethoden wordt hier ook wel aandacht aan besteed, maar vaak is dat summier. Het lijkt aan te bevelen om de leerlingen aanvullende ervaringen met het in gelijke delen verdelen van (getekende) objecten zoals stokbroden en pizza's te laten opdoen, met het benoemen van de ontstane delen in termen van breuken, en met het (informeel) vergelijken van breuken.
Zoals in de Handleiding bij De Breukenbode (Bokhove, et al., 1996) (figuur 36) beschreven wordt, kan de breuk daarbij nader betekenis voor de leerlingen krijgen als een 'handelingssignaal', waarbij '3/5 worst' inhoudt: je verdeelt de worst in 5 gelijke delen, en neemt er daarvan 3. Het vergelijken en op de getallenlijn plaatsen van breuken kan vanuit deze context van 'breuken in de keuken' ook nader onderzocht worden. Wat is bijvoorbeeld meer, 1/2 wortel of 2/3 wortel? En 3/4 wortel of 3/5 wortel? De maatbeker geeft een concrete betekenis aan het op de getallenlijn plaatsen: hoe hoog komt de melk als je 2/3 liter inschenkt? Later kan deze maatbeker ook als 'denksteun' gebruikt worden om de samenhang van eenvoudige breuken en kommagetallen te onderzoeken.



Figuur 36. Opgave uit De Breukenbode. Bokhove, et al. (1996)

Aldus kan voor de begripsvormende fase een soort aanvulling plaatsvinden waardoor leerlingen beter greep krijgen op de breukentaal. De vraag is dan nog wel hoe het verder moet gaan. Of, algemener: Hoe kan de globale structuur van zulke doorgaande leerlijnen eruit zien?

5.2 Globale structuur van doorlopende leerlijnen

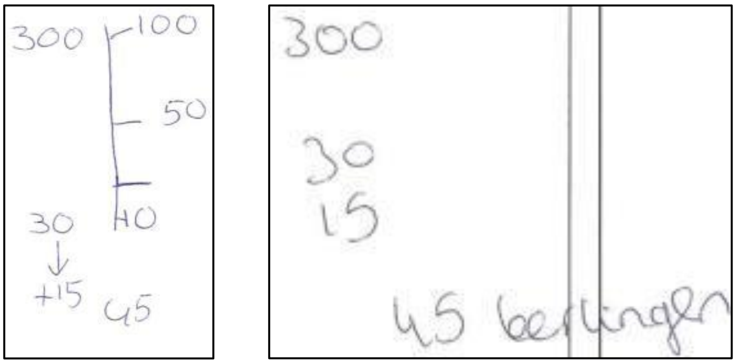
Hoe kunnen leerlijnen richting 2F rond domeinen als breuken, procenten en meten meer in het algemeen opgebouwd worden? In het voorgaande is er al op gewezen dat er in de gangbare rekenmethoden in het vmbo weliswaar al een zekere opbouw is gerealiseerd; maar dat deze opbouw voor de doelgroep van bb-leerlingen in zoverre tekort schiet dat:

- er weinig aandacht is voor ‘aanvullende begripsvorming’;
- er weinig aandacht is voor wat de leerlingen in de basisschool mogelijk al aan eigen kennis en strategieën hebben verworven;
- er weinig gebruik wordt gemaakt van schema’s en modellen die in het basisonderwijs veelal als hulpmiddel worden ingezet om tot niveauverhoging te komen.

Het komt erop neer dat men veelal uitgaat van min of meer afgeronde leerprocessen waarbij een korte recapitulatie met aanvullende oefeningen in principe genoeg is om de kennis op te frissen, en waarbij men het aan de rekenleraar zelf overlaat om aanvullende begripsvormende activiteiten en passende instructiemomenten in de lessen in te bouwen. In de vorige paragraaf is beschreven wat voor activiteiten dat in het geval van breuken zoal kunnen zijn.

Maar hoe kunnen doorgaande leerlijnen rond zulke onderwerpen nu verder opgebouwd worden? Om hier meer over te zeggen, gaan we terug naar hoofdstuk 2. Daar is geconstateerd dat leerlingen die 2F-opgaven redelijk succesvol weten op te lossen, veelal gebruikmaken van oplossingswijzen waarbij gebruik wordt gemaakt van schema’s, modellen en van stapsgewijze hulpnotaties die daarvan zijn afgeleid. Dat zijn weliswaar niet de meest efficiënte, gestroomlijnde strategieën, maar ze zijn over het algemeen wel doeltreffend. Bovendien kunnen ze als opstap fungeren naar de meer efficiënte, formele procedures die veelal als eindpunt van een leerlijn fungeren, een eindpunt dat de leerlingen overigens niet per se hoeven te bereiken.

Zo zagen we bij de ‘lopend naar school’-opgave (15% van 300 leerlingen bepalen; zie paragraaf 2.3) onder meer de twee oplossingen in figuur 37. In de linkerafbeelding stelt de leerling het totale aantal kinderen voor met een lijn/strook, bepaalt vervolgens eerst 10% (30), rekent daarvan de helft uit (15) en telt de subtotalen op. In de rechterafbeelding doet de leerling hetzelfde maar heeft hij de strook er niet bijgetekend.

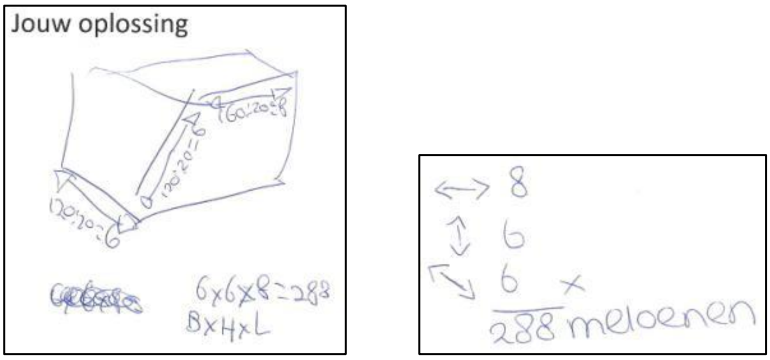


Figuur 37. Gedeelte van de oplossingen bij opgave 'Lopend naar school'.

Daarnaast waren er onder meer oplossingen die feitelijk in het verlengde van het gebruik van een strook liggen. (Zie figuur 38).

Figuur 38. Gedeelte uit de opgave 'Lopend naar school'.

Evenzo zagen we bij de meloenenopgave (hoeveel meloenen van 20x20x20 cm passen er in een kist van 120x120x160 cm? Zie weer paragraaf 2.3) oplossingen waarbij de situatie visueel-schematisch werd voorgesteld met een kubus of een verwijzing naar de drie dimensies daarvan en waarbij de oplossing mede op basis van zulke visualiseringen werd verkregen. (Zie figuur 39).

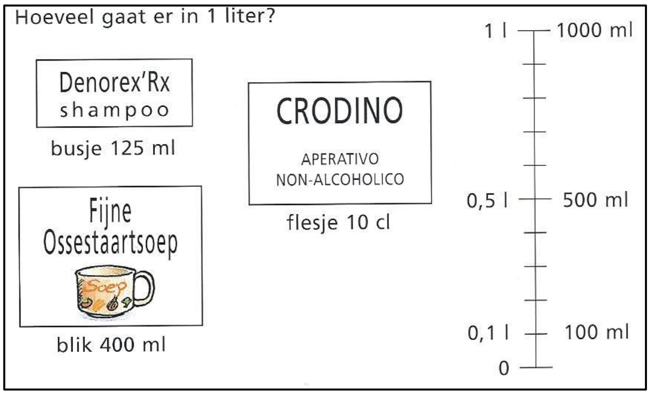


Figuur 39. Gedeelte uit de opgave 'Meloenen'.

En op een vergelijkbare manier waren er leerlingen bij de cola-opgave (hoeveel glazen van 0,2 l kun je vullen met 10 flessen van 1,5 l cola?) die een stapsgewijze berekening noteerden met een bijpassend schema van het betreffende deel van het maatstelsel (inhoudsmaten van l t/m ml). (Zie figuur 40).

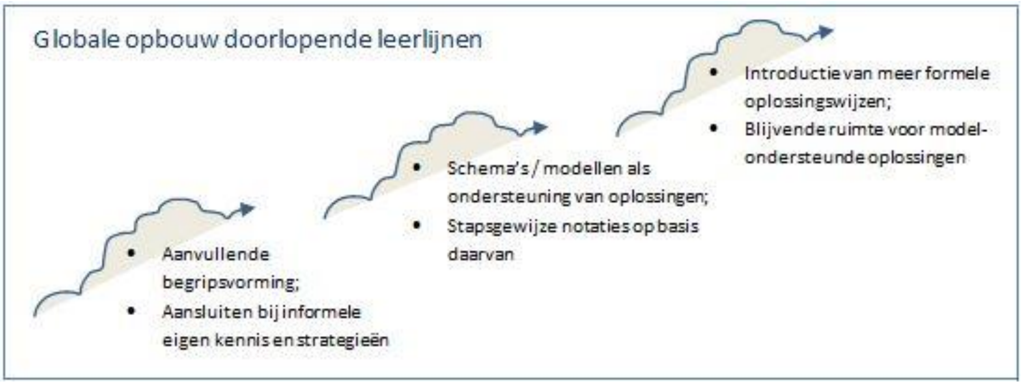
Figuur 40. Gedeelte uit de opgave 'Cola'.

Een dergelijk schema kan als een verdere schematisering opgevat worden van de maatlijn op de maatbeker waarop de leerlingen deze maten veelal hebben ondergebracht, een maatlijn die in het basisonderwijs veelal als densteun gebruikt wordt om inhoudsmaten en de daarmee gepaard gaande kommagetallen op de getallenlijn te plaatsen. (Zie figuur 41).



Figuur 41. Opgave inhoudsmaten. Bron: Wis en Reken, Wisboek 2, groep 7. Amersfoort, ThiemeMeulenhoff.

Al met al worden zulke oplossingen wel aangeduid als modelondersteunde oplossingen, oplossingen die niet alleen de weg kunnen plaveien naar de meer formele oplossingen die als eindpunt van de leerlijn fungeren, maar die ook op zichzelf een doelmatig oplossingsniveau kunnen vormen. Een en ander leidt tot de volgende globale opbouw van doorlopende leerlijnen. (Zie figuur 42).



Figuur 42. Globale opbouw doorlopende leerlijnen.

Kenmerkend voor deze opbouw is dus dat:

- het accent in de eerste fase op aanvullende begripsvorming ligt, zoals hierboven geïllustreerd aan de hand van breuken;
- in de tweede fase modellen, schema's en daarvan afgeleide stapsgewijze hulpnotaties gebruikt worden om het oplossingsproces te ondersteunen;
- in de derde fase aangestuurd wordt op het gebruik van meer formele oplossingswijzen waarbij echter volop ruimte blijft voor modelondersteunde oplossingen.

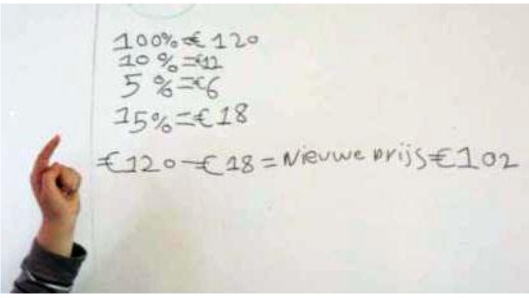
5.3 Blauwdruk van een doorlopende leerlijn Procenten

Hoe vertaalt zich een dergelijke globale structuur nu naar afzonderlijke leerlijnen? Per leerstofdomein pakt dat natuurlijk anders uit, afhankelijk van wat er op 2F-niveau aan kennis en vaardigheden gevraagd wordt. Als eerste voorbeeld bekijken we het domein Procenten. Dit domein is in veel opzichten voor het vmbo van belang, zowel met het oog op het functioneren van leerlingen in de samenleving als met het oog op beroepsvoorbereiding. Procentenopgaven vormen dan ook een wezenlijk bestanddeel van de 2F-toetsen. Bij het 2F-niveau gaat het grofweg om drie typen opgaven:

- Opgaven waarbij een percentage van een hoeveelheid/bedrag uitgerekend moet worden (zoals de prijs met 19% BTW).
- Opgaven waarbij een percentage van een hoeveelheid/bedrag moet worden omgerekend naar 100% (prijs met 20% korting is € 60,-, wat is de oorspronkelijke prijs?).
- Opgaven waarbij een percentage bepaald moet worden op basis van een gegeven verhouding (12 van de 30 leerlingen is ..%).

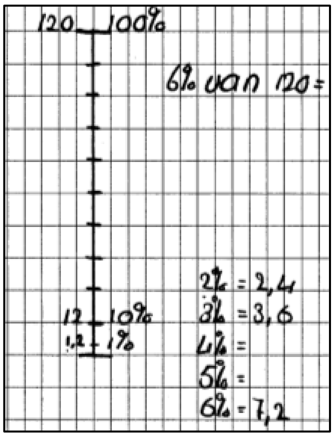
De leerlijn begint gewoonlijk, in overeenstemming met de globale structuur uit de vorige paragraaf, met een begripsmatige verkenning waarbij wordt nagegaan wat het betekent als er bijvoorbeeld sprake is van 25% korting of een vetgehalte van 4%. Ook het visualiseren van percentages komt daarbij aan bod (laat zien dat het plein voor 95% onder water staat). Vervolgens wordt voor het leren rekenen en redeneren met procenten een 'ankerpuntenbenadering' gevolgd. Deze komt erop neer dat aangesloten wordt bij de eigen kennis van leerlingen en dat ze nader bewust gemaakt worden van de meest elementaire ankerpunten van 50% (de helft) en 25% (een kwart). Vervolgens wordt als tweede stap in de leerlijn uitgebreid naar 10% als ankerpunt waarbij de leerlingen met ondersteuning van de strook als centraal model met 10% en veelvouden daarvan leren rekenen in situaties als: 40% van 300 gram, 20% van 650 gram, en dergelijke. Belangrijk is dan dat ze gaan doorzien dat je 10% van een hoeveelheid of bedrag kunt uitrekenen door te delen door 10; enige extra oefening in deze basisvaardigheid (zie ook paragraaf 5.5) kan hier nuttig zijn.

De volgende stap houdt in dat uitgebreid wordt naar 5% en 1% als ankerpunt. 5% wordt daarbij in eerste instantie als 'de helft van 10%' gezien, 1% als 'een tiende van 10%'. Het daadwerkelijke gebruik van de strook als ondersteunend model maakt nu steeds meer plaats voor het stapsgewijs noteren van de berekening. (Zie figuur 43).



Figuur 43. Berekening percentages.

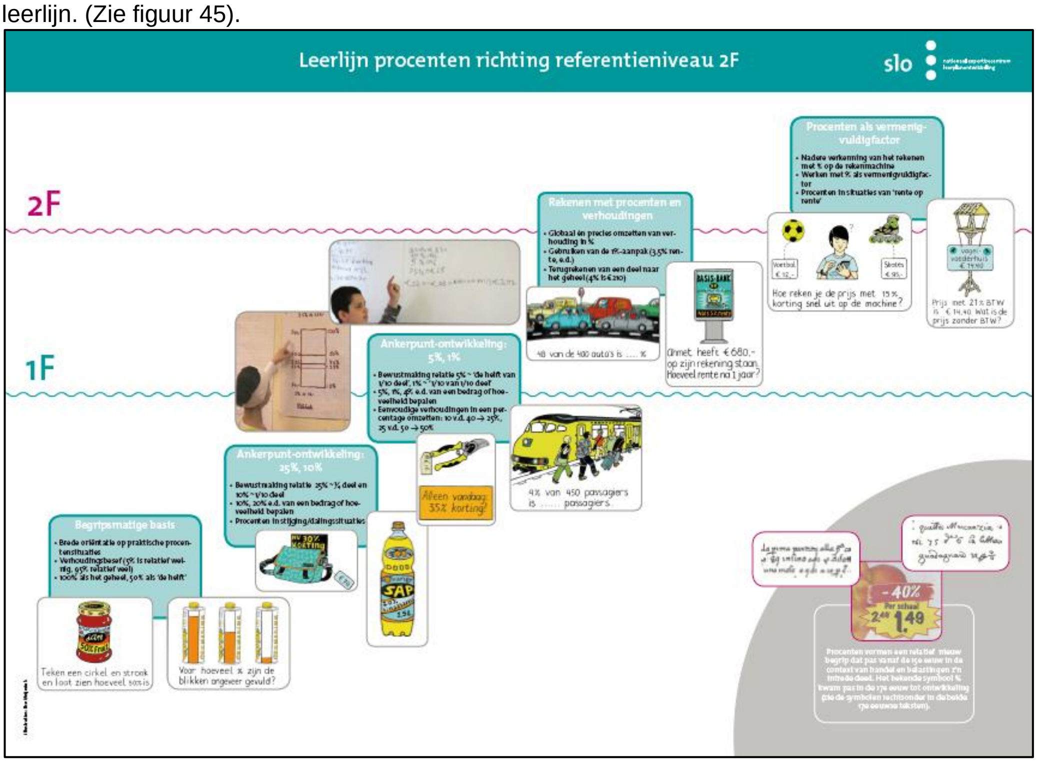
Ook het berekenen van 1% en veelvouden daarvan (6%, 19%, …) komt nu steeds verder binnen bereik. De werkwijzen die leerlingen in eerste instantie hierbij hanteren zullen soms nog wat bewerkelijk zijn. Maar het grote voordeel is dat ze via de ondersteuning met de strook beter begrijpen wat ze doen en daardoor ook beter tot verkorting richting meer gestroomlijnde werkwijzen komen die het uiteindelijke doel vormen: 6% berekenen door te delen door 100 en te vermenigvuldigen met 6. (Zie figuur 44).



Figuur 44. Opgave 6% van 120.

De nadruk in dit deel van de leerlijn ligt op opgaven van het eerste en tweede type; het leren omzetten van een verhouding in een percentage komt in deze fase slechts voor eenvoudige gevallen aan de orde. Parallel aan het steeds efficiënter uitrekenen van opgaven van de eerste twee typen wordt vervolgens ook dit derde type nu systematisch behandeld. Daarbij wordt de kennis van de ankerpunten in combinatie met het gebruik van de strook ingezet om geschikte oplossingswijzen te verwerven voor opgaven zoals de zakgeldopgave (hoeveel % is € 4,80 van 12 euro?).

In principe is nu alle leerstof die van belang is voor 2F aan bod geweest en hebben de leerlingen strategieën leren kennen waarmee ze de opgaven kunnen oplossen. Het komt er nu op aan dat de leerlingen hun kennis in een steeds breder scala aan contexten leren toepassen en dat ze daarbij ook tot een zekere verkorting van de gehanteerde werkwijzen komen. Dit kan ertoe leiden dat sommige leerlingen uiteindelijk ook met procenten als vermenigvuldigfactor leren werken, wat kenmerkend is voor de laatste stap uit het leerproces. Maar dat overstijgt het 2F-niveau en behoort meer tot het 3F-niveau. Al met al leidt dit tot de globale opbouw van de leerlijn. (Zie figuur 45).



Figuur 45. Poster leerlijn procenten. Download poster op A2-formaat: http://www.slo.nl/downloads/documenten/poster-leerlijn-procenten.pdf/

5.4 Blauwdruk van een doorlopende leerlijn Meten

Voor Meten als leerstofdomein geldt grotendeels hetzelfde als voor Procenten. Dit domein is belangrijk, zowel voor het functioneren in onze maatschappij als voor de beroepsvoorbereiding. Meetopgaven vormen dan ook een substantieel onderdeel van de 2F-toetsen. Hierbij zijn vooral de grootheden lengte, inhoud, gewicht en oppervlakte van belang. Daarnaast spelen de grootheden tijd en snelheid een rol. Bij tijd gaat het met name om het rekenen en redeneren met digitale tijd; bij snelheid gaat het vooral om het werken met meters en seconden en km/u. Kennis van de voornaamste relaties tussen veel voorkomende maateenheden en een goed ontwikkeld maatgevoel met betrekking tot deze grootheden kunnen als de sleutel tot het adequaat oplossen van opgaven op het 2F-niveau beschouwd worden. Zo dienen leerlingen voor de grootheid lengte een goed besef te hebben van de orde van grootte van eenheden zoals mm (dikte van een nagel), cm (vingerdikte), dm (handbreedte), m (flinke stap) en km (1000 flinke stappen). Tevens dienen zij de voornaamste relaties tussen deze maten te kennen (1 cm is 10 mm; 1 m is 100 cm; enzovoorts).

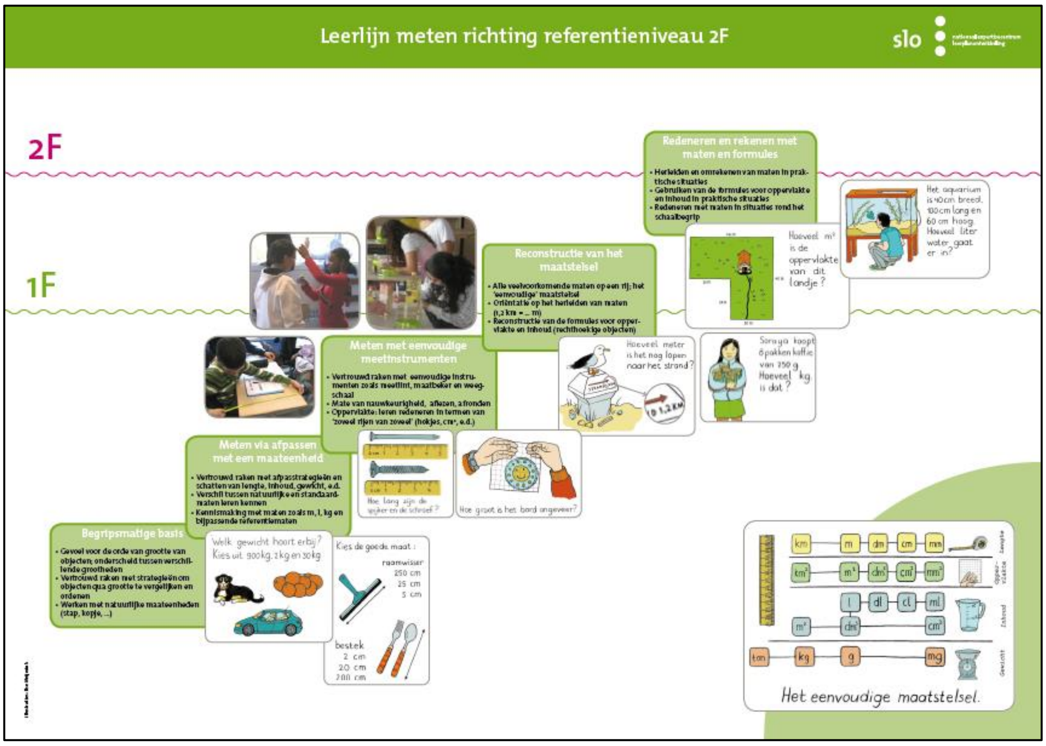
Zoals in het voorgaande reeds is aangegeven, is de basis voor deze kennis gelegen in twee essentiële typen activiteiten:

- Praktische meetactiviteiten aan de hand van instrumenten zoals meetlint (rolmaat, duimstok, centimeter, …), keukenweegschaal en maatbeker.
- Reconstructie van een centraal deel van ons maatstelsel op basis van deze ervaringen.

Hiermee tekent zich een eerste grondpatroon voor de leerlijn af: via praktische meetactiviteiten en daarop gebaseerde reconstructie van een centraal deel van het maatstelsel (‘het eenvoudige maatstelsel’) wordt de basis gelegd voor het leren redeneren en rekenen met maateenheden. Voorafgaand aan het meten met instrumenten zijn er overigens nog twee fasen te onderscheiden waarin het gaat om een begripsmatige basis (vergelijken van objecten qua grootte, werken met natuurlijke maateenheden, …) en om het meten via afpassen met een maateenheid. Doorgaans zijn deze fasen echter door vrijwel alle leerlingen al in het basisonderwijs doorlopen.
Als centraal model binnen deze leerlijn kan de maatlijn worden aangemerkt zoals die verankerd ligt in de schaalverdeling van de genoemde meetinstrumenten. Deze maatlijn kan in eerste instantie als ‘denksteun’ fungeren bij het gebruiken van elementaire relaties tussen maateenheden (zoals tussen milliliter en liter, zie figuur 46), en later ook bij het toepassen van deze relaties bij meetopgaven op 2F-niveau (zoals bij de colaopgave uit hoofdstuk 2).

Figuur 46. Opgave meten. Bron: . Wis en Reken, Wisboek 2, groep 7. Amersfoort, ThiemeMeulenhoff.

Al met al leidt dit tot de volgende globale opbouw van de doorlopende leerlijn Meten. (Zie figuur 47).



Figuur 47. Poster leerlijn meten. Download poster op A2-formaat:
http://www.slo.nl/downloads/documenten/poster-_leerlijn-meten.pdf/

Voor de grootheid Oppervlakte dient hierbij nog een kanttekening geplaatst te worden. Anders dan bij de andere grootheden gaat het hier naast maatgevoel en elementaire maatkennis om het kunnen beredeneren en berekenen van de oppervlakte van allerlei veelal rechthoekige objecten, zie figuur 48.

Figuur 48. Opgave meten. Bron opgave: Cito, 2013.

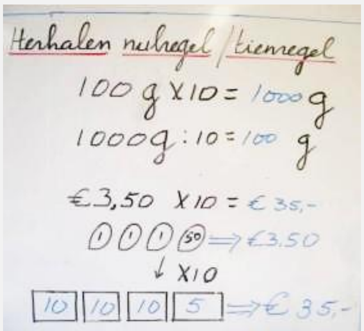
Het met inzicht hanteren van de formule voor de oppervlakte van rechthoekige figuren vormt voor deze grootheid dan ook een centraal doel. Maar ook hier geldt dat praktische meetactiviteiten (globaal bepalen van de oppervlakte van bijvoorbeeld een muur of een vloer) in belangrijke mate de grondslag vormen.

5.5 Praktijkvoorbeeld lesactiviteit Procenten

Om de beschreven leerlijnen uit te voeren, is uiteraard lesmateriaal nodig. Sommige scholen maken dit zelf, maar veel scholen gebruiken een methode of een combinatie van methoden. Hierboven is al gewezen op de wenselijkheid om zulke materialen selectief te gebruiken, dat wil zeggen om de beoogde lesactiviteiten waar wenselijk aan te passen en uit te breiden al naar gelang de omstandigheden in de klas. Een belangrijk element waarover methoden veelal weinig informatie geven, betreft de instructie. Zoals eerder aangegeven is het aan te bevelen om deze interactief van aard te maken, dat wil zeggen met ruimte voor een actieve inbreng van de leerlingen. Om een nadere indicatie van zulke interactieve instructie te geven, volgt hieronder een praktijkvoorbeeld van een les rond procenten. De les is geïnspireerd op het lespakket *Verder met Rekenen* en werd uitgevoerd in een vmbo 1-klas (bb-leerweg).

Even oefenen: delen door 10? (10 minuten)

De leraar begint de les met een korte herhaling van de nulregel/tienregel. Op het bord heeft zij een beknopt overzicht omtrent deze regel gezet. (Figuur 49).



Figuur 49. Overzicht nulregel/tienregel.

Dit wordt stapsgewijs doorgenomen. Voor veel leerlingen lijkt dit nu tamelijk vertrouwde materie. Aansluitend bespreekt zij kort hoe het delen door 10 in z'n werk gaat, zoals bij € 240,- : 10 en € 35 : 10. Vastgesteld wordt dat het bedrag in kwestie '10 keer zo klein wordt'. In het geval van 240:10 betekent dit dat er een nul afgaat, in het geval van 35:10 dat de komma een plaats naar links schuift. De leerlingen oefenen even met vier opgaven: 150:10, 85:10, 15:10 en 5:10. De eerste drie opgaven worden veelal vlot opgelost, maar bij de vierde twijfelt een aantal leerlingen. Tot besluit brengt een leerling naar voren hoe je het antwoord bij deze laatste opgave kunt beredeneren: als je 5 euro met z'n tienen deelt, krijgt ieder 50 cent, oftewel 0,5 euro; want 10x50 cent is weer 5 euro.

Maken en bespreken van de opgave '45% van € 480,- is ..' (15 minuten)

Dan introduceert de leraar een procentenopgave: 45% van € 480,- is .. De leerlingen wordt gevraagd om deze opgave zelf op te lossen en de gehanteerde oplossingswijze op het kladblaadje te noteren. Voor de snelle leerlingen zijn er enkele aanvullende opgaven. Na een minuut of vijf worden de resultaten nabesproken.

D(ocent): 45% van 480 euro, hoe doen we dat, Therisia?

T(herisia): 100% is 480 euro

D: Is dat goed, jongens? (Diverse leerlingen: Ja!) En dan de volgende stap, Therisia?

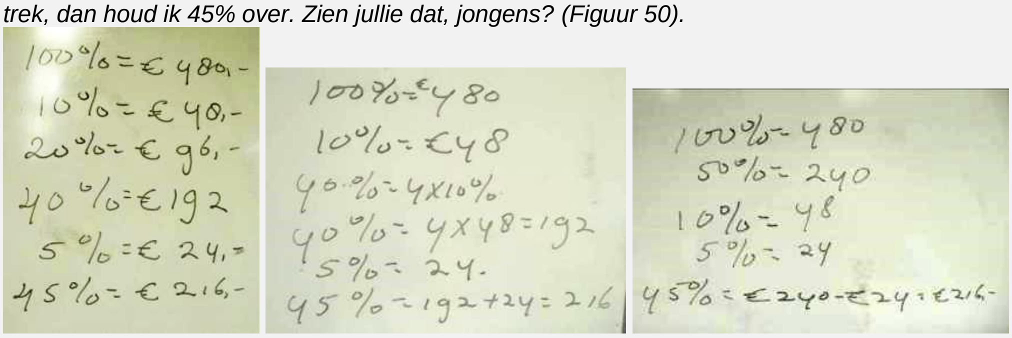
T: 10% is dan 48 euro… (Leraar noteert dit op het bord); 20% is 96 euro, en 40% is 192 euro (idem).

D: Wie heeft het ook zo gedaan? (Diverse leerlingen steken hun vinger op). En dan, Therisia?

T: Nog 5% erbij, is 24 euro, de helft van 48; en dat bij die 40% is 216 euro.

De leraar vraagt nu wie het anders heeft gedaan. Adil geeft aan dat hij wel eerst 40% heeft berekend, maar 'niet met al die stapjes'. Hij licht dat hij in een keer 40% heeft berekend, dus via 4x10%: 4x48 euro is 160 en 32 is 192 euro. 'En dan nog die 5% erbij…'. De leraar noteert dit op het bord en vraagt of ze het heeft opgeschreven zoals Adil het bedoelt (deze bevestigt dit). Andere leerlingen zijn het ermee eens dat dit toch een iets andere manier is. Ten slotte vraagt de leraar of er misschien nog een andere, handige manier is. Nu meldt zich Rachid die zegt dat je ook eerst 50% kunt doen is 240; dan 10% is 48 en 5% is 24; en dan 'doe je 240 min 24'.

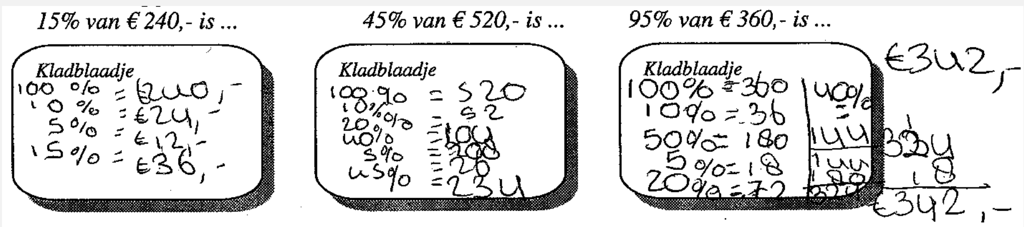
D: Dus jij bedoelt: ik heb al 50% dat is 240 euro; en als ik daar nu 5% oftewel 24 euro vanaf trek, dan houd ik 45% over. Zien jullie dat, jongens? (Figuur 50).



Figuur 50

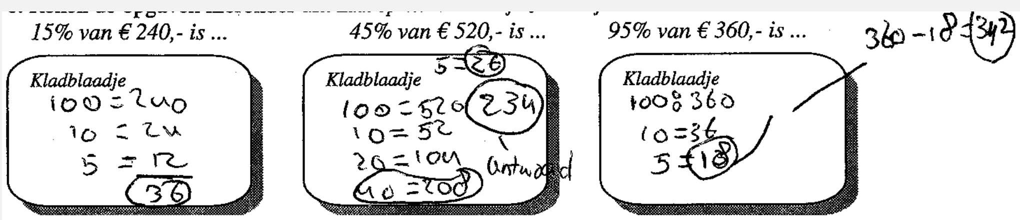
Verwerking (20 minuten)

Ten slotte vindt een verwerking plaats waarbij een aantal soortgelijke opgaven gemaakt worden. De meeste leerlingen kunnen nu redelijk goed uit de voeten met dergelijke opgaven. Sommige leerlingen lijken eerst de te nemen stappen te noteren om deze vervolgens een voor een uitvoeren. Zo noteert Cemile bij de opgave 15% van € 240,- direct onder elkaar 100%, 10%, 5% en 15%; en voert deze stappen daarna een voor een uit. Hetzelfde doet zij bij de volgende twee opgaven. Uiteindelijk staat er dan op haar werkblad (figuur 51).

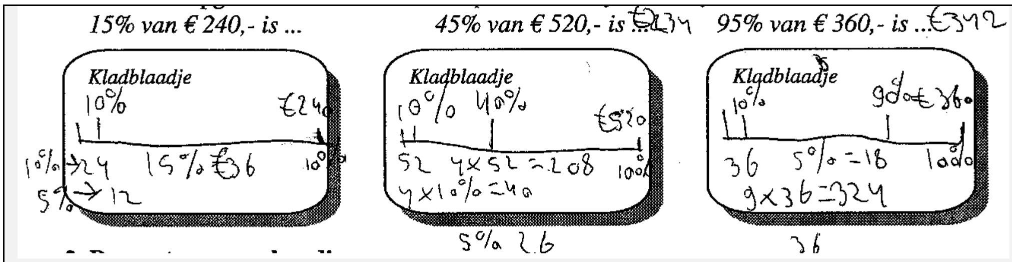


Figuur 51. Werkblad Cemile.

Enkele leerlingen hebben toch nog moeite met het gebruik van de tienregel en deze krijgen enige extra ondersteuning van de leraar. Maar de meeste leerlingen komen goed uit de voeten. Sommigen werken daarbij op een tamelijk hoog niveau en lijken de meeste stappen in hun hoofd te doen, anderen werken op een betrekkelijk laag niveau en tekenen ter ondersteuning een 'procentenlijn'. (Zie figuren 52 en 53).



Figuur 52. Werkblad Anass.

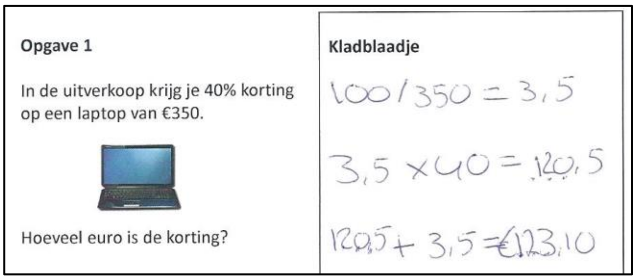


Figuur 53. Werkblad Ismail.

6. Diagnostiek volgens de afpelbenadering

6.1 ‘Afpellen’ als diagnostische activiteit

Als leerlingen ondanks het voorafgaande onderwijs toch regelmatig moeilijkheden ondervinden bij het werken aan rekenopgaven (op 1F- of 2F-niveau), is het zaak maatregelen te nemen. Wat is er aan de hand? Wat is precies de aard van de obstakels waar de leerlingen tegenaan lopen? Als het om betrekkelijk kleine moeilijkheden gaat die vlot overwonnen kunnen worden, is het natuurlijk altijd mogelijk om leerlingen tips en aanwijzingen aan de hand te doen waarmee ze alsnog tot een oplossing kunnen komen. Elke leraar heeft wel een repertoire van zulke aanwijzingen achter de hand. Zo lijkt de leerling van de berekening in figuur 54 zich wel te realiseren hoe je tot een oplossing kunt komen (eerst 1% bepalen via delen door 100, daarna vermenigvuldigen met 40). Maar hij maakt een rekenfout (3,5x40=120,5) en voegt bovendien een misplaatste extra stap aan de berekening toe (120,5+3,5=€ 123,10; wederom met een rekenfout). Mogelijk helpt het al als de rekenfouten uit de berekening gehaald worden en als wordt vastgesteld dat er een stap te veel wordt gedaan.



Figuur 54. Voorbeeld van een foutieve oplossing bij de laptop-opgave.

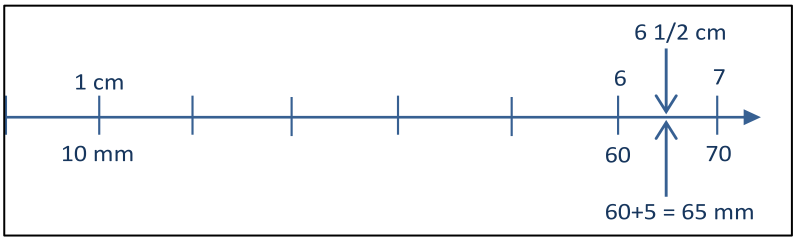
Het kan ook zijn dat dit niet goed werkt en dat nader onderzocht moet worden wat er precies aan de hand is. Dat is met name het geval in situaties waarbij een leerling bepaalde zaken niet goed begrijpt. Suggesties om een bepaalde oplossingswijze te gebruiken worden dan in eerste instantie misschien wel gevolgd, maar vaak worden ze niet goed begrepen en dus ook snel weer vergeten. Het gevolg kan zijn dat de leerling regelmatig opnieuw steun nodig heeft.
In zulke situaties kan een meer diagnostische invalshoek nuttig zijn, een invalshoek waarbij meer systematisch wordt nagegaan wat een leerling van het onderwerp in kwestie afweet, wat hij moeilijk vindt, enzovoorts. In het kader van het SLO-project waarvan deze publicatie het resultaat is, werd zo’n diagnostische aanpak uitgewerkt. Enerzijds werd daarbij uitgegaan van de ervaringen van een aantal leraren, anderzijds van gangbare opvattingen en benaderingswijzen bij het diagnosticeren van leerlingen. Bijvoorbeeld: de opvattingen over de probleemoplossingscyclus die in de vakliteratuur in verschillende varianten wordt beschreven (Polya, 1971; OECD, 2009; Blum, 2012), en de diagnostische benaderingswijze die beschreven wordt in de artikelen over de 'vertaalcirkel' in het tijdschrift *Volgens Bartjens* (Borghouts, 2010; 2011) en in het ERWD-protocol (Groenestijn, van et al, 2012). Dit leidde tot het idee van het ‘afpellen’ van de eigen kennis van leerlingen: het op cruciale punten aftasten van wat een leerling weet en begrijpt, en daarbij zo ver teruggaan in de leerlijn dat de leerling als het ware weer vaste grond onder de voeten gaat voelen. Om dit te verduidelijken, in het kader een voorbeeld.

Figuur 55. De balkopgave.

In een diagnostisch interview krijgen drie leerlingen (vmbo-3, bb-leerweg) de opgave van figuur 55 voorgelegd. Op verzoek van de leraar proberen ze deze eerst zelfstandig op te lossen. Na enige tijd worden de verkregen oplossingen besproken. In het voorafgaande deel van het interview is overigens gebleken dat ze het praktische meten met behulp van een meetlint vrij goed beheersen.
Linde: 'Ik heb 60, omdat je er één nul bij moet doen…'.
Daisy: 'Ik had die 6 en een half keer 10 gedaan; maar ik weet niet of het nou gedeeld door of keer moet zijn. Nee, het is toch keer, dat is naar boven; gedeeld door is naar beneden. Of niet? Dan is het 6 en een half keer 10, dat wordt 70'.
Esmée: 'Ik dacht ook dat het keer 10 moest zijn, maar ik heb 60…'.
Leraar: 'Moet het nu keer 10 of gedeeld door 10 zijn? (Leerlingen: 'Ja, dat is moeilijk…'.) En als die balk nu 2 centimeter breed was? (Leerlingen: 'Dan was het 20 millimeter!) En als hij 6 cm was? (Leerlingen: '60 millimeter; Da's niet moeilijk.').
Daisy: 'Maar wat moeten we nu met die halve centimeter?'
Leraar: 'Zullen we het meetlint er nog eens bij pakken?' (geeft dit aan de leerlingen).
De leerlingen wijzen op het meetlint nu eerst de centimeter en de millimeter nog eens aan, waarbij wordt vastgesteld dat er 10 millimeter in een centimeter gaan. Vervolgens zoeken ze nader uit hoe het met die halve centimeter zit. Aan de hand van het lint stellen ze vast dat dit de helft van 10 millimeter moet zijn, dus 5 millimeter. In een bordtekening van de (geschematiseerde) maatlijn werd ten slotte geconstateerd dat de balk 60+5 is 65 millimeter dik is.

In dit gesprek is duidelijk te zien dat de leerlingen bij dit soort opgaven min of meer gewend zijn om te denken in termen van 'omhoog of omlaag langs het trappetje gaan'. Het fijne weten ze er echter niet van, het lijkt te abstract voor hen, ondanks dat dit regelmatig aan de orde is geweest. Het lijkt er sterk op dat de verbinding van dat trappetje met de onderliggende relaties tussen maateenheden en met het feitelijke meten voor de leerlingen verloren is gegaan. Wordt deze hersteld, dan blijkt de opgave toch goed begrepen te kunnen worden.
In het voorbeeld wordt ook duidelijk hoe het afpellen in deze situatie in z'n werk gaat: de leraar laat de leerlingen eerst hun potentiële oplossing verwoorden en stuit daarbij op bepaalde obstakels ('Moet je nu omhoog of omlaag?'). Vervolgens probeert hij af te pellen door de opgave te vereenvoudigen, daarbij constaterend dat vergelijkbare maar eenvoudigere opgaven wel opgelost kunnen worden. Om het obstakel van het lastige getal (6½ cm) te overwinnen, wordt vervolgens het meetlint erbij genomen als ondersteunend 'model'.

Als blijkt dat de leerlingen hiermee min of meer vaste grond onder de voeten krijgen, wordt ze gevraagd om de opgave alsnog op te lossen en wordt de uiteindelijke oplossing schematisch op het bord genoteerd (zie figuur 56). Daarna worden enkele vergelijkbare opgaven besproken om na te gaan of de leerlingen het echt begrepen hebben. Kort gezegd komt de hier gevolgde diagnostische benadering dus neer op 'afpellen en weer opbouwen'.

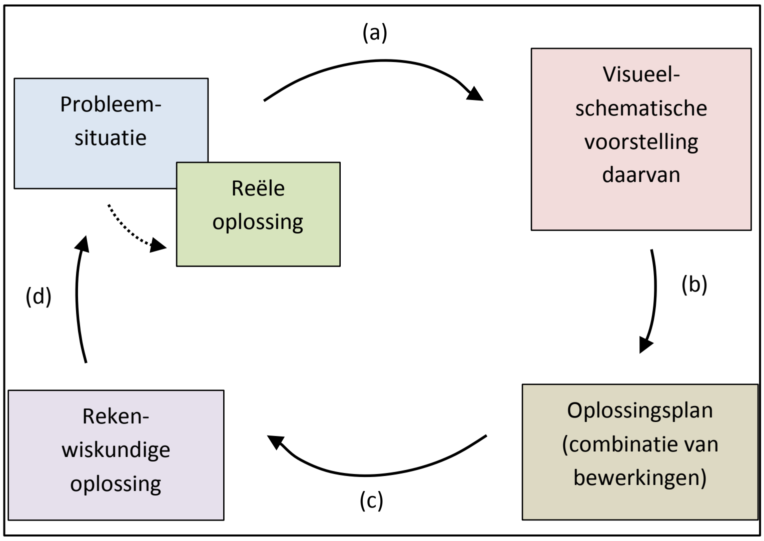


Figuur 56. Schematische notatie.

In de afgelopen jaren werd deze afpelbenadering in samenspraak met drie vmbo-scholen nader uitgewerkt en beproefd. Het resultaat daarvan wordt in het vervolg van dit hoofdstuk beschreven.

6.2 Potentiële obstakels bij het oplossen van 2F-opgaven

De moeilijkheden die leerlingen bij het oplossen van 2F- of 1F-opgaven ondervinden, kunnen van uiteenlopende aard zijn. Zo bleek voor het groepje leerlingen bij de balkopgave in de vorige paragraaf de complexiteit van het getal in kwestie (6½ cm) een struikelblok. Ook bleken sommige leerlingen de relatie tussen de in het geding zijnde maateenheden niet goed meer paraat te hebben. Maar, zoals veel leraren regelmatig ervaren, er kunnen zich ook heel andere obstakels voordoen. Om hier meer over aan de weet te komen, is het nuttig om de gehele opeenvolging van handelingen onder de loep te nemen die bij het oplossen van reken-wiskundige problemen van belang zijn. Veelal wordt deze opeenvolging als een cyclisch proces voorgesteld waarbij het vertrekpunt gelegen is in het analyseren van de probleemsituatie, het proberen te begrijpen waar deze over gaat, het maken van een visueel-schematische voorstelling van de situatie, en dergelijke. Zie fase (a) in figuur 57.



Figuur 57. Gangbare voorstelling van de complete oplossingscyclus voor het oplossen van reken-wiskundige problemen

De tweede stap betreft het bedenken van een geschikte oplossingsstrategie, of van het begin daarvan (na de uitvoering waarvan bedacht kan worden wat er verder nog gebeuren moet); fase (b). Bij de derde stap wordt deze strategie vervolgens uitgevoerd, waarbij hulpnotaties gebruikt kunnen worden, de rekenmachine ingezet kan worden, enzovoorts; fase (c). Soms leidt dit direct tot de oplossing van het probleem. Maar het kan ook zijn dat er nog een vierde en laatste stap nodig is waarbij de rekenkundige oplossing 'terugvertaald' wordt naar een reële oplossing die past bij de context van het probleem; fase (d). Bijvoorbeeld omdat een bewerking uitgevoerd op de rekenmachine tot een antwoord leidt dat niet bij de context past (vergelijk een opgave als: hoeveel 6-packs moet je kopen als je voor een feestje 100 blikjes nodig hebt?); of omdat nog een omzetting naar een andere maateenheid nodig is om de vraag correct te kunnen beantwoorden. Zie het voorbeeld in figuur 58 waarbij de berekening op zich goed is, maar de omzetting naar kilometers fout.

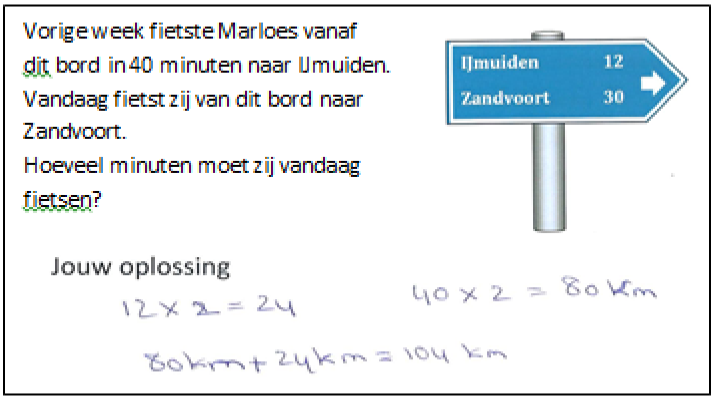
Figuur 58. Opgave en oplossing afstanden. Bron opgave: Hulpprogramma rekenen-wiskunde groep 7/8 (Buijs * Van der Zwaart).

Het zal duidelijk zijn dat zich binnen al deze fasen van het oplossingsproces obstakels kunnen voordoen die ervoor zorgen dat een leerling vastloopt. Tijdens een inventarisatie naar aanleiding van het maken van een reeks 2F-opgaven door enkele honderden leerlingen op drie vmbo-scholen kwamen onder meer de volgende soorten obstakels naar voren:

- Het zich niet voldoende kunnen voorstellen bij een gegeven probleemsituatie (gerelateerd aan fase (a)).
- Het niet in staat zijn om een passende schematisering bij de situatie te bedenken (a).
- Het niet in staat zijn om een geschikt oplossingsplan bij een opgave te bedenken (b).
- Problemen bij het uitvoeren van een oplossingsplan doordat een bepaalde bewerking onjuist wordt uitgevoerd of omdat voor de verkeerde bewerking wordt gekozen (c).
- Problemen bij het uitvoeren van een oplossingsplan doordat een leerling het overzicht over de berekening kwijtraakt en als het ware verdwaalt in zijn berekening (c).
- Problemen bij het interpreteren van een op de rekenmachine of zelf berekende uitkomst in termen van de context waarbinnen het probleem speelt (d).

Tijdens de inventarisatie bleek bij de navigatie-opgave (paragraaf 2.4) bijvoorbeeld dat sommige leerlingen de context van een navigatiesysteem, zoals in de auto wordt gebruikt, helemaal niet kenden. Daardoor waren de afbeelding en enkele termen die daarin gebruikt werden ('verwachte aankomsttijd') voor hen lastig te begrijpen. In een dergelijk geval is typisch sprake van een obstakel in de eerste fase van het oplossingsproces.
Een struikelblok dat eveneens herhaaldelijk werd gesignaleerd, deed zich voor bij de uitvoering van het door een leerling bedachte oplossingsplan, namelijk als deze leerling de draad kwijt raakt en min of meer in zijn eigen berekening verstrikt raakt. Dit gebeurde vooral in situaties waarin de leerlingen niet voldoende gewend leken om hun berekening stapsgewijs te noteren. Zo kwam het voor dat leerlingen bij de Zandvoortopgave (zie figuur 59) in hun redenering verstrikt raakten doordat kilometers (cq. afstanden) en minuten (cq. de tijd) door elkaar gehaald

werden. In zo'n situatie deed het obstakel zich dus met name voor tijdens de derde fase van het oplossingsproces.



Figuur 59. 'Zandvoort'-opgave. Bron opgave: Cito (2012).

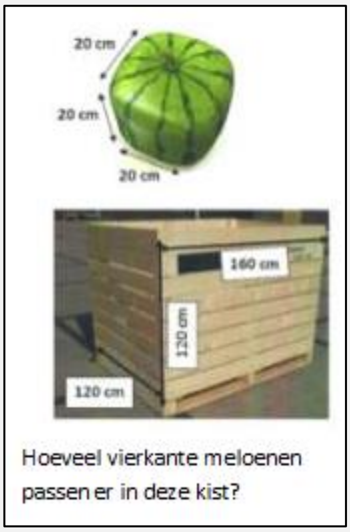
Ondersteuning via het systematisch laten noteren van de verschillende handelingen bleek overigens soms voldoende houvast te geven om een leerling alsnog tot een goede oplossing te laten komen; soms echter bleek dit niet voldoende te zijn. De afpelbenadering, zo was de gedachte, zou er in zulke gevallen in moeten voorzien dat een steeds nauwkeuriger beeld ontstaat van waar de schoen precies wringt, waar de onderliggende kennis van de leerling in gelegen is, en hoe deze kennis uitgebouwd kan worden in de richting van het soort van oplossingswijzen dat nodig is om 2F-opgaven op te lossen[5].

6.3 Praktijkvoorbeeld: afpellen en weer opbouwen bij de meloenenopave

Om de afpelbenadering uit te proberen, vond op drie scholen een experiment plaats dat begon met een studiemiddag waarbij de probleemoplossingscyclus (figuur 55) werd besproken en waarbij vervolgens een voorlopige versie van de afpelbenadering werd geïntroduceerd. In de weken daarna gingen de leraren in groepjes van twee aan de slag om deze benadering in hun eigen praktijk uit te proberen. In een afsluitende bijeenkomst werden de video-opnamen die daarbij gemaakt waren, gezamenlijk besproken in het licht van het aanbrengen van verbeteringen en aanscherpingen. In de volgende paragrafen wordt beschreven hoe de afpelbenadering op basis van dit experiment verder gestalte heeft gekregen (paragraaf 6.4) en tot welke aandachtspunten dat in meer algemene zin voor het gebruiken van de benadering heeft geleid (paragraaf 6.5). In het kader eerst een voorbeeld van de wijze waarop de benadering werd uitgeprobeerd aan de hand van de meloenenopgave. De leraar in kwestie werkte daarbij met een groepje van drie leerlingen (vmbo-3, bb-leerweg).

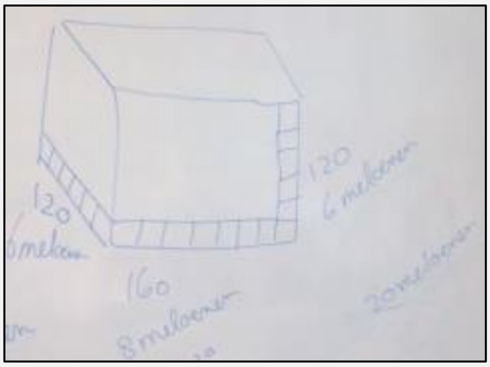
[5] Op de SLO-website is de hieronder uitgewerkte benadering ook te downloaden in de vorm van een 'meewerkpracticum' gericht op een gezamenlijke analyse van deze benadering door studenten en schoolteams.

De leerlingen werken enige tijd aan het probleem in figuur 60.



Figuur 60. Opgave 'meloenen'. Bron opgave: Cito (2012).

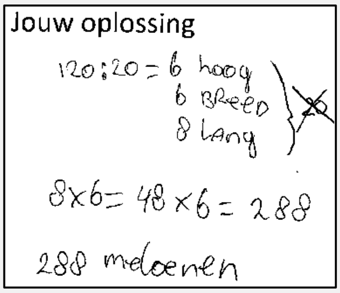
Aron (na enige tijd): 'Ik had eerst gekeken hoeveel meloenen er in de breedte passen, dus in die 120; dan kwam ik op 6 uit, 6x20 is 120. En dat deed ik ook bij die 160, daar passen er 8 in. En toen deed ik 8+6 is 14 meloenen.'
De leraar tekent de kist op het bord en geeft aan hoe de meloenen in de lengte en breedte passen.
Sacha: 'Ik deed het ook zo. Maar hij heeft de hoogte vergeten. Daar passen er ook 6 in. Dan wordt het bij elkaar 20' (de leraar tekent dit in de bordtekening (figuur 61).



Figuur 61. Oplossing opgave 'meloenen'.

Leraar: 'Zou mijn hele kist nu vol zitten? Het lijkt me een beetje weinig…' (leerlingen beamen dit). 'Als we nu eens naar deze doos kijken (pakt er een transparante doos met 3x3x3 houten blokken). Hoeveel meloenen zou dat zijn?'
Robin: 'Dat is 3x9, dus 27. Want hier is het 3x3 is 9 (wijst de bovenste laag aan); en dan 3x9'.
Leraar: 'En hoeveel zou het dan worden in de kist met de meloenen?' (leerlingen: 'Tja…')
Nu blijkt dat de overgang naar de meloenensituatie toch nog groot is, besluit de leraar om deze situatie enigszins na te bouwen. Er worden 8 blokken in de lengte neergelegd, 6 in de breedte en 6 in de hoogte. Nogmaals blijkt nu dat 20 veel te weinig is, de kist zit immers nog lang niet vol.

Sacha: 'Alleen al hier zitten er 8x6 of 6x8 (wijzend naar het grondvlak). Dat is … 48 meloenen in de onderkant. En dan moet je die onderkant nog eens keer 6 doen, dus 6x48'.
Het uitrekenen van 6x48 blijkt nog wel enige voeten in de aarde te hebben. Maar uiteindelijk komen de leerlingen zo tot een goed doordachte oplossing: 6x48 is 288 meloenen (zie figuur 62.

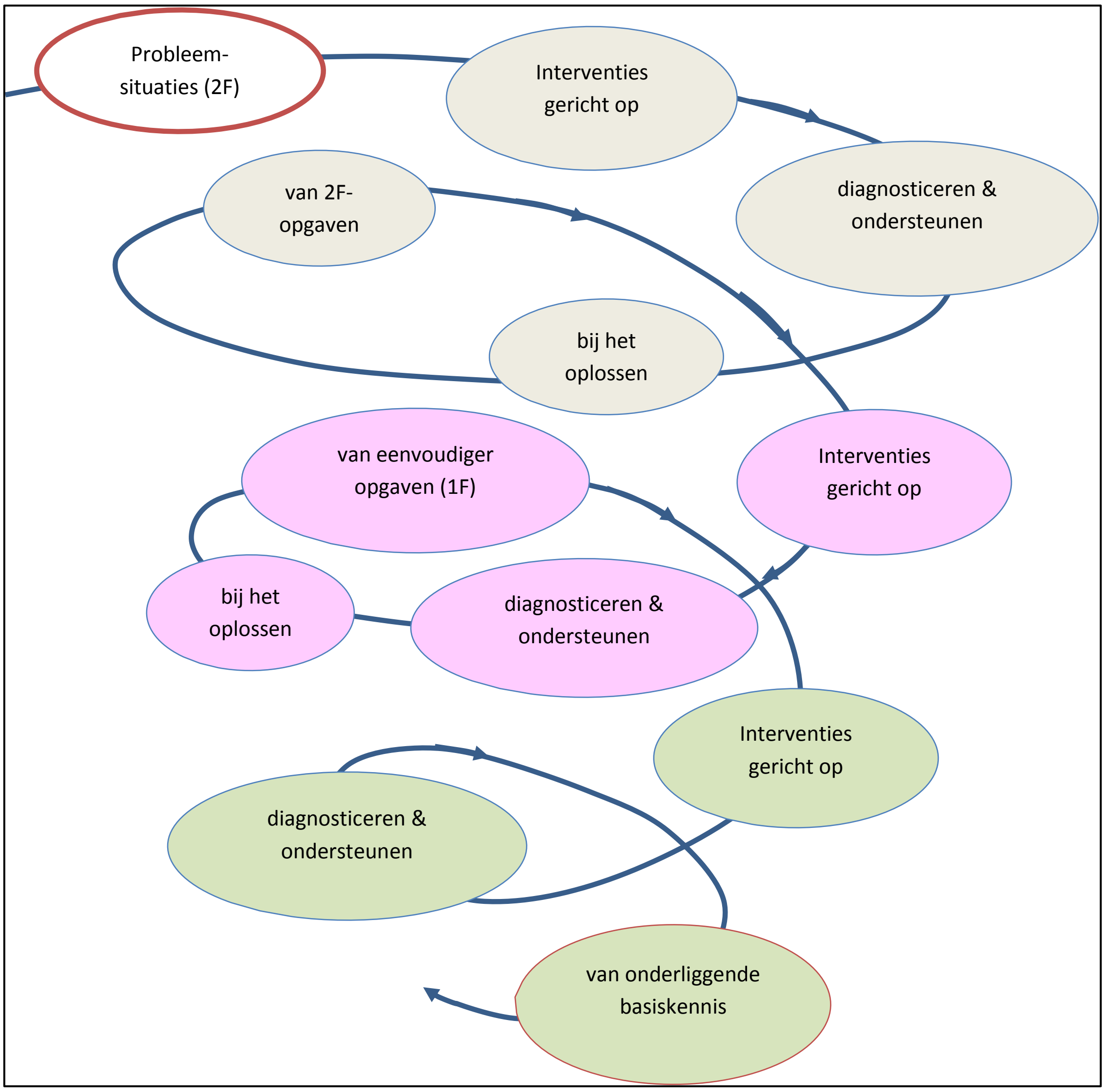


Figuur 62. Oplossing opgave 'meloenen'.

In de bespreking van de activiteit binnen het team van rekenleraren kwam in de eerste plaats naar voren dat er enkele belangrijke en interessante vormen van 'afpellen' te zien zijn. Dit betreft alleen al het schematisch voorstellen van de situatie op het bord, en het in deze voorstelling aangeven hoe de meloenen in de lengte, breedte en hoogte in de kist passen. Daarmee komt ook aan het licht dat het oorspronkelijke antwoord van 20 wel erg weinig is. Maar tot een goede strategie leidt dit nog niet. Daarom besluit de leraar tot een tweede vorm van afpellen, namelijk door de situatie te vereenvoudigen en te concretiseren aan de hand van de transparante doos met blokken. Via deze concretisering komt naar voren dat er in zo'n situatie niet opgeteld moet worden, maar vermenigvuldigd. Hoe dit in de situatie van de kist uitpakt, treedt ten slotte aan het licht als deze situatie 'in de lengte, breedte en hoogte' wordt nagebouwd. In een reactie op de activiteit tijdens de teambespreking geeft de leraar verder aan dat ze het gevoel had dat ze 'wel erg ver terug moest in de leerlijn'. Wat er nu binnen één activiteit plaatsvond, zou in haar beleving beter in een reeks activiteiten gedaan kunnen worden. Daarmee zou het inzicht van de leerlingen beter tot stand kunnen komen. Maar, zo vroegen andere leraren zich af, wordt deze leerlijn op school dan niet al doorlopen in klas 1 en 2? Deze vraag bleek niet zonder meer te beantwoorden. Vermoed werd dat er in dat opzicht zeker nog de nodige verbeteringen doorgevoerd zouden kunnen worden, zodat er in de toekomst een betere basis gelegd wordt voor het leren oplossen van dergelijke inhoudsvraagstukken.
Al met al laat het voorbeeld in het kader zien dat het in dergelijke gevallen de moeite waard kan zijn om de kennis van de leerlingen steeds verder 'af te pellen' tot het niveau waarop ze wél vaste, begripsmatige grond onder de voeten voelen; en om ze vervolgens mede op basis van visueel-schematische voorstellingen (bordtekening) of concretiseringen (nabouwen situatie) ondersteuning te bieden. Ook bij opgaven rond procenten en meten bleek deze afpelbenadering een waardevolle diagnostische aanpak om beter zicht op de eigen begripsmatige kennis van leerlingen te krijgen en om ze op basis daarvan verder te helpen.

6.4 De afpelbenadering in grote lijnen

Om de benadering nader in beeld te brengen wordt nu de in paragraaf 6.2 beschreven algemene oplossingscyclus voor het probleemoplossen als uitgangspunt genomen. Zoals hierboven reeds werd vastgesteld, kunnen de interventies uitgevoerd tijdens de diagnostische gesprekken zich soms beperken tot het stellen van vragen en het creëren van ophelderingen op 'lokaal niveau', dat wil zeggen op het 2F-niveau van de opgave in kwestie. Maar soms is het nodig om 'af te dalen' naar een lager niveau en om na te gaan of een leerling de opgave met steun van een concretisering of model wel kan oplossen; of nóg verder af te dalen en te achterhalen of deze eenvoudiger typen opgaven (bijvoorbeeld van 1F-niveau) wel begrijpt en kan oplossen (en hoe doet hij dit dan?); of zelfs om de aanwezigheid van onderliggende basiskennis te verifiëren (zoals de tienregel bij procenten) om pas van daaruit de nodige ondersteuning te bieden. Het afpellen vindt in zijn algemeenheid dus in etappes plaats waarbij een leraar al naar gelang de situatie en de reacties van de leerlingen steeds verder afpelt en vanaf een bepaald moment weer begint met opbouwen. Al met al leidt dit tot het beeld van een spiraalsgewijs 'afdalende' diagnostische activiteit in de trant van figuur 63.



Figuur 63. Overzicht van de afpelbenadering.

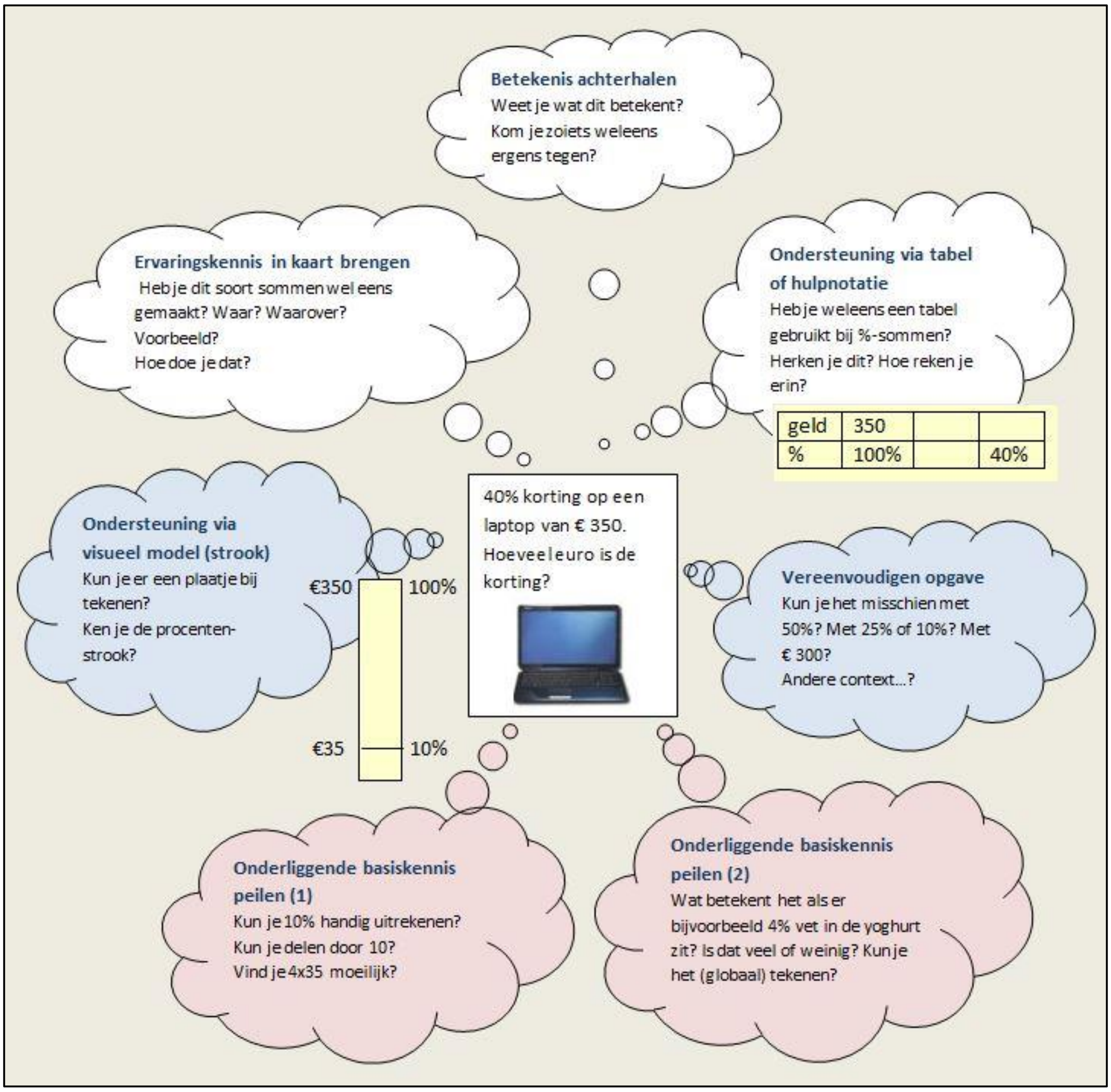
Het vertrekpunt ligt in het bespreken van het probleem op zich en van de pogingen die leerlingen al ondernomen hebben om tot een oplossing te komen. Als blijkt dat er in deze oriëntatie op de situatie op zich geen knelpunten liggen, dan kan de leraar besluiten om een stap verder te gaan met afpellen door de opgave te vereenvoudigen en na te gaan of de leerlingen in staat zijn om deze vereenvoudigde opgaven op te lossen. Blijken deze opgaven wel goed oplosbaar voor de leerlingen, dan kan de leraar onderzoeken of de leerlingen de oorspronkelijke opgave met hulp van een schema, model of concretisering aan kunnen. Mocht dit ook geen soelaas bieden, dan kan verder afgepeld worden. Enzovoort. Aldus kan een steeds rijker beeld ontstaan van het eigen kennisniveau van de leerlingen en van de aanknopingspunten die dat biedt om ze stappen verder te helpen.

Structurering van de interventies in een 'wolkenschema'

Bij het in de vorige paragraaf beschreven experiment werd ook besproken in hoeverre het wenselijk is om de afpelbenadering uit te werken in een vast stappenplan waarbij volgens een vaste opeenvolging van interventies gewerkt wordt om de benadering uit te voeren. Duidelijk werd dat zo'n stappenplan in principe niet gewenst is. Elke situatie is immers weer anders. Bovendien ga je als leraar bij het stellen van vragen en het doen van interventies veelal toch vooral op je eigen intuïtie en je eigen kennis van het onderwerp af.

Wel bleek dat leraren in globale zin meestal grotendeels op een vergelijkbare manier te werk gaan. Vrijwel altijd wordt begonnen met vragen over de betekenis van de situatie en over de eigen ervaringen van leerlingen met dergelijke opgaven. Daarna volgen vragen die erop gericht zijn om na te gaan of een leerling eenvoudigere maar vergelijkbare opgaven wel goed kan oplossen, en vragen bedoeld om te achterhalen of de opgave met hulp van een model of notatieschema opgelost kan worden. Enzovoort. Om deze globale structurering in beeld te brengen, werd een zogeheten wolkenschema ontwikkeld, zie figuur 64. Voor een bepaald type opgave kan dat schema nader ingevuld worden en vervolgens als globaal richtsnoer voor de verschillende afpelhandelingen fungeren[6].

[6] Een lege versie van het wolkenschema kan gedownload worden en voor trainingsdoeleinden ingezet: http://www.slo.nl/downloads/documenten/wolkenschema-leeg.docx/.



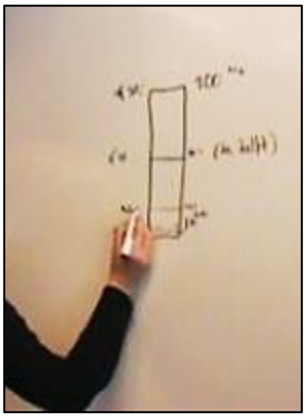
Figuur 64. Het wolkenschema.

6.5 Aandachtspunten bij het uitvoeren van de afpelbenadering

Een positief punt dat tijdens de evaluatie van de ervaringen met de afpelbenadering herhaaldelijk naar voren kwam, betreft het feit dat men zich als leraar bij het uitvoeren van de benadering beter bewust wordt van het feitelijke kennisniveau van de leerlingen in kwestie en van de lacunes en knelpunten daarbinnen. Niet alleen kan deze informatie nuttig zijn om leerlingen verder te helpen, maar ook kan deze bij het geven van rekeninstructie aan de hele klas (of delen daarvan) ingezet worden om beter te kunnen aansluiten bij die eigen kennis van leerlingen. Zodoende kan ervoor gezorgd worden dat de instructie een meer interactief karakter krijgt en dat er beter geanticipeerd wordt op mogelijke lacunes. Ook kan dit ertoe bijdragen dat een leraar juist dat schema of model introduceert waarmee de leerlingen het meeste geholpen zijn.

Een tweede punt dat eveneens herhaaldelijk naar voren kwam heeft betrekking op het feit dat het in teamverband uitwisselen van ervaringen bij het beproeven van de afpelbenadering als zeer waardevol wordt ervaren. Zo kan binnen de groep leraren een vruchtbare dialoog tot stand komen over allerlei aspecten van het eigen onderwijs, zoals de wijze waarop men instructie geeft, de wijze waarop men probeert hulp te bieden, de keuzes die men in de te behandelen leerstof maakt, enzovoort. In de teambespreking die in paragraaf 6.3 is beschreven, ontstond bijvoorbeeld een discussie over de vraag hoe de doorlopende leerlijn op het gebied van Inhoud in de loop van klas 1 en 2 versterkt zou kunnen worden, rekening houdend met het feit dat deze grootheid voor nogal wat leerlingen in het basisonderwijs maar zeer beperkt aan de orde is geweest, terwijl deze ook binnen het vmbo zowel in de wiskundemethode als in de rekenmethode veelal slechts summier behandeld wordt. Daarnaast wordt alleen al het kennis nemen van de wijze waarop men gepoogd heeft meer zicht te krijgen op de eigen kennis en strategieën van leerlingen, vaak als waardevol ervaren.

Het was echter niet altijd even makkelijk om de afpelbenadering goed uit te voeren. Zo bleken nogal wat leraren, als ze zich geconfronteerd zagen met problemen bij leerlingen, vrij sterk geneigd om niet zozeer op zoek te gaan naar de eigen kennis en strategieën van leerlingen, maar meer om direct over te gaan tot het geven van instructie. Op zich is dit een begrijpelijke reactie omdat men als leraar in de klassikale lessituatie vaak niet de tijd heeft om uitgebreid stil te staan bij de vraag waar voor een leerling de problemen nu precies liggen. Maar de aldus gegeven instructie heeft vaak maar een beperkt effect omdat deze te weinig gebaseerd is op de eigen kennis van de leerlingen en te weinig gericht is op de versterking van het begrip dat de leerlingen al hebben. Het is dus aan te bevelen om als leraar bij het beproeven van de afpelbenadering als het ware even uit de 'instructiemodus' te stappen en de gelegenheid te baat te nemen om echt te proberen 'af te pellen'. Bij herhaling bleek hoe lonend dit kan zijn voor de daarop volgende opbouwactiviteiten.
Een tweede aandachtspunt betreft het feit dat het belangrijk is om een goed idee te hebben van de leerlijnen waarbinnen de rekenopgaven gesitueerd zijn. Zoals in voorafgaande hoofdstukken is aangegeven, kan het zijn dat leerlingen binnen de leerlijn procenten nog niet zo ver gevorderd zijn en dat een goed beeld van deze leerlijn kan helpen om samen met de leerlingen enkele stappen terug te gaan. Daarbij kan de strook als ondersteunend model goede diensten bewijzen. (Zie figuur 65).



Figuur 65. Gebruik strook als ondersteunend model.

Gesprekstechnieken bij het uitvoeren van een diagnostisch gesprek
Een aandachtspunt van meer algemene betekenis heeft betrekking op de vraag hoe het voeren van diagnostische gesprekken het beste kan plaatsvinden, in het bijzonder wat betreft de daarbij te gebruiken gesprekstechnieken. Het bleek lang niet altijd even makkelijk de goede vragen te stellen, zich in te leven in wat de leerlingen inbrachten, en zo nodig dóór te vragen als een leerling met onduidelijke antwoorden op de proppen komt. Tot besluit van dit hoofdstuk zetten we daarom enkele van deze technieken op een rij. Ze zijn afkomstig uit een bekend diagnostisch instrument voor het basisonderwijs, namelijk de Kwantiwijzer (Van Eerde, 1998) alsmede de ideeën over de 'vertaalcirkel' (Borghouts, 2010; 2011).

Techniek 1 Vragen gericht op 'hardop denken' of terugblikken
Veel gebruikte technieken om te achterhalen hoe iemand denkt of gedacht heeft, zijn gericht op het uitlokken van 'hardop denken' of terugblikken. Bij hardop denken vraagt men iemand letterlijk om hardop te denken tijdens het oplossen van een opgave. De hierbij verkregen observaties geven soms al een tamelijk volledig beeld van het handelen van een leerling. In zo'n geval is het veelal ook niet nodig daarover achteraf nog vragen te stellen. Echter, dit hardop denken is niet altijd eenvoudig voor leerlingen. Daarom is men als leraar nogal eens aangewezen op een vorm van terugblikken.
Daarbij vraagt men iemand achteraf wat hij gedacht heeft tijdens het oplossingsproces: 'Hoe heb je het gedaan?', 'Wat heb je gedacht?'. Soms is het stellen van een enkele vraag voldoende om erachter te komen hoe een leerling een opgave oploste. Maar men hoeft niet te verwachten dat een leerling altijd meteen goed weet te verwoorden wat hij gedacht heeft.

Techniek 2 Doorvragen
Leerlingen kunnen soms moeilijk verwoorden wat ze gedacht hebben en geven dan vage antwoorden zoals: 'Dat kan ik niet goed uitleggen' of 'Ik heb het in m'n hoofd gedaan'. Maar soms geven ze ook wel vage antwoorden als ze eigenlijk niet goed meer weten hoe ze een opgave opgelost hebben. Als een leerling na de vraag: 'Hoe heb je het gedaan?' niet of niet duidelijk antwoordt, is het aan te bevelen om door te vragen. Dit is een techniek om erachter te komen wat een leerling bedoelt, wanneer niet duidelijk is wat hij eerder verteld heeft. Het gaat om het stellen van open vragen op een zodanige wijze, dat de leerling meer over zijn oplossingswijze vertelt of meer daarvan laat zien. Daarbij kan het beste zoveel mogelijk aangesloten worden bij wat de leerling zelf zegt.

Techniek 3 Reflectie uitlokken
Ter afwisseling van het vragen stellen, kan ook een techniek toegepast worden die indirect informatie kan geven over de werkwijzen van een leerling, namelijk door reflectie uit te lokken. Deze techniek richt zich erop de leerling met eigen werkwijzen of die van anderen te confronteren. Men kan dit op allerlei manieren aanpakken. Bijvoorbeeld door het stellen van vragen als: 'Weet jij nog een andere manier om zo'n opgave uit te rekenen?', of 'Welke van deze opgaven vind jij de moeilijkste/makkelijkste? Waarom?'.
Maar het kan ook anders. Zo kan men een leerling vertellen hoe men denkt dat deze een bepaalde opgave heeft uitgerekend. Daarbij kan eventueel opzettelijk een andere werkwijze beschreven worden dan degene die de leerling vermoedelijk gevolgd heeft. Ook kan men vertellen hoe een andere (denkbeeldige) leerling dezelfde opgave laatst heeft uitgerekend, en de leerling vragen wat het van die oplossingswijze vindt.

Het is in het kader van het afpellen uiteraard niet altijd nodig om al dergelijke gesprekstechnieken consequent in te zetten. Maar mocht het niet direct lukken om goede informatie van een leerling te krijgen, dan kan het nuttig zijn enkele van deze technieken te beproeven.

7. Handreikingen voor de onderwijspraktijk

7.1 Het leerplan als lappendeken

In het voorgaande is op verschillende plaatsen naar voren gekomen dat het rekenleerplan zoals dat voor leerlingen uit de doelgroep van zwakkere bb- en kb-leerlingen gewenst is, gezien kan worden als een soort lappendeken, en dat het samenstellen, uitvoeren en evalueren van zo'n leerplan als een 'lappendekenbenadering' getypeerd kan worden. In het voorbeeld in hoofdstuk 3 (paragraaf 3.5) is geïllustreerd wat daarmee bedoeld wordt. Het gaat om een leerplan:

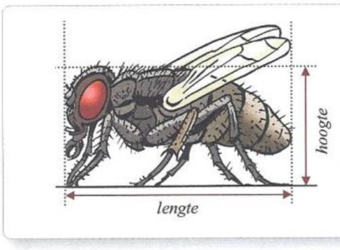
- dat gericht is op het leren oplossen van contextopgaven op 2F-niveau; en op het vlot kunnen uitrekenen van elementaire kale rekenopgaven zoals vastgelegd in het referentiekader;
- waarbij het accent in klas 1 en 2 ligt op het alsnog doorlopen van een aantal doorlopende leerlijnen terwijl in klas 3 en 4 de nadruk ligt op het steeds efficiënter leren oplossen van 2F-opgaven;
- waarbij interactieve instructie een essentieel element van de lessen vormt (en de nadruk dus niet op zelfstandig oefenen ligt);
- waarbij de leraar selectief gebruik maakt van het materiaal uit de rekenmethode, de oefenboeken en het digitale materiaal; en deze zo nodig aanvult met zelf verzamelde of gemaakte materialen.

Dat het wenselijk is om systematisch aandacht te besteden aan het steeds efficiënter leren oplossen van 2F-opgaven zoals die in de rekentoets voorkomen, is ook reeds besproken. In de rekenboeken komen immers wel regelmatig dergelijke opgaven voor, maar dan vooral in een opbouw met a-, b- en c-onderdelen waarbij stapsgewijs naar de uiteindelijke vraag toegewerkt wordt (zie figuur 66). Terwijl de leerlingen bij de opgaven uit de 2F-toets altijd maar één centrale vraag krijgen voorgelegd en daarbij zelf de nodige tussenstappen dienen te bedenken.

Reken uit.
De huisvlieg is in werkelijkheid 8 mm lang.
a Hoeveel mm is de lengte van de vlieg op de foto?

b Op welke schaal is de foto van de vlieg?

c Bereken de hoogte van de vlieg in werkelijkheid.



Figuur 66. Voorbeeld opgave met opbouw in onderdelen. Bron opgave: NU Rekenen, Leerwerkboek B. Groningen, Noordhoff, 2012.

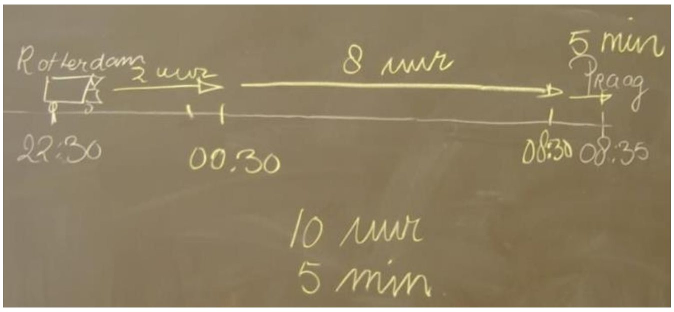
Het zal duidelijk zijn dat het samenstellen en actueel houden van een dergelijk leerplan een flinke inspanning van leraren vraagt die eigenlijk alleen in teamverband goed uitgevoerd kan worden, bij voorkeur onder (bege-)leiding van een rekencoördinator. Daarbij kan het soms, zoals de ervaringen op een aantal pilotscholen laten zien, een kwestie van vallen en weer opstaan zijn. Bijvoorbeeld als doelen te hoog gesteld worden, als te snel naar formalisering gestreefd wordt of als de basiskennis van de leerlingen te hoog is ingeschat.

In principe kan bij zo'n leerplan een rekenmethode als 'ruggengraat' fungeren. Maar zoals in hoofdstuk 3 is vastgesteld, voorzien de huidige rekenmethoden niet voldoende in de leerbehoeften van de groep van zwakkere bb- en kb-leerlingen. In paragraaf 3.5 werd vastgesteld waar de schoen met name wringt:

- weinig aandacht voor 'aanvullende begripsvorming';
- weinig aandacht voor korte, frequente oefenactiviteiten rond basiskennis en elementair hoofdrekenen;
- weinig aandacht voor het gebruik van schema's en modellen ter ondersteuning van het oplossingsproces;
- weinig ruimte voor 'onderhoudsactiviteiten' waarbij de kennis opgedaan in voorafgaande hoofdstukken wordt onderhouden en geconsolideerd.

De ervaring leert dat het vooral de opstart van het werk aan een dergelijke lappendeken is die nogal wat voeten in de aarde heeft. Het vraagt immers nogal wat van leraren om de methode niet 'van kaft tot kaft' te volgen maar om daaruit, in overleg met collega's, selecties te maken en deze aan te vullen met additionele materialen en activiteiten. Maar als het proces eenmaal op stoom is gekomen, dan blijkt het toch wel mee te vallen. Bovendien blijkt het in hoge mate lonend te kunnen zijn: scholen die op basis van een goede inschatting van wat er op 2F-niveau van de leerlingen gevraagd wordt en op basis van het zelf selecteren en gebruiken van geschikte lesmaterialen hun leerplan vormgeven, blijken vaak goede tot zeer goede resultaten bij de rekentoets te boeken.

In dit laatste hoofdstuk worden, in aanvulling op wat er in de voorafgaande hoofdstukken is beschreven, drie handreikingen gegeven die behulpzaam kunnen zijn bij het samenstellen en uitvoeren van het leerplan. Dit betreft in de eerste plaats een lesmodel dat bedoeld is als aanvulling op andere, gangbare lesmodellen. Verder worden enkele praktische suggesties gegeven voor het op een meer interactieve manier gebruiken van digitale oefenprogramma's. En ten slotte wordt een vijftal meer algemene aandachtspunten beschreven voor het opzetten van het eigen rekenonderwijs, zoals het stimuleren van het gebruik van schematische voorstellingen van situaties. (Zie figuur 67.)

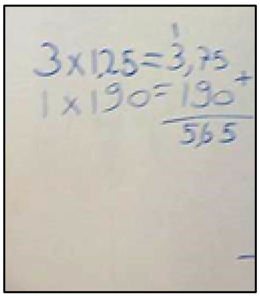


Figuur 67. Schematische voorstelling bij een opgave waarin berekend moet worden hoe lang een treinreis van Rotterdam naar Praag duurt.

7.2 Lesmodel voor een interactieve rekenles

Hoe kan de opzet van een rekenles eruit zien? In de praktijk blijkt die opzet soms niet zoveel te verschillen van die van de wiskundeles. Het begint dan met het bespreken van het door de leerlingen gemaakte huiswerk, waarbij aan bod komt hoe je de betreffende opgaven kunt oplossen en wat voor moeilijkheden zich daar mogelijk bij voordoen. Daarna geeft de leraar een toelichting op de nieuwe leerstof waarbij veelal theorie behandeld wordt. Vervolgens is er een individuele verwerking waarbij de leerlingen individueel of in tweetallen proberen om de bij de theorie behorende opgaven op te lossen. De les wordt afgesloten met het opgeven van huiswerk voor de volgende keer.

Een variant op deze opzet doet zich voor op scholen met een sterk heterogene leerlingenpopulatie. De leerlingen werken dan soms individueel uit het rekenboek; ze zijn door de verschillen in tempo en niveau met verschillende leerstof bezig. De begeleiding en instructie is dan veel meer op de individuele leerling (of op kleine groepen leerlingen) gericht en niet zozeer op het met de hele klas bespreken van de leerstof. Een mogelijk nadeel van deze laatste opzet is dat het sociale aspect van het onderwijsleerproces enigszins in het gedrang komt. De leerlingen kunnen immers ook veel van elkaar leren, zeker als daartoe in de klas van tijd tot tijd besprekingsmomenten plaatsvinden waarbij één leerling op het bord demonstreert hoe hij te werk is gegaan terwijl de overige leerlingen commentaar leveren en alternatieve strategieën aandragen. Het verwoorden van oplossingswijzen komt zodoende ook meer onder de aandacht, hetgeen de leraar waardevolle informatie geeft over de manier van denken van leerlingen. Ter afsluiting kan de leraar nog eens de nadruk kan leggen op een bepaalde basisstrategie of op de mogelijkheid een bepaald model ter ondersteuning van het oplossingsproces te gebruiken. (Zie figuur 68.)



Figuur 68. Bordnotatie van een leerling, die een combinatie van hoofdrekenen en cijferend optellen laat zien om een betaalopgave uit te rekenen.

In paragraag 4.5 en 5.5 zijn twee voorbeelden gegeven van zo'n meer interactieve lesopzet. Dat betrof een opzet waarbij de les begon met korte oefenactiviteiten rond respectievelijk het schatten en meten van het gewicht van objecten met een keukenweegschaal; en het gebruik van de tienregel voor het delen (€35,- : 10 = ...). Daarna volgde een uitgebreidere activiteit waarbij een centrale opgave (c.q. reeks opgaven) eerst gezamenlijk werd verkend en waarbij de leerlingen aansluitend zelf poogden om deze opgave(n) op te lossen. De les eindigde met een nabespreking waarin de leerlingen naar voren brachten hoe ze te werk waren gegaan en tot wat voor oplossingen ze waren gekomen. Meer in het algemeen ziet deze opzet er uit als in figuur 69.

<table>
<tr><td colspan="2">Lesmodel rekenen (50 minuten les)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Even oefenen: hoofdrekenen of automatiseren (10 min.)
Schriftelijk en mondeling productief oefenen van stof die de leerlingen tot op zekere hoogte beheersen, maar die nog verder geoefend dient te worden.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Introductie en bespreking centrale opgave(n) (10 min.)
De leraar introduceert de gekozen voorbeeldopgave en bespreekt deze interactief ; dit kunnen opgaven zijn op het terrein van breuken, procenten, meten, kommagetallen, meetkunde of verhoudingen. Eventueel wordt een tweede vergelijkbare opgave besproken.

In het geval van meten of meetkunde deelt de leraar de opdracht(en) uit, bespreekt deze kort en laat deze door de leerlingen (met materialen) uitvoeren.</td></tr>
<tr><td>Zelfstandig verwerken (20 min.)
De leerlingen, die zelfstandig aan de slag kunnen gaan, maken de verwerkingsopgaven zelfstandig (of in groepjes). Indien er tijd over is gaan deze leerlingen aan de slag met aanvullende opdrachten.</td><td>Extra ondersteuning
Leerlingen, die nog moeite met verwerkingsopgaven hebben, krijgen aanvullende instructie en ondersteuning. Het ‘afpellen’ kan hierbij centraal staan. Na een korte samenvatting door de leraar, gaan ook deze leerlingen zelfstandig aan de slag.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eventueel: tussenbespreking
Tijdens de verwerking kan een moment genomen worden om gezamenlijk een opgave even onder de loep te nemen en een tussenstand op te maken.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nabespreking (10 min.)
Korte nabespreking met de hele klas:
• Nabespreking van de inhoud
• Evaluatie werkgedrag
• Eventueel maken van aanvullende afspraken
Ten slotte: vooruitblik naar de volgende les</td></tr>
</table>

Figuur 69. Lesmodel rekenen.

Kenmerkend voor dit model is dat de les begint met een korte oefenactiviteit van zo’n 10 minuten waarin bijvoorbeeld de tafels, het rekenen tot 100 of de tienregel aan de orde komt. Daarna volgt een klassikale verkenning van de centrale opgave(n). Dit kunnen opgaven zijn uit een actueel domein zoals breuken, procenten of verhoudingen, maar ook opgaven uit de 2F-toets. Er kan besproken worden waar deze opgave(n) betrekking op heeft (hebben), wanneer zulke opgaven al eerder aan de orde zijn geweest en wat de leerlingen er al vanaf weten. Geeft dit hen voldoende houvast, dan kan de verwerking van start gaan waarbij ze zelf verder uitzoeken hoe je tot een oplossing kunt komen. Mogelijk zijn er leerlingen die toch nog problemen hebben, deze kunnen dan in een klein groepje of individueel extra instructie of ondersteuning krijgen. De les sluit af met een bespreking van de resultaten van de verwerking, waarbij een leerling z’n oplossing op het bord kan noteren (of de leraar dit doet) en waarbij de overige leerlingen commentaar leveren, met alternatieven komen, enzovoorts. Tot slot kan de leraar resumeren wat de leerlingen in deze les geleerd hebben.
Uiteraard hoeft het ene lesmodel het andere niet uit te sluiten. Juist door een combinatie van lesmodellen met een zekere afwisseling te hanteren, kan de leraar ervoor zorgen dat er de nodige variatie in de lessen zit en dat het er levendig aan toe blijft gaan terwijl er toch voldoende

‘rustmomenten’ zijn waarop iedereen zelfstandig aan de slag is. Binnen de lessen kunnen computerprogramma’s uiteraard ook een waardevolle functie hebben. In de volgende paragraaf gaan we daar nader op in.

7.3 Interactief oefenen met een digitaal programma

Sinds enige tijd is er op internet een grote verscheidenheid aan programma’s te vinden waarmee allerlei rekenvaardigheden geoefend kunnen worden. Voor het overgrote deel gaat het daarbij om het oefenen van kale opgaven met hele getallen uit het getallengebied tot 1000 (en daarboven) zoals optellen en aftrekken tot 100 (27+35, 25-16), tafels van vermenigvuldiging en deeltafels (5x7, 8x6; 40:8, 72:9) en daarvan afgeleide opgaven met grotere getallen. Veelal krijgt de gebruiker direct feedback over het al dan niet correct zijn van een uitkomst. Soms dient hij zelf een antwoord in te typen, soms moet er gekozen worden uit een aantal gegeven antwoordopties. Er zijn ook programma’s waarbij de opgaven in spelvorm gegeven worden, zoals bij de spellen van Rekenweb (www.rekenweb.nl). Deze spellen hebben betrekking op een groot scala aan onderwerpen, inclusief nogal wat meetkundige thema’s. Zie de voorbeelden in figuur 70.

Figuur 70. Spellen op www.rekenweb.nl.

Daarnaast zijn er enkele programma’s in omloop waarin contextopgaven centraal staan. De website Nieuwsrekenen (www.nieuwsbegrip.nl) van de CED-groep is daar een voorbeeld van. Wekelijks worden hier nieuwe contextopgaven getoond die betrekking hebben op de alledaagse actualiteit. De opgaven zijn bedoeld om het toepassen van allerlei vaardigheden in dergelijke situaties te oefenen. Dit kan individueel of met de hele klas samen als de opgaven op het digitale schoolbord worden weergegeven.
Sommige van de programma’s zijn vrij toegankelijk (Rekenweb is daar een voorbeeld van), maar voor nogal wat programma’s (waaronder Nieuwsrekenen en het hierna te bespreken Rekentuin) dient men als school een licentie aan te schaffen.

Op veel scholen worden al zulke programma’s ingezet om de rekenvaardigheid van leerlingen te verbeteren. Hoe effectief dat is, hangt onder meer af van de faciliteiten waarover een school beschikt. Vaak is er maar een beperkt aantal computers beschikbaar zodat niet alle leerlingen tegelijk aan een programma kunnen werken. Ook zijn de computers soms in een apart lokaal opgesteld zodat een kleine verhuizing nodig is om de leerlingen aan de slag te kunnen laten gaan. Kenmerkend is verder dat de leerlingen veelal individueel of in groepjes van twee aan een programma werken. Er is dus nauwelijks sprake van interactief gebruik terwijl daar wel degelijk kansen liggen als een oefenprogramma via het digitale schoolbord met de hele klas wordt gedaan. Zoals in de vorige paragraaf is betoogd, kan interactief oefenen immers een meerwaarde hebben wanneer er sprake is van een zekere uitwisseling van door de leerlingen gehanteerde strategieën, van het beargumenteren van de (on)juistheid van een strategie, van het door de leraar onderbouwen van een strategie met behulp van concreet materiaal of een model zoals de getallenlijn of de strook, enzovoorts. Van belang is daarbij dat niet alleen de leerling die de oefening voor het (digitale) bord uitvoert, actief betrokken is, maar ook de overige leerlingen in de klas. Deze dienen de opgaven tegelijkertijd op een blaadje of in het schrift te maken. Om dit goed en productief te laten verlopen, is het soms nodig om enige aanpassingen in het gebruik van een programma aan te brengen. Hierna wordt dit geïllustreerd voor Rekentuin, een programma dat op nogal wat vmbo-scholen in gebruik is.

Interactief werken met Rekentuin

Rekentuin is een programma waarmee kale opgaven uit het getallengebied tot 1000 en daarboven voor alle vier de hoofdbewerkingen geoefend kunnen worden. Als op een bepaald niveau wordt ingelogd, kan de leerling kiezen voor een bepaalde bewerking en krijgt hij een reeks opgaven voorgelegd die achtereenvolgens opgelost dienen te worden. Voor elke goed gemaakte opgave verdient hij een aantal punten. Bovendien geldt dat hoe sneller een leerling het goede antwoord heeft aangegeven, des te meer punten hij krijgt. Als een bepaald puntentotaal is bereikt, is de oefening afgelopen en wordt de score verwerkt in een soort persoonlijk dossier dat tot uitdrukking komt in het aantal 'bloemen' dat er in de (persoonlijke) rekentuin van de leerling voor deze bewerking staat . Bij sommige soorten opgaven moet de leerling zelf een antwoord intoetsen, maar bij veel opgaven dient hij te kiezen uit een aantal gegeven antwoordopties.

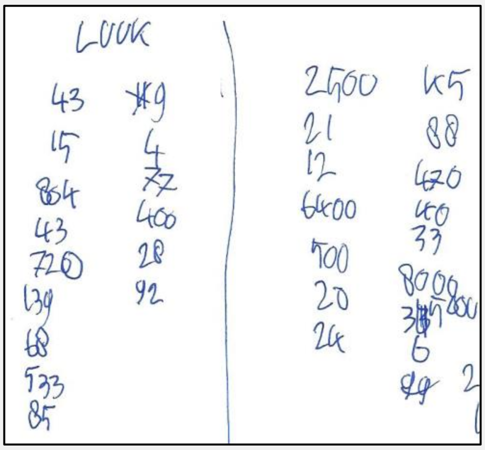
Arvid is voor het bord gekomen en heeft voor aftrekken gekozen, zie figuur 71).

Figuur 71. Een aftrekopgave uit Rekentuin. Bron: www.rekentuin.nl.

Alle leerlingen hebben een blaadje voor zich waarop ze de antwoorden van de opgeroepen opgaven noteren. Arvid zelf doet dit uiteraard in het programma. Vanaf een zeker moment (bij de zesde opgave) vraagt de leraar Arvid 'hardop te denken', zodat zij meteen beeld krijgt van de gehanteerde oplossingsstrategieën. Zelf noteert ze verder de opgeroepen opgaven, waardoor deze na afloop van de oefening nog even besproken kunnen worden.
(…)

840-701: 'Doe ik eerst 800 min 700, is 100; en dan 40 min 1 is 39; wordt 139.'
75-7: 'Haal ik er 5 af, dan nog 2, is het 68.
553-20: 'Doe ik eerst 550-20, is 530; dan die 3 er weer bij, 533.'
94-9: 'Haal ik er eerst 4 af, dan heb je bij die 9 nog 5; moet die van de 90 af, heb je 85 over.'
25-16: 'Van die 6 maak ik een 5, gaan er 5 af, heb je 20; en dan die 10 eraf, heb je 10 over; en dan doe ik er nog 1 bij, heb je 11.'
30-26: 'Doe ik er eerst 20 af, dan 6 af, heb je 4 over.'
85-8: 'Haal ik er 5 af, en dan 3, kom je op 77.'
771-371: '300 af van de 700, heb je 400; en 71-71 is 0, heb je 400.'
92-30: '90 en 30 eraf heb je 60; en doe ik er nog 2 bij, is 62.'

Ter afsluiting worden nu eerst de antwoorden gecontroleerd (niet alle leerlingen hebben bij elke opgave een antwoord, dus dat is even goed uitkijken, zie figuur 72).



Figuur 72. De antwoorden van een van de leerlingen bij twee van de reeksen opgaven uit Rekentuin.

Daarna vraagt de leraar bij twee opgaven waar nogal wat afwijkende antwoorden zijn geproduceerd, hoe de leerlingen deze hebben aangepakt. De tweede daarvan is 25-16 (die ook door de leerling voor het bord onjuist is opgelost).
Ruby: 'Eerst maakte ik 15 van die 16; dan doe je 25-15, dat is 10; en dan die ene er weer bij, dat is 11.'
Andere leerlingen: 'Ja, dat heb ik ook! (…) Nee, dat heb ik niet, ik heb 9.'
Leraar: 'Wat moet het nu zijn, 11 of 9? Wie kan dit uitleggen?'
Abdul: 'Ik deed 25-16, eerst 10 van die 25 af is 15; dan nog 6 eraf; eerst 5, dan zit je op 10, dan nog 1, kom je uit op 9' (leraar noteert deze strategie op het bord; andere leerlingen roepen: 'Ja, zie je wel, het is 9!').
Leraar: 'En wat ging er dan fout bij Arvid?'
Abdul: 'Eeh, bij die 10+1… Hij gaat één omhoog terwijl hij één omlaag moet.'
Leraar: 'En waarom moest hij nou één omlaag?'
Cindy: 'Nou…, als je 25 euro hebt en je moet er 16 betalen; dan kun je eerst 10 betalen, dan nog 5 en dan nog 1; dus dan gaat het omlaag (andere leerlingen lijken in te stemmen).'

Al met al zijn de leerlingen een klein kwartier intensief met deze oefening bezig geweest. Voor de leraar is het wel even intensief regie voeren omdat zij tegelijkertijd de gegenereerde opgaven moet noteren, moet observeren hoe de leerling voor het bord te werk gaat én erop moet toezien dat alle leerlingen goed meedoen. Maar dit maakt de oefening wel heel waardevol, juist omdat de verschillende strategieën bij een opgave als 25-16 besproken en tegen elkaar afgewogen worden.

7.4 Aandachtspunten bij het samenstellen van het lesprogramma

Eerder in dit hoofdstuk werd erop gewezen dat het samenstellen van een leerplan waarmee systematisch naar het 2F-niveau toegewerkt kan worden, een flinke inspanning van scholen vraagt. Ter ondersteuning van dat proces werd in hoofdstuk 3 al een globaal raamwerk voor zo'n leerplan geïntroduceerd. Daarin werd onder meer aangegeven dat het aanbeveling verdient om de nadruk in klas 1 en 2 op het alsnog doorlopen van een aantal essentiële doorlopende leerlijnen (zoals breuken, procenten, meten en verhoudingen) te leggen, terwijl het onderwijs in klas 3 en 4 het beste gericht kan worden op het steeds efficiënter leren oplossen van 2F-opgaven zoals die in de rekentoets veel voorkomen. In deze paragraaf gaan we een stap verder door een vijftal aandachtspunten voor het samenstellen van een goed lesprogramma te presenteren – aandachtspunten die op enkele pilotscholen ertoe hebben bijgedragen dat er geleidelijk aan steeds betere resultaten werden geboekt. In samenhang daarmee wordt er een suggestie voor een halfjaarplan gegeven waarin de voornaamste keuzes vastgelegd kunnen worden. Hierna volgen eerst de vijf aandachtspunten met een korte toelichting. Daarna volgt het schema voor het halfjaarplan.

Vijf aandachtspunten bij het samenstellen van een rekenprogramma
Kort gezegd komen deze vijf punten op het volgende neer:

1. breng voldoende afwisseling aan in de domeinen binnen de rekenles;
2. bouw regelmatig korte hoofdrekenactiviteiten in de les in;
3. houd geregelde interactieve instructiemomenten gebaseerd op doorlopende leerlijnen;
4. integreer de rekenmachine in het onderwijs in de zin dat u de leerlingen op veel momenten zelf laat beslissen of ze de machine willen inzetten of niet;
5. bouw regelmatig herhalingsmomenten in waarbij zaken die de voorafgaande maanden aan bod zijn geweest, cyclisch terugkomen.

Ad 1: Afwisseling in de domeinen
De huidige praktijk binnen het vmbo laat zien dat er veelal een sterk accent gelegd wordt op het domein Getallen. Veel leerlingen in de bb- en kb-richting zijn echter in hun basisschoolperiode al zeer frequent met dit domein geconfronteerd, en dan vooral op het terrein van de basisvaardigheden en cijferen. Juist het weghalen van het accent op dit domein, kan er toe leiden dat leerlingen weer succes gaan ervaren en meer gemotiveerd raken, bijvoorbeeld als ze zich bewust worden dat ze in het praktische meten wél goed zijn, zie figuur 73.

Figuur 73.

Dat kan in klas 1 en 2 door niet te lang achter elkaar met Getallen bezig te zijn en dit regelmatig af te wisselen met de andere domeinen. Hiermee wordt de '1F-valkuil' vermeden waarbij leerlingen op grond van magere resultaten bij een 1F-instaptoets gedurende lange tijd (soms wel twee jaar) voornamelijk met het domein Getallen bezig zijn en daarbij enigszins dreigen te verzanden in eindeloze oefeningen rond het inslijpen van de standaardprocedures voor de vier hoofdbewerkingen met hele getallen, breuken en kommagetallen terwijl deze procedures maar van beperkt belang zijn voor het bereiken van 2F.

Ad 2: Hoofdrekenactiviteiten inbouwen
Iedere rekenles kan het best gestart worden met een korte hoofdrekenactiviteit. Deze activiteit is bedoeld om de basale rekenkennis te versterken en te verdiepen. De kern hierbij is het vlot, handig en flexibel met getallen rekenen zonder daarbij de rekenmachine te gebruiken. Hierbij ligt een accent op basisvaardigheden als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen tot 100/1000 zoals beschreven in hoofdstuk 4. Maar er kan ook aandacht besteed worden aan elementair getalbegrip. Bijvoorbeeld: hele getallen of kommagetallen op een getallenlijn plaatsen (en leerlingen laten motiveren waarom een getal op een bepaalde plaats thuishoort), grote geldgetallen uitspreken en noteren (eventueel ook representeren met namaakgeld op het digitale schoolbord), enzovoorts. Een aantal suggesties voor het nader invullen van zulke activiteiten zijn te vinden in de lesmap *Verder met rekenen*.

Ad 3: Regelmatige interactieve instructiemomenten houden
Het belang hiervan is in het voorafgaande op verschillende plaatsen al benadrukt. Voor veel leerlingen zijn de leerprocessen rond bijvoorbeeld breuken, procenten en meten in de basisschool nog verre van afgerond. Het is dan dus geen kwestie van het onderhouden van reeds verworven kennis, maar van het alsnog verwerven van zulke kennis. Aansluiten bij wat de leerlingen al van het betreffende onderwerp weten en bij de wijze waarop dit onderwerp in het basisonderwijs aan de orde komt, is aan te bevelen. Voor een aantal suggesties voor de manier waarop zulke interactieve instructie opgebouwd kan worden kan de handleiding van rekenmethoden in het basisonderwijs geraadpleegd worden. Ook de lesmap *Verder met Rekenen*, bestemd voor klas 1 van het vmbo, biedt een groot aantal suggesties.

Ad 4: Integratie van de rekenmachine in het onderwijs
In sommige rekenmethoden en oefenboeken is de rekenmachine grotendeels of geheel uitgebannen. Dat dit niet de aangewezen weg is, blijkt wel uit het feit dat de machine bij de contextopgaven uit de rekentoets volop ingezet kan worden. Ook voor het goed functioneren in onze samenleving is het verstandig met de machine kunnen omgaan van grote waarde. Voor het onderwijs is de uitdaging dan ook om de leerlingen enerzijds steeds verder vertrouwd te maken met elementair hoofdrekenen en schattend rekenen (zie punt 2) zonder dat de machine gebruikt mag worden en anderzijds bij contextopgaven zoveel mogelijk zelf te laten beslissen in hoeverre ze de machine gebruiken. Dit betekent onder meer dat bij de bespreking van de gehanteerde oplossingswijzen van zulke opgaven ook aan de orde komt wanneer het handig is om de machine in te zetten. Ook kan aan bod komen dat de machine in sommige situaties (zoals bij het rekenen met digitale tijd) juist helemaal geen soelaas biedt. Daarnaast is het aan te bevelen om de leerlingen vertrouwd te maken met het idee dat het vaak handig is om te kiezen voor een combinatie van zelf rekenen en de machine gebruiken, maar daarbij dan wel de voornaamste uitgevoerde handelingen ook op papier te noteren.

Ad 5: Regelmatige herhalingsmomenten inbouwen
Rekenmethoden zijn doorgaans zodanig opgebouwd dat een onderwerp als 'Gehele getallen', 'Procenten' of 'Breuken' in een bepaald hoofdstuk intensief aan de orde komt terwijl het daarna vaak lang duurt (soms wel een half jaar) voordat dit terugkomt. In sommige gevallen is er aan elk hoofdstuk nog wel een paragraaf 'Gemengde opgaven' toegevoegd, maar deze opgaven hebben veelal vooral betrekking op de leerstof uit het onderhavige hoofdstuk. Voor de leerlingen uit de doelgroep is het echter van essentieel belang dat er regelmatig 'onderhoudsmomenten' plaatsvinden waarbij belangrijke vaardigheden uit voorafgaande hoofdstukken terugkomen. Daarom is het essentieel zulke momenten structureel in het programma in te bouwen.

Het schema in figuur 74 kan gebruikt worden om het rekenprogramma per half jaar globaal aan te geven. Dit schema kan gedownload en digitaal ingevuld kan worden: http://www.slo.nl/downloads/documenten/planningsschema-leerplan.docx/.

	Leerstofinhoud			Lesmateriaal		Aandachts-punten instructie	Toetsing
	Hoofd-onderwerp	*Onderhouds-activiteiten*	*Oefenen Hoofdrekenen e.d.*	Rekenmethode/ Wiskunde-methode	Additionele materialen		
Sept							
Okt							
Nov							
Dec							

Figuur 74. Planningsschema rekenprogramma.

Literatuur

Blum, W. (2012). *Quality teaching of mathematical modelling – what do we know, what can we do?* (lect.). Seoul: ICME. Verkregen van Prof. W. Blum.

Borghouts, C. (2011/2012). De vertaalcirkel. Serie artikelen in: *Volgens Bartjens 31*(2, 3, 4, 5.

Bokhove, J., Buijs, K., Keyzer, R., Lek, A., Noteboom, A., & Treffers, A. (1996). *De Breukenbode. Een leergang voor de basisschool.* Enschede/Utrecht: SLO/FI/Cito.

Bosker, R. & Van de Vorle, R. (red.) (2014) *Advies over de uitwerking van de referentieniveaus 2F en 3F voor rekenen in toetsen en examens.* Enschede, SLO.

Buijs, K. & Zwaart, P. van der (2010). *Verder met Rekenen*. *Lespakket Rekenen-wiskunde voor de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo.* Enschede: SLO.

Cito (2012). *Voorbeeldtoets 2F 2012*. Verkregen 11 februari 2014 van www.cito.nl

Cito (2013). *Voorbeeldtoets 2F 2013.* Verkregen 11 februari 2014 van www.cito.nl

College voor Examens (2013). *Rapportage 2012-2013 Invoering centrale toetsing en Examinering Referentieniveaus Nederlandse taal en Rekenen*. Verkregen 11 februari 2014 van www.rijksoverheid.nl/

Dekker, T. & Schmidt, V. (2011). *Rekentoetswijzer 2F.* Enschede: SLO.

Eerde, D. van (1996). *Kwantiwijzer. Diagnostiek in reken-wiskundeonderwijs* (Proefschrift Universiteit Utrecht). Tilburg: Zwijsen.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen.* Enschede: SLO.

Groenestijn, M. van, Borghouts, C., & Janssen C. (2011). *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie.* Assen: Van Gorcum.

OCW (2013). *Derde voortgangsrapportage implementatie referentiekader taal en rekenen*. Den Haag: OCW.

OECD (2009). *PISA 2009 Assessment Framework.* Paris: OECD.

Pólya, G. (1971). *How to solve it* (2nd edition). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schmidt, V. (2011). *Overzicht resultaten digitale enquête 'Onderweg naar 2F'* (Interne notitie). Enschede: SLO.

Schmidt, V. (2013). *Notitie voor Kamercommissie* (Interne notitie). Enschede: SLO.

Wijers, M. (2011). Rekenen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs in historisch perspectief. In: Schmidt, V. (red.). *Rekenen: op niveau komen en blijven: handreiking bij beleidsvorming en verbetering van een rekencurriculum in de onderbouw van het voortgezet onderwijs* (p.p. 43-54). Enschede: SLO.

SLO heeft als nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling een publieke taakstelling in de driehoek beleid, praktijk en wetenschap. SLO heeft een onafhankelijke, niet-commerciële positie als landelijke kennisinstelling en is dienstbaar aan vele partijen in beleid en praktijk.

Het werk van SLO kenmerkt zich door een wisselwerking tussen diverse niveaus van leerplanontwikkeling (stelsel, school, klas, leerling). SLO streeft naar (zowel longitudinale als horizontale) inhoudelijke samenhang in het onderwijs en richt zich daarbij op de sectoren primair onderwijs, speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs en beroepsonderwijs. De activiteiten van SLO bestrijken in principe alle vakgebieden.

SLO

Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
E info@slo.nl

www.slo.nl

Foto omslag: humantouchphoto.nl

slo