Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten

Implementatie examenprogramma's havo-vwo 2015

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

slo

Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten

Implementatie examenprogramma's havo-vwo 2015

Oktober 2014

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

Auteur: Anne van Streun
Eindredactie: Nico Alink, Jos Tolboom

Met medewerking van: Piet Versnel, Hielke Peereboom, Harm Bakker, Bert Wikkerink, Paul Drijvers, Peter Vaandrager, Marja Bos, Peter van Wijk

Informatie
SLO
Afdeling: Tweede fase
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 661
Internet: www.slo.nl
E-mail: tweedefase@slo.nl

AN: 3.6657.613

Samenvatting

De doelen van wiskundeonderwijs zijn dat leerlingen in hun langetermijngeheugen een samenhangend kennisbestand van wiskundige begrippen en vaardigheden verwerven en in staat zijn hun wiskundige kennis en vaardigheden toe te passen in situaties die enig eigen denken vereisen. In deze publicatie staat het stimuleren van dat eigen denken centraal met de kanttekening dat leerlingen uit de verschillende doelgroepen zeker een stevig repertoire aan wiskundige kennis en vaardigheden paraat moeten hebben. In hoofdstuk 2 en verschillende voorbeelden uit hoofdstuk 3 wordt daar expliciet op gewezen.

Bekijken we op enige afstand het gehele complex van wiskundige denkactiviteiten, dan valt op dat er twee hoofdlijnen zijn: probleemoplossen en abstraheren. De noodzaak van het leren aanpakken van een probleem, een voor die leerling nieuwe situatie, ligt aan de basis van elke probleemaanpak. Dat heeft te maken met het analyseren van de gegeven situatie, het transformeren van het doel, een eerste aanpak bedenken, verwante problemen zoeken, visualiseren of getallenvoorbeelden doorrekenen (paragraaf 4.2). De docent kan, in de demonstratie van een eigen probleemaanpak en in het doorvragen zonder iets weg te geven, model staan voor de leerlingen.

Het kunnen probleemoplossen is wel noodzakelijk maar lang niet altijd voldoende voor het adequaat aanpakken en oplossen van een ervaren probleem. In veel situaties is het nodig om de 'diepte' in te gaan door terug te grijpen op het onderliggende wiskundige concept, zoals variabele, afgeleide, enzovoort. We noemen dat abstraheren (paragraaf 4.3), waar bij het redeneren met de eigenschappen van formules, functies, afgeleide functies, integralen en in contexten een beroep op wordt gedaan. Zoals de geciteerde docenten uiteen hebben gezet begint die leerlijn al in het eerste leerjaar en is in het handelen van de docent het voortdurend vragen naar betekenissen en naar het waarom essentieel.

Verwant met abstraheren is het begrip *'symbol sense'*, dat in het manipuleren met formules een onderliggend concept is. Het manipuleren van formules (paragraaf 4.4) is verder nog te splitsen in het substitueren van formules en het bedenken en uitvoeren van complexe stappenplannen. Het gaat hier om opgaven, waar eigen denkwerk bij nodig is en niet om het repertoire aan standaard herleidingen.

In het proces van modelleren en algebraïseren (paragraaf 4.5) wordt veelal een beroep gedaan op de verschillende wiskundige denkactiviteiten die hiervoor al zijn genoemd. Het opstellen van een wiskundig model houdt vaak het maken van een formule in. Het vergelijken van modellen vereist veelal het herschrijven van formules om te kunnen vergelijken. Essentieel in het modelleren is de rol van de context, waar het wiskundig model een min of meer adequate beschrijving van moet geven. Vragen zoals “Waar komt het model vandaan?”, “Waarin verschilt het model van de werkelijkheid”, “Is er een beter passend model?”, zijn kenmerkend voor het modelleren. Het hele proces kan uitstekend in een praktische opdracht of profielwerkstuk uit de verf komen, terwijl in de context van een centraal examen meer de deelaspecten kunnen worden getoetst.

Het subdomein 'Logisch redeneren' van het examenprogramma wiskunde C vwo is een bijzonder voorbeeld van de wiskundige denkactiviteit 'Logisch redeneren' (paragraaf 4.6). Het kenmerk is dat met heel weinig wiskundige bagage een correcte logische redenering moet worden gegeven of een redenering moet worden beoordeeld. In andere gebieden van de wiskunde moet met wiskundige begrippen logisch worden geredeneerd. Het meest uitgesproken is dat in het redeneren met meetkundige eigenschappen in de B-programma's.

Onder het 'Ordenen en structureren' (paragraaf 4.7) valt in deze publicatie het aanpakken van allerlei typen situaties die zich kenmerken door een groot aantal gegevens en veel tekst. De desbetreffende examenopgaven doen amper een beroep op specifieke wiskundige kennis en zouden ook passen bij verschillende andere schoolvakken

.

Inhoud

1. Inleiding

Met ingang van het schooljaar 2015-2016 zijn de nieuwe examenprogramma's havo-vwo voor alle wiskundevakken van kracht. De eerste centrale examens bij die nieuwe examenprogramma's worden afgenomen in 2017 (havo) en 2018 (vwo). Onder verantwoordelijkheid van het College voor Toetsen en Examens (CvTE) zijn in de zomer van 2014 de syllabi verschenen die een verder specificatie bevatten, met name met het oog op de voorbereiding op de centrale examens.

Vanaf het schooljaar 2015-2016 zal het wiskundeonderwijs in leerjaar 4 en volgende mede bepaald worden door de inhouden en doelen van de nu vastgelegde programma's. In de komende jaren zal de implementatie van het bedoelde curriculum naar het bereikte curriculum centraal staan. Veel leerstof is natuurlijk bekend van het huidige leerplan, maar naast de nieuwe leerstof is in de examenprogramma's en syllabi gekozen voor een nieuwe formulering van de leerstof overstijgende leerdoelen. Daarin gaat het om het bevorderen van het wiskundig denken, het stimuleren van wiskundige denkactiviteiten (WDA).

Voor het realiseren van de bedoelde leerplanvernieuwing in de dagelijkse onderwijspraktijk is het noodzakelijk dat het helder wordt wat daarmee wordt bedoeld. Deze publicatie wil aan die verheldering een bijdrage leveren, door een analyse en exemplarische uitwerking te geven van de bedoelde WDA. In eerste instantie kan het een bron zijn voor de onderlinge discussie in auteursgroepen, in teams van toetsconstructeurs, in ontwerpgroepen voor WDA-nascholing, in lerarenopleidingen enzovoort. Voor het implementeren van WDA, zoals bedoeld, in de dagelijkse lespraktijk is waarschijnlijk nog een meer toegespitste vertaalslag noodzakelijk. De voorbeelden en bronnen in deze publicatie hebben betrekking op het wiskundeonderwijs van de bovenbouw havo-vwo. De doorlopende leerlijn in de beschreven WDA begint natuurlijk al in de onderbouw. Ook daarvoor ontbreekt het nog aan een concrete vertaalslag voor de onderwijspraktijk.

Voor het stimuleren van het wiskundig denken moeten ten minste twee vragen worden beantwoord:

1. Welke wiskundige opgaven, opdrachten, taken worden in het onderwijs en de toetsing aan de leerlingen voorgelegd?
2. Welke activiteiten van de wiskundedocent bevorderen een stimulerende leeromgeving?

Voor de beantwoording van de eerste vraag zijn tientallen opgaven uit de laatste pilotexamens geanalyseerd om concrete denkactiviteiten te illustreren en aan te geven hoe opgaven in het onderwijs en de toetsing kunnen worden ingezet om het doel te bereiken.
Daarnaast zijn in deze publicatie bij tal van voorbeelden uitspraken opgenomen van wiskundedocenten uit de pilotscholen over de manier waarop zij de tweede vraag in hun praktijk hebben beantwoord. Hun antwoorden zijn bedoeld als inspiratie voor de onderlinge discussie tussen docenten over de evaluatie en vernieuwing van het eigen onderwijs.

Deze publicatie is als volgt opgebouwd:

Samenvatting
De problematiek van de implementatie van de WDA, toegespitst op de te gebruiken opgaven en de handelingen van de docent, wordt in grote lijnen samengevat.

Hoofdstuk 1
Een korte schets van de achtergrond.

Hoofdstuk 2
De syllabi maken onderscheid tussen reproductie (te memoriseren en wellicht in te slijpen kennis en vaardigheden) en productie (zelf bedenken hoe wiskunde in de opgave kan worden gebruikt). Het maken van dit onderscheid is de eerste stap in de implementatie van WDA. In onderwijs dat zich voornamelijk richt op reproductie worden sterk gestructureerde opgaven gebruikt en wordt een eenvoudig onderwijsmodel, voordoen – nadoen – oefenen, gehanteerd.

Hoofdstuk 3
De globale beschrijving van de zes typen WDA uit de documenten van de commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO) geeft te weinig aanknopingspunten voor het ontwerpen van bijpassend onderwijs, het maken van geschikte opgaven en het opstellen van een toets of examen. In dit hoofdstuk wordt elke wiskundige denkactiviteit onderverdeeld en ingevuld door middel van voorbeeldopgaven ontleend aan pilotexamens. In die concretisering gaat het niet in de eerste plaats om het precies classificeren van opgaven, maar om het beantwoorden van de vraag of een opgave, voor die doelgroep van leerlingen, een beroep doet op een of meer WDA. Het is de bedoeling om door de manier waarop naar opgaven wordt gekeken een hulp te bieden voor het analyseren van de 'eigen' opgaven in het leerboek of in toetsen. Daaraan gekoppeld wordt in de uitspraken van docenten aangegeven hoe leerlingen in het onderwijs geholpen kunnen worden door zelf dat soort opgaven aan te pakken.

Hoofdstuk 4
De verschillende uitspraken van docenten over hun onderwijs en gesignaleerde praktijken in scholen worden in dit hoofdstuk wat provocerend tegenover elkaar geplaatst. Genoeg stof voor onderlinge discussie.

2. Oriëntatie

2.1 Examenprogramma 2017

De nieuwe examenprogramma's 2017 voor de wiskundevakken in havo en vwo houden een wijziging van leerstof in en een sterker accent op het bevorderen van wiskundig denken naast een meer expliciete omschrijving van kennis en vaardigheden die leerlingen paraat moeten hebben. In de publicaties van cTWO, *Rijk aan betekenis* (cTWO, 2007) en *Denken & Doen* (cTWO, 2012) (www.uu.fi/cwo) is dit beschreven. In de syllabi bij de centrale examens (www.examenblad.nl) zijn de leerdoelen nader uitgewerkt.

2.2 Syllabi bij het centraal examen

In de zomer van 2014 zijn de syllabi bij de centrale examens door het CvTE vastgesteld. In die syllabi wordt onderscheid gemaakt tussen kennis en vaardigheden die de leerlingen paraat moeten hebben oftewel reproductieve kennis en vaardigheden, en productieve vaardigheden, waarin van leerlingen wordt gevraagd om die parate kennis en vaardigheden te gebruiken in niet-standaard situaties. Examenopgaven die het eerste type kennis en vaardigheden (routines) toetsen, doen voornamelijk een beroep op het herkennen van parate kennis en vaardigheden. Examenopgaven met betrekking tot het tweede type kennis en vaardigheden vereisen enig eigen denkwerk, een analyse van de situatie en/of het teruggrijpen op een onderliggend begrip. Dit laatste is in de examenprogramma's samengevat met de term 'wiskundige denkactiviteiten'.

2.3 Wiskundige denkactiviteiten

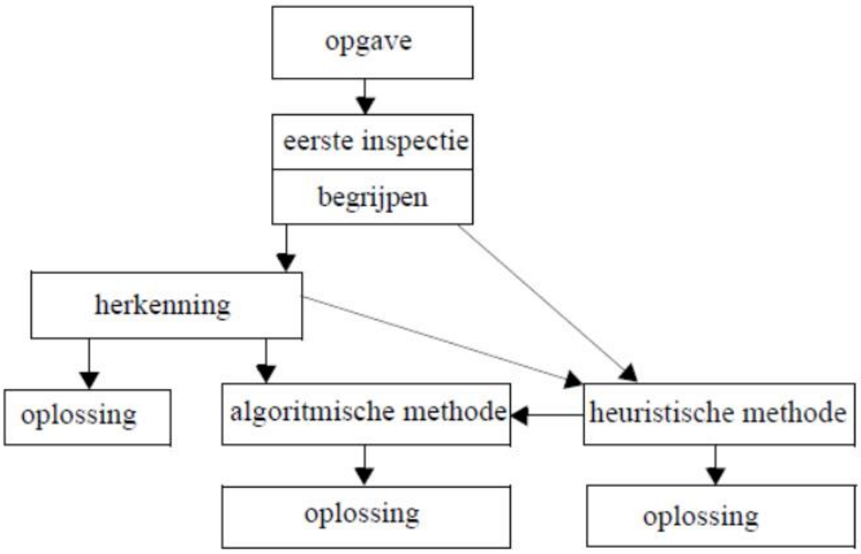
Wiskundedocenten, wiskundigen en wiskundedidactici zijn het er al decennia lang over eens dat wiskundeonderwijs meer moet inhouden dan het trainen van regels en algoritmen door alleen maar veelvuldig sommen te maken. Talloze wiskundedocenten slagen erin om samen met de leerlingen wiskundige concepten te ontwikkelen en leerlingen te leren echte wiskundige problemen op te lossen. Buiten de schoolboeken kunnen die wiskundedocenten tegenwoordig een keur aan aanvullend materiaal vinden in de eigen vakbladen, op internet en in de vakliteratuur.
Ondanks de grote mate van consensus over de beoogde meerwaarde van het wiskundeonderwijs is het in het verleden niet goed gelukt om dat in termen van eindexamenprogramma's tot uitdrukking te laten komen. cTWO heeft ervoor gekozen het formuleren en exemplarisch demonstreren van die meerwaarde tot een speerpunt van de vernieuwing te maken. Het nieuwe woord wiskundige denkactiviteiten (WDA) dekt de verzameling van al die (lange termijn) onderwijsdoelen die de leerstofdoelen te boven gaan. Een globale opsomming van de bedoelde WDA bevat werkwoorden zoals *modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, logisch redeneren en bewijzen.*

2.4 Pilotexamens 2013 en 2014

In een beperkt aantal scholen is een concept van de nieuwe examenprogramma's beproefd. Dat heeft tot enige bijstelling geleid en dientengevolge ook tot aanpassing van de pilotexamens voor die scholen en formulering van nieuwe syllabi. Met name wat betreft het toetsen van reproductieve kennis en vaardigheden, productieve vaardigheden en daarbinnen de beoogde WDA, zoals die nu zijn beschreven, is de ontwikkeling van de centrale examens nog niet afgerond. In dit document worden veel voorbeelden besproken van opgaven uit de centrale pilotexamens 2013 en 2014 waarin soms wel en soms niet ook de WDA worden getoetst. Aan de hand van die voorbeelden kunt u zich een beeld vormen van de veranderingen die de nieuwe programma's met zich mee brengen.

2.5 Kennen en kunnen

Vooral de harde wetenschappelijke kennis over de werking van het geheugen heeft belangrijke aanwijzingen opgeleverd voor de didactiek van de wiskunde en natuurlijk ook voor de didactiek van andere vakken. In het *Handboek wiskundedidactiek* (Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwaneveld, B. (Eds.), 2012) geschreven voor wiskundedocenten, wordt daar uitgebreid op ingegaan. Hier kan worden volstaan met het simpele onderscheid tussen het *werkgeheugen* en het *langetermijngeheugen*. Het werkgeheugen wordt geactiveerd als de leerling een opgave wordt voorgelegd. Elementen van de beschreven situatie worden opgenomen en in het langetermijngeheugen, waar kennis al dan niet samenhangend is opgeslagen, wordt 'gezocht' naar relevant geachte gegevens die kunnen helpen het voorliggende probleem op te lossen.
Figuur 1 is een schematische weergave van een ideaal oplossingsproces. De leerling neemt even de tijd om de gepresenteerde opgave te lezen, kort te inspecteren, totdat hij zo ongeveer begrijpt waar het over gaat. Dat proces in het werkgeheugen kan leiden tot herkenning, een directe koppeling met het langetermijngeheugen. De leerling heeft een oplossing of oplossingsweg paraat of weet dat een hem bekende algoritmische methode tot het doel zal leiden. Ook komt het voor dat de leerling geen directe oplossingsweg paraat heeft, maar wel een zoekmethode om het probleem te kunnen verkennen of aan te pakken. En als er in geen enkel opzicht sprake is van herkenning dan kan de leerling terugvallen op hem bekende heuristische methoden, bijvoorbeeld het onderzoeken met getallenvoorbeelden, of teruggrijpen op onderliggende algemene concepten.



Figuur 1. Schematische weergave van een ideaal oplossingsproces.

Is er sprake van een opgave die reproductie bedoelt te toetsen, dan 'herkent' de leerling idealiter welke kennis uit het langetermijngeheugen moet worden benut om volgens een bepaalde oplossingsweg een resultaat te bereiken. Dat 'herkennen' vereist dat de leerling een opgave goed kan classificeren ("oh, dit is een lineair groeiproces, dus…") en ook inderdaad de relevante kennis paraat heeft (dus per eenheid komt er steeds eenzelfde hoeveelheid bij).
Bij een niet-standaard opgave worden in het werkgeheugen verschillende stappen overwogen, diverse kenmerken van de situatie geordend en wordt er meestal relevante parate kennis uit het langetermijngeheugen opgehaald. Leerlingen die over te weinig parate kennis en vaardigheden beschikken, moeten die op dat moment 'heruitvinden'. Nu heeft het werkgeheugen maar een

beperkte capaciteit, met als gevolg dat die leerlingen al snel in een oplossingsproces vast lopen omdat ze zoek raken in het aantal elementen dat ze in de gaten moeten houden. Een stevig repertoire aan parate kennis en vaardigheden is dus een noodzakelijke voorwaarde om ook niet-standaard opgaven te kunnen aanpakken.

2.6 Onderwijzen

Ter voorbereiding op dit document zijn veel gesprekken gevoerd met docenten van de pilotscholen, die ieder op eigen wijze proberen het denken van hun leerlingen te bevorderen. Hun opvattingen, voorbeelden en moeilijkheden staan in de tekstvakken geciteerd. Er bestaat niet een eenduidige manier van lesgeven dat tot goede prestaties van leerlingen leidt. Ook docenten verschillen in hun kwaliteiten en voorkeuren. Wel is er een aantal voorwaarden dat moeten worden vervuld om tot bevredigende leerresultaten te komen. En er bestaan manieren van lesgeven die zeker niet tot optimale leerresultaten leiden. De nieuwe examenprogramma's maken het noodzakelijk om het lesgeven en toetsen in het Nederlandse wiskundeonderwijs opnieuw tegen het licht te houden. In hoofdstuk 4 worden de ervaringen puntsgewijs samengevat in de vorm van aanbevelingen.

3. Reproductie en productie

3.1 De teksten in de syllabi

In alle syllabi voor de centrale examens staat het onderscheid tussen *reproductie* en *productie* nu als volgt geformuleerd:

> *Parate kennis, parate vaardigheden en productieve vaardigheden*
> Bij de specificatie van de globale eindtermen is onderscheid gemaakt tussen parate vaardigheden en productieve vaardigheden. Bovendien is bij een aantal subdomeinen opgenomen over welke parate kennis de kandidaat dient te beschikken. Deze indeling is bedoeld om aan te geven wat het verwachte kennis- en beheersingsniveau van de kandidaat is.
> Met parate vaardigheden wordt hier bedoeld de wiskundige basistechnieken die de kandidaat routinematig moet beheersen.
> Bij productieve vaardigheden is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen.
> Bij parate kennis gaat het om kennis waarover de kandidaat dient te beschikken en die niet uit de formuleringen van de parate en/of productieve vaardigheden blijkt. De opsomming van parate kennis is daarmee een aanvulling op de parate en productieve vaardigheden.

In de syllabus wiskunde A havo staat bijvoorbeeld voor het subdomein C2 'Grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden':

> *Parate kennis*
> De kandidaat kent
> • de volgende typen standaardverbanden inclusief de bijbehorende namen
> $y = ax + b$ (lineair verband),
> $y = a \cdot x^b$ (exponentieel verband),
> $y = ax$ (recht evenredig verband),
> $y = \dfrac{a}{x}$ (omgekeerd evenredig verband);
> • de volgende bij de genoemde standaardverbanden behorende karakteristieke eigenschappen
> - (constant, toenemend of afnemend) stijgen,
> - (constant, toenemend of afnemend) dalen;
>
> • de volgende bij de grafieken van de genoemde standaardverbanden behorende karakteristieke eigenschappen
> - snijpunt(en) met de x -as en met de y -as.

Parate vaardigheden
De kandidaat kan
1. van de standaardverbanden een globale grafiek tekenen zonder ICT;
2. in een gegeven probleemsituatie de parameters van een standaardverband berekenen;
3. een logaritmische schaalverdeling aflezen.

In de wiskundedidactiek maken we onderscheid tussen *Weten dat*, *Weten hoe* en *Weten waarom* (Drijvers et al., 2012). In dit hoofdstuk gaat het voornamelijk over *Weten dat*, de kennis en vaardigheden die leerlingen op een bepaald moment paraat moeten hebben. In de syllabi is omschreven wat dat repertoire aan kennis en vaardigheden, uiteraard sterk verschillend per doelgroep leerlingen, moet inhouden. We gaan nu naar voorbeelden kijken uit de pilotexamens. Wij moeten daarbij bedenken dat het curriculum en de examens nog volop in ontwikkeling waren en zijn.
Daarna vragen we ons af hoe onderwijs eruit zou moeten zien dat optimaal bijdraagt aan het paraat hebben van de gewenste kennis en vaardigheden.

3.2 Reproductie of productie?

In verschillende bijeenkomsten van wiskundedocenten hebben we hun gevraagd om examenopgaven te beoordelen als reproductie of productie. Sommigen classificeren een groot aantal examenopgaven als opgaven die een beroep doen op productieve vaardigheden of WDA, terwijl anderen dat ronduit belachelijk vinden en bijna alles als reproductie beoordelen. Wiskundedocenten van pilotscholen zijn het onderling ook niet altijd eens met de classificatie van de syllabi.

De discussie over de vraag wat reproductie en wat productie is, spitst zich vaak toe op algebra. En wat betreft de vraag wat je moet 'inslijpen', 'instampen' en dergelijke gaat het veelal ook over algebraïsche bewerkingen. We bekijken een aantal voorbeelden uit de pilotexamens.

Eerst het rekenen met haakjes.

Voorbeeld 3.2.1 – Vraag 11 wiskunde A havo pilotexamen 2014

(4) $C = 10 - (L - S) \cdot \frac{9}{L} \cdot 2$

Formule (4) is bij $L = 80$ te herleiden tot de vorm $C = a \cdot S + b$.
Geef deze herleiding en bepaal de waarden van a en b.

> *Tja, mijn leerlingen hebben dat heel slecht gemaakt. Alles wat fout kon gaan, is fout gemaakt. Dat minteken voor de haakjes wordt alleen op de L toegepast, de factoren achter de haakjes weten ze geen weg mee, enzovoort. Basis vanuit de onderbouw. Ze hebben geen idee wat ze er mee aan moeten.*

Deze docent vindt dat zo'n herleiding ook voor wiskunde A havo toch onder de *parate vaardigheden* moet vallen. De syllabus spreekt in het subdomein Algebra van *productieve vaardigheden*: "De kandidaat kan werken met haakjes bij variabelen, waaronder het vereenvoudigen door haakjes wegwerken."
In de tabel van specifieke algebraïsche vaardigheden, dat zijn 'vaardigheden waarvan wordt verwacht dat de kandidaat die snel en geroutineerd kan uitvoeren' staat ook voor wiskunde A havo haakjes wegwerken genoemd, tot en met $(A+B)(C+D)$. De geciteerde docent krijgt kennelijk gelijk.

Voorbeeld 3.2.2 – Vraag 4 wiskunde A havo pilotexamen 2014

Als je de formule van *M* invult in de formule van *W*, ontstaat de formule

$W = 0{,}29 \cdot (-0{,}04 \cdot V^2 + 1{,}05 \cdot V + 27{,}2) - 0{,}20 \cdot V$.

Je kunt deze formule herleiden tot de vorm $W = a \cdot V^2 + b \cdot V + c$.

Laat deze herleiding zien.

Ook heel slecht gemaakt. Ze vermenigvuldigen alleen de eerste term tussen haakjes met 0,29 en ze weten niet hoe ze de twee termen met V moeten samen nemen enzovoort. Toch echt tweede klas leerstof.

Voorbeeld 3.2.3 – Vraag 7 wiskunde A havo pilotexamen 2013

In een context wordt gevraagd om de eerste formule te herleiden tot de tweede als gegeven is dat $L = B$.

$P = 100 \cdot \dfrac{L \cdot B - (L - d) \cdot (B - d)}{L \cdot B}$ herleiden tot $P = 100 \cdot \dfrac{2dL - d^2}{L^2}$.

Ook slecht gemaakt, *p* = 0,30.

De vraag, geformuleerd door de geciteerde docent, is:

Hoe is het mogelijk dat na drie jaar algebraonderwijs deze elementaire operaties niet worden beheerst?

Het zijn *parate vaardigheden*, waarvan de beheersing noodzakelijk is om ze bij echte problemen te kunnen gebruiken.

Laten we nog een andere algebraïsche vaardigheid onder de loep nemen. Het opstellen van een “eenvoudige” formule.

Voorbeeld 3.2.4 – Vraag 6 wiskunde C vwo pilotexamen 2013

Er is een grafiek met de trendlijn gegeven en vraag 6 is:

Stel een formule op voor het lineaire verband in de figuur.

Niet echt goed gemaakt (*p* = 0,57), net als de analoge vraag 4 (in tekst beschreven lineair verband) uit het pilotexamen 2014.

Dit is toch standaard, vanaf leerjaar 2. Dat valt mij erg tegen.

Ook in vraag 20 van het wiskunde A havo examen 2014 komt die vraag naar de trendlijn voor. De bijbehorende syllabus noemt dit een *productieve vaardigheid:* "De kandidaat *kan een formule opstellen van een lineair verband dat in een tabel, grafiek of tekst is gegeven."*

Voorbeeld 3.2.5 – Vraag 12 wiskunde C vwo pilotexamen 2014

punt	0	1	2	3	4
afstand tot middelpunt *M*	9,00	7,85	6,84	5,96	5,20

De afstanden in de tabel nemen af met een vaste groeifactor.

Toon dit aan voor alle in de tabel genoemde punten en geef deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Ja, dit kunnen ze wel. Standaard. Maar bij de volgende vraag in dezelfde context gaan veel leerlingen weer lineair rekenen in plaats van de groeifactor te berekenen.

Onder de kop *Parate vaardigheden* lezen we in de syllabus van wiskunde C: "De kandidaat kan aan de hand van een tabel vaststellen of er sprake is van een lineair of een exponentieel verband." Onder *productieve vaardigheden* staat vermeld dat de kandidaat deze kennis ook moet kunnen gebruiken in probleemsituaties, dus hier bijvoorbeeld in vraag 13.

Deze docent heeft beargumenteerde kritiek op dit pilotexamen.

Dit pilotexamen wiskunde C 2014 vind ik heel onevenwichtig. Helemaal geen algebra en geen modellen. In het 2e tijdvak te veel algebra. Dat moet beter. Het pilotexamen 2013 was in dit opzicht veel beter.

Nogal tegenvallend zijn de resultaten bij het *substitueren van een expressie in een formule*, een algebraïsche activiteit die in allerlei toepassingsgebieden veel wordt gebruikt. Moeten de leerlingen voor die activiteit niet over een basis aan kennis en vaardigheid beschikken?

Voorbeeld 3.2.6 – Vraag 14 wiskunde A havo pilotexamen 2014

$P = \dfrac{100 \cdot S^2}{S^2 + T^2}$. Als je $T = 2 \cdot S$ in de formule van P invult, ontstaat een nieuwe formule van P. Door die formule te herleiden, kun je laten zien dat er in deze situatie voor P altijd hetzelfde getal uitkomt. Geef deze herleiding.

Slecht gemaakt door mijn leerlingen, nog geen 50% van de te behalen punten. Wij zien daar een T die je vervangt door $2S$, maar veel leerlingen hebben geen idee waar het over gaat. Doen ze zo iets dan niet in de onderbouw? Dat idee van substitutie moeten ze toch paraat hebben?

De syllabus wiskunde A havo benoemt de volgende *productieve vaardigheid:* "De kandidaat kan een variabele in een formule vervangen door een eenvoudige expressie en het resultaat vereenvoudigen."

Voorbeeld 3.2.7 – Vraag 14 wiskunde C vwo pilotexamen 2013, vraag 14.

In een context van een driedimensionaal kunstwerk is gegeven dat $h = 25n$ en de relatie tussen de hoogte h en de lengte l is $l^2 \cdot h = 1000000$. De vraag is: Uitgaande van deze formule kan men een formule opstellen waarin l wordt uitgedrukt in n. Stel deze formule op.

Blijkens het resultaat (*p* = 0,13) begrijpen de leerlingen niet wat er moet gebeuren. Net als bij wiskunde A havo kan dit een *productieve vaardigheid* worden genoemd, maar wel met een teleurstellend resultaat.

3.3 Wanneer is het reproductie?

Voor de praktijk en de kwaliteit van het wiskundeonderwijs is het essentieel om het in een wiskundesectie eens te worden over de inhoud van *parate kennis en parate vaardigheden.* Vanaf het eerste leerjaar moeten de leerlingen ervaren dat op een zeker moment bepaalde kennis en vaardigheden zo solide zijn opgeslagen in hun geheugen dat ze die routinematig kunnen reproduceren in passende situaties. Met die overweging maken de teksten van de syllabi daarom onderscheid tussen reproductie en productie en zijn de tabellen met algebraïsche vaardigheden opgesteld. In de eerste bijeenkomsten over dit onderscheid is wel gebleken dat wiskundedocenten tot heel uiteenlopende beoordelingen van opgaven komen, als het gaat om de vraag of leerlingen die al dan niet door middel van reproductie moeten kunnen beantwoorden. Het is daarom in de eerste plaats nodig om een scherp onderscheid te maken tussen wat we onder *reproductie* en wat we onder *productie* gaan verstaan.

Een opgave wordt door reproductie opgelost wanneer de leerling het type vraag herkent en uit het langetermijngeheugen een feit, techniek of algoritme oproept waarmee hij vervolgens in enkele stappen een oplossing bereikt. Veel leerlingen proberen op die manier wiskunde te leren, namelijk door bij elk type opgave een oplossingsmethode te memoriseren en die methode op het eerstvolgende proefwerk te reproduceren. De hier bedoelde wiskundige kennis en vaardigheden moeten leerlingen paraat hebben als het wiskundig gereedschap waarmee ook wiskundige en toegepaste problemen kunnen worden aangepakt en opgelost. Welk gereedschap op de eerstvolgende toets moet worden beheerst is vaak wel duidelijk, maar een maand later of een jaar later is dat voor een leerling moeilijk te memoriseren. Het is onmogelijk om voor alle typen opgaven een oplosmethode te onthouden. De routines echter zijn gekoppeld aan standaardopgaven, waarvan de aanpak op den duur wél kan worden gememoriseerd.

Het kan voorkomen dat een leerling niet direct weet wat hij met de opgave aan moet en eerst een aanpak moet bedenken. De leerling aanvaardt de opgave als een probleem. De leerling moet bijvoorbeeld eerst de gegevens nader bekijken, het gevraagde herformuleren, een overzicht van mogelijk relevante kennis oproepen. Dan spelen ook de heuristische methoden (zoekmethoden) een rol, zoals het maken van een tekening, het doorrekenen van getallenvoorbeelden, het onderzoeken van speciale gevallen, enzovoort. We noemen dat *Weten hoe.* Soms helpt het om terug te gaan naar het onderliggende begrip, een algemene methode, een abstractie of een redenering. Dat is *Weten waarom*. Opgaven die een beroep op doen op *Weten hoe* of *Weten waarom* geven dus aanleiding tot eigen denkwerk, ze doen een beroep op *productie of productieve vaardigheden*.

Uit het voorgaande volgt onmiddellijk dat het niet alleen aan de kenmerken van de opgave ligt of een leerling louter door memoriseren en reproduceren tot een oplossing komt. Je kunt zelfs stellen dat naarmate de leerling minder koppelingen van opgaven aan wiskundige kennis paraat heeft, hij vaker een opgave als een probleem ervaart. In dat geval zal de oplosser eerst moeten nadenken over de aanpak en is er sprake van een wiskundige denkactiviteit. In een dergelijk oplossingsproces zal de oplosser veelal ook parate wiskundige kennis moeten oproepen en in de probleemsituatie toepassen. In de mate waarin een oplosser over minder parate kennis en vaardigheden beschikt, wordt het werkgeheugen tijdens het oplossen zwaarder belast.

Kijken we naar leerlingen in een concrete onderwijssituatie dan moeten we per leerjaar en schooltype vastleggen wat voor die leerlingen 'geen probleem' mag zijn en wat wel. De opgaven die, gelet op onze leerstofdoelen 'geen probleem' voor leerlingen mogen zijn, behoren tot de verzameling routineopgaven. Daarmee worden parate kennis en vaardigheden getoetst. Een opgave kan in het begin van een leerproces met betrekking tot een bepaald gebied, bijvoorbeeld differentiëren, voor leerlingen een probleem zijn, terwijl eenzelfde type opgave na een tiental lessen een routineopgave kan zijn geworden. In de examenklas moet het voor de leerlingen volstrekt helder worden welke parate kennis en welke parate vaardigheden (reproductie) routinematig, dus voor de volle 100%, moeten worden beheerst. De omschrijvingen uit de syllabi helpen de docenten om dat leerlingen duidelijk te maken en helpen de wiskundesectie om daar een lange doorlopende leerlijn voor op te zetten, zodat die kennis en vaardigheden ook worden onderhouden. Daarover meer in de volgende paragraaf.

3.4 Parate kennis en vaardigheden onderwijzen/onderhouden

In het basisrapport over de referentieniveaus rekenen *Over de drempels met rekenen* (Expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen, 2008) worden instemmend de volgende conclusies geciteerd uit *Adding It Up* (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001), een publicatie van de National Research Council van de USA, geschreven door topwetenschappers uit de wetenschappelijke disciplines wiskunde, psychologie, wiskundedidactiek en onderwijskunde. Die conclusies achten wij relevant voor de onderbouwing van de relatie tussen reproductie en productie.

1. Ten onrechte wordt vaardigheid soms tegenover inzicht geplaatst. Begrijpen maakt het leren van vaardigheden gemakkelijker, minder gevoelig voor fouten en het beklijft beter. Aan de andere kant is een zeker beheersingsniveau van vaardigheden noodzakelijk om nieuwe wiskundige begrippen en methoden met begrip te leren en ontwikkelen.
2. Zonder een goede routine stranden leerlingen bij het verdiepen van wiskundige ideeën of het oplossen van wiskundige problemen. De aandacht die zij dan nodig hebben om hun resultaten uit te werken in plaats van die paraat op te roepen gaat ten koste van de aandacht voor de aanpak van het probleem of het zoeken naar onderliggende relaties.
3. Leerlingen die een vaardigheid zonder begrip leren, hebben heel veel oefening nodig om de stappen niet te vergeten. Als leerlingen de operaties begrijpen, dan zijn ze beter in staat om ze te reconstrueren en in samenhang met andere operaties te zien.
4. Als vaardigheden zonder begrip worden geleerd, dan blijven het geïsoleerde brokjes kennis. Nieuwe begrippen of vaardigheden kunnen dan niet voortbouwen op een bestaand netwerk aan kennis. Dat leidt ertoe dat leerlingen voor elke kleine variatie in opgaven weer nieuwe oplossingsprocedures moeten leren.

In het genoemde rapport over het rekenonderwijs komt de volgende aanbeveling voor die zonder meer van toepassing kan worden verklaard op het wiskundeonderwijs vanaf de brugklas tot en met het examenniveau:

"Aanbeveling Paraat hebben
Een duidelijk te benoemen fundament aan begrippen, rekenfeiten, automatismen, routines, moet worden geconsolideerd en verankerd. In de praktijk van het onderwijs moet meer expliciet werk worden gemaakt van het systematisch consolideren en oefenen totdat het gewenste beheersingsniveau van paraat hebben is bereikt."

In de volgende citaten uit interviews met docenten komen elementen terug van de geciteerde conclusies voor een versterking van de basis aan parate kennis en vaardigheden. Gecombineerd geven ze een solide basis voor een goede diagnose en een kwalitatieve verhoging van het niveau van het gangbare wiskundeonderwijs. Er komen ook voorbeelden langs van niet effectief of niet zinvol wiskundeonderwijs.

Doorvragen naar de betekenis

Ik werk traditioneel. Altijd een klassikale fase met veel vragen van mijn kant. "Waarom? Leg eens uit." Juist ook bij basale opgaven, die tot hun parate kennis zouden moeten behoren. Bijvoorbeeld:
$2x+3y=6$ *Wat stelt dit voor? Tabel? Grafiek? Snijpunten met de assen? ….*
$3x+2y=6$ *En deze dan? Wat gebeurt als je een + in een – verandert?.....*
Enzovoort. Altijd doorvragen naar de onderliggende betekenis.

Dit zoeken we op!

Laatst kwam ik bij een collega in de les en zag dat hij alleen maar vragen van leerlingen naliep als ze een uitwerking op hun telefoon niet snapten. "Sommen laten maken en die vragen nalopen. Zo ziet mijn les er altijd uit." Zei hij….. "Dit zoeken we op!" In plaats van dat leerlingen leren na te denken over een aanpak zijn ze de uitwerkingen aan het nalezen!

Even testen en interactief nabespreken

Natuurlijk wil ik altijd even testen of ze eenvoudige zaken paraat hebben. Elke les zet ik vooraf even een elementaire som op het bord en dan beginnen ze direct nadat ze zitten al te proberen of ze het kunnen. Daar geef ik vijf minuten voor en inventariseer dan. Wie heeft het? Wie niet? Waar loop je vast? Hoe kom je daar overheen? Herken je het niet?

Overzicht

In het programma van de bovenbouw hebben we om de drie of vier lessen een klassikale les ingebouwd om het overzicht op wat ze intussen hebben gedaan of geleerd te versterken. Dus aan de hand van kernopgaven doorvragen en recapituleren waar het om gaat.

Onderhouden door voortgangstoetsen

Enkele jaren geleden kwamen we als wiskundesectie tot de conclusie dat we zelf niet goed de doorlopende leerlijnen onderhielden. Nu nemen we elk leerjaar enkele voortgangstoetsen af over alle kennis en vaardigheden die ze op dat moment paraat moeten hebben. Een score lager dan 90% levert extra werk en hulp op, totdat het doel wordt bereikt. Ook in het PTA van de bovenbouw hebben we voortgangstoetsen. Prima dat we nu in de examenprogramma's lijstjes hebben van die kennis en vaardigheden.

Zelfstandig sommen maken

Als auteurs van een wiskundemethode hebben we de uitdrukkelijke opdracht om de sommen zo op te splitsen dat leerlingen die zelfstandig zonder hulp kunnen maken. Als docent vraag ik mij wel eens af of ze dan wel iets leren.

Het denken bevorderen

Kijk, bij mij gaat het erom dat leerlingen voortdurend leren nadenken over wat ze doen. Bij elke opgave of vraag moeten ze kunnen uitleggen wat ze doen en waarom dat kan. Geen automatische piloot zonder dat ze kunnen uitleggen waarom het goed gaat. Dan houden ze ook beter vast wat ze paraat moeten hebben. Die 'waarom-vragen' stel ik natuurlijk ook op de toetsen.

Houding, sfeer

Het gaat er natuurlijk wel om dat je een sfeer in de les schept die uitnodigt tot nadenken en vertrouwen. Er komen leerlingen uit de onderbouw binnen die zich hebben gered met het onbegrepen uit het hoofd leren van de laatste truc. Die moeten wel omschakelen.

Slim genoeg, maar aversie tegen wiskunde

In mijn wiskunde C-groepen zitten heel wat slimme leerlingen die volkomen afgeknapt zijn op drie jaar klakkeloos instampen van algebraïsche trucs. Ze haten wiskunde als ze in 4 vwo bij mij binnenkomen. Zij vinden het een verademing dat ze gewoon kunnen nadenken over problemen.

4. Wiskundige denkactiviteiten

"Thus, a teacher of mathematics has a great opportunity. If he fills his allotted time with drilling his students in routine operations he kills their interest, hampers their intellectual development, and misuses his opportunity. But if he challenges the curiosity of his students by setting them problems proportionate to their knowledge, and helps them to solve their problems with stimulating questions, he may give them a taste for, and some means of, independent thinking."
(Pólya 1945, preface)

4.1 Globale beschrijving

cTWO heeft in haar visiedocument *Rijk aan betekenis (cTWO, 2007)* en in de toelichting op de nieuwe examenprogramma's naast de beschrijving van de wiskundige domeinen aangegeven welke domeinoverstijgende doelen moeten worden nagestreefd. Dan gaat het om het bevorderen van het wiskundig denken, zoals dat in kwalitatief goed wiskundeonderwijs wordt gestimuleerd. Om aan te geven welke doelen worden bedoeld is door cTWO gekozen voor de volgende samenvatting:

- *Probleemoplossen en analytisch denken*
  Hier gaat het om de vaardigheid wiskundige problemen te formuleren, te representeren en op te lossen. Het analytisch denken omvat aspecten van modelleren en redeneren. Bij het probleemoplossen is een repertoire aan heuristieken onmisbaar.
- *Modelleren en algebraïseren*
  Modelleren is een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Leerlingen worden voor een probleemsituatie geplaatst met als doel deze met wiskundige middelen op te lossen. Dit omvat het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen. Een ander essentieel onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen.
- *Ordenen en structureren*
  Wiskunde heeft altijd bijgedragen aan het ordenen van de werkelijkheid, aan het classificeren van objecten naar kenmerken, aan het structureren van de eigen discipline en andere disciplines. Het gaat hier om het leren structureren.
- *Formules manipuleren*
  Het gericht omvormen van formules vraagt om inzicht in de structuur van de formule en om zicht op het te volgen oplossingsproces als geheel. Daarnaast dient de leerling over handmatige vaardigheden te beschikken om deze processen correct uit te voeren. Het gaat dus om een combinatie van *symbol sense* en formulevaardigheid.
- *Abstraheren*
  Abstractie is het wezen en de kracht van wiskunde en maakt het leren en begrijpen van wiskunde gemakkelijker. Leerlingen groeien in hun vermogen abstracties te vatten en zelf te abstraheren. Bij abstraheren gaat het om het doorzien van onderliggende concepten in concrete situaties en omgekeerd, om het kunnen vertalen van abstracte noties naar concrete objecten en situaties.

- *Logisch redeneren en bewijzen*
  Het leren logisch te redeneren blijft niet beperkt tot de tweede fase van het vwo, maar heeft bij alle kernconcepten in de gehele leerlijn vanaf klas 1 een plaats. Denk aan lokale redeneringen en bewijzen in de leerlijn meetkunde, logisch redeneren in de opbouw van de leerlijn rond het getalbegrip en het redeneren met kansen en statistische begrippen in het kernconcept toeval. Ook in de ontwikkeling van de concepten in de leerlijn differentiaalrekening speelt het logisch redeneren een rol.

Nu gaat het bij de invoering van de nieuwe examenprogramma's niet om het precies classificeren van opgaven uit het schoolboek of in de toetsen of examens en niet om het eenduidig vastleggen of een opgave een beroep doet op de ene of de andere denkactiviteit. Nee, het gaat erom dat vooral in het onderwijs, en dan ook in de toetsen, voldoende kansen worden benut om de leerlingen aan het denken met wiskunde te zetten. Maar dan is het wel noodzakelijk om wat concreter vast te stellen wat we daarmee bedoelen. In dit document worden opgaven uit de pilotexamens gebruikt als voorbeelden van hoe het kan of zelfs moet. Voorbeelden om WDA ook schriftelijk te toetsen. En voorbeelden van de wijze waarop de wiskundedocent WDA in de lessen kan stimuleren en leerlingen kan voorbereiden op toetsing van WDA.
In grote lijnen wordt de cTWO-indeling gevolgd met dien verstande dat natuurlijk allerlei denkactiviteiten door elkaar lopen en dus niet disjunct zijn. Voor een algemene bespreking van denkactiviteiten, opgaven en internationale literatuur wordt verwezen naar het laatste hoofdstuk van het *Handboek wiskundedidactiek* (Drijvers et al., 2012).

4.2 Probleemoplossen en analytisch denken

Dit mag geen probleem zijn.
We kennen de uitdrukking 'dit heb je gehad', die iedere docent zich wel eens laat ontvallen. Alsof alles wat je ooit hebt gehad (of geleerd) voor altijd paraat blijft. En de inschatting 'dit mag geen probleem zijn' geeft aan dat je verwacht dat voor deze leerlingen in die klas met die vermoedelijke kennis en vaardigheden een oplossing direct binnen bereik ligt. De overgang van 'dit mag geen probleem zijn' naar 'dit is een aan te pakken probleem' is mede afhankelijk van het repertoire aan kennis en vaardigheden dat de oplosser paraat heeft. Uit het door de docent verzorgde onderwijs, uit de schoolboeken en de toetsen moet het voor de leerlingen duidelijk worden wat voor hen op dat moment het basisrepertoire (de gereedschapskist) moet zijn waarmee zij standaardopgaven snel moet kunnen oplossen en problemen moeten kunnen aanpakken. Niet alles wat je in de les of het boek tegenkomt kan en hoef je later paraat hebben. Wat dan wel? Een voorbeeld.

Een tweedegraads vergelijking van het type $(x-2)^2+7=16$ zou in de loop van het derde leerjaar een routinetaak (moeten) zijn. Een leerling herkent direct wat er moet gebeuren en herinnert zich na een korte inspectie dat de eerste term 9 is en dat $(x-2)$ dan gelijk is aan 3 of -3.
Een tweedeklasser die voor het eerst dit type vergelijking ziet, zal deze opgave als een probleem ervaren. Wat nu? Beheerst die tweedeklasser het concept van wat een vergelijking is (op basis van zijn kennis van eerstegraads vergelijkingen) dan zal hij kunnen bedenken dat dit dus weer een vergelijking is. Een vergelijking waarvan hij (nog) niet weet hoe die opgelost kan worden. Het herkennen van dat concept in een nieuwe situatie en daarmee verder werken, noemen we abstraheren. In dit voorbeeld kan dat leiden tot een overweging als: 'We zoeken een getal voor x waarvoor dit waar is'. Vervolgens komt het aan op een vorm van probleemoplossen. Uit zijn langetermijngeheugen kan hij een heuristische methode (een zoekmethode) oproepen, die in deze voor hem nieuwe situatie kan worden toegepast. Bijvoorbeeld met getallenvoorbeelden een oplossing zoeken. Dan hebben we voor deze leerling

te maken met WDA, zoals abstraheren (een onderliggend concept in een nieuwe situatie toepassen) en probleemoplossen door een eerder gebruikte heuristische methode te benutten. Voor een derdeklasser doet zich dezelfde situatie voor als hij wordt geconfronteerd met een vergelijking zoals $(x^2-2)^2+7=16$. De brug naar parate kennis wordt nu bijvoorbeeld gevormd door de heuristische methode: ‘Zoek een soortgelijk eenvoudiger geval en los dat eerst op’.

Dit eenvoudige voorbeeld geeft al de noodzaak aan van een lange leerlijn in de aanpak van een probleem. Vanaf leerjaar 1 kunnen de leerlingen leren dat zij een probleem systematisch kunnen aanpakken, mits de gehele wiskundesectie dat ook onderwijst. Zoiets als:

- Ga niet meteen rekenen, maar bekijk eerst waar het over gaat.
- Leg uit wat een vergelijking is.
- Probeer eens wat getallenvoorbeelden.
- Kijk eens goed of je snel een oplossing ziet (bordjesmethode, handoplegging o i.d.).
- Lijkt het op iets dat je wel kunt oplossen?
- Kun je je oplossing controleren?

WDA Probleemoplossen
Onder de WDA Probleemoplossen vallen denkactiviteiten die te maken hebben met de eerste probleemaanpak (analyse van de gegeven situatie), het transformeren van de probleemsituatie (bijvoorbeeld omzetten naar een tabel of grafiek), het herformuleren van het gevraagde, het doel (analyse van het doel, het gevraagde), het verkennen van het probleem met behulp van heuristieken (getallenvoorbeelden, een plaatje, een soortgelijk probleem zoeken).
De volgende voorbeelden zijn voornamelijk ontleend aan pilotexamens, om aan te geven dat ook binnen de beperking van schriftelijke toetsen het mogelijk en wenselijk is om WDA te toetsen.

De context van een schriftelijk examen met relatief korte en tamelijk gesloten opgaven brengt natuurlijk een beperking met zich mee. In grote en meer open probleemstellingen (praktische opdrachten, A- en B-olympiades, profielwerkstukken) zal een veel rijker palet aan WDA kunnen worden gestimuleerd en getoetst. Dat type opdrachten en die meer omvattende WDA zijn eveneens onderdeel van de nieuwe examenprogramma’s en horen tot het schoolexamen.

In ons PTA voor de bovenbouw hebben we elke drie of vier lessen een les ingepland, waarin de leerlingen in groepjes werken aan een 'groot' probleem, dat past bij het onderwerp. Dat wordt nabesproken.
En twee keer per jaar moeten ze dat verder thuis afmaken en een verslag van werkzaamheden inleveren voor een beoordeling en een cijfer.

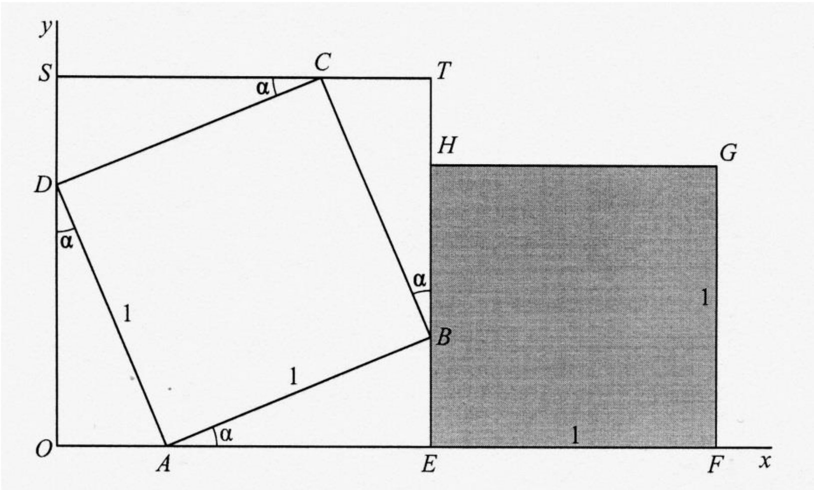
Po-1 Probleemoplossen-1 De gegeven situatie analyseren.
Wat is er aan de hand? Wat is bekend of gegeven? Wat is er gevraagd?

Het begint natuurlijk al bij eenvoudige opgaven, waarbij je meteen doorvraagt naar de betekenis.
Wat staat daar eigenlijk? Ja, $y=x^2-8x$. Zeker de grafiek is een parabool, maar wat is het verschil met $y=x^2-6x$. En met $y=x^2-8$?

Uit gegeven beschrijvingen is soms niet direct op te maken hoe de probleemsituatie in elkaar zit. Dat vraagt om een situatieanalyse, even rustig bekijken wat er aan de hand is, een eerste verkenning van waar het over gaat, enzovoort. Hier volgen een paar voorbeelden uit de pilotexamens.

Voorbeeld 4.2.1 – Vragen 5 en 6 wiskunde B vwo 2013: Vierkanten

In figuur 2 staan twee vierkanten met zijde 1 en een derde vierkant zoals aangegeven.



Figuur 2. Vraag 5 en 6 vwo wiskunde B 2013.

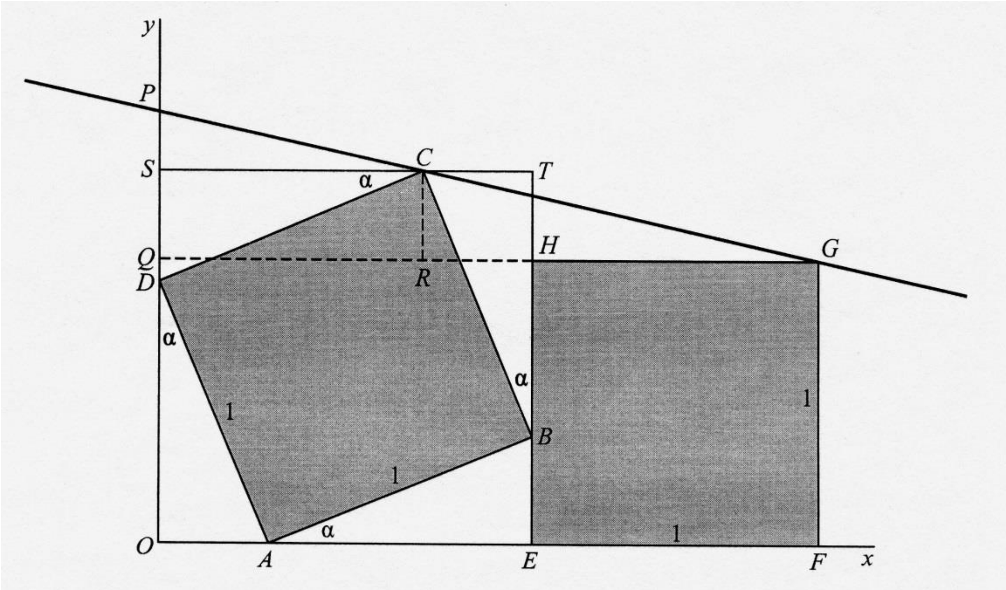
In vraag 5 wordt gevraagd wat de oppervlakte van $OETS$ is als $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

De andere drie hoeken α zijn in de figuur extra gegeven, en eveneens extra zijn de coördinaten van de punten C en G in $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ gegeven:
$C(\cos\alpha,\ \sin\alpha + \cos\alpha)$ en $G(\sin\alpha + \cos\alpha + 1,\ 1)$.

Analyse

De noodzaak een meer uitgebreide situatieanalyse uit te voeren wordt door die onnodige gegevens beperkt. Het is denkbaar dat deze extra gegevens juist contraproductief zijn voor het bereiken van een adequaat antwoord! Eerst even rekenen met de maten die behoren bij de gegeven hoek leidt tot een betere voorstelling van wat er aan de hand is in deze figuur. Daarna kan de vraag worden gesteld wat de oppervlakte van $OETS$ *is, uitgedrukt in* $\sin\alpha$ *en* $\cos\alpha$ *. Dat stimuleert weer de situatieanalyse, noodzakelijk wegens de meer complexe vervolgvraag.*

In die vervolgvraag wordt gevraagd om de formule voor de lengte van OP af te leiden. En dat vereist zeker een grondige analyse van de meetkundige situatie.



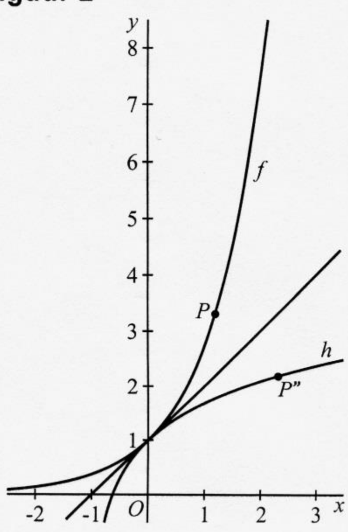
Voorbeeld 4.2.2 – Vraag 10 wiskunde B vwo 2013: Halverwege
Een ander voorbeeld uit hetzelfde examen wiskunde B is vraag 10, waarin opnieuw eerst de gegeven situatie goed moet worden geanalyseerd, voordat het tot acties komt.

Bij elk punt P van de grafiek van f wordt het spiegelbeeld P'' in de lijn met vergelijking $y = x + 1$ bepaald. Zie figuur 2.

De punten P'' vormen de grafiek van een functie h. Deze grafiek ontstaat uit die van f door een combinatie van een of meer translaties en een spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$. Zo'n spiegeling van een grafiek van een functie in de lijn met vergelijking $y = x$ geeft de grafiek van de inverse functie.

10 Stel een formule voor h op.

figuur 2



Uit de onderbouw komen leerlingen binnen met de idee dat ze onmiddellijk iets moeten doen/berekenen. Als ze niet direct zien wat ze kunnen doen, haken ze af of doen ze maar wat. Werken ze in de onderbouw dan niet aan problemen?

In verschillende opgaven van de A- en C-examens is eveneens sprake van de noodzaak om tijd uit te trekken voor deze eerste stap in een systematische probleemaanpak. Bijvoorbeeld opgave 13 van wiskunde A vwo 2013. Er is een tabel gegeven met veel informatie over het aandeel van verschillende delen van het lichaam in de totale lichaamsoppervlakte. Dan volgt de vraag.

Voorbeeld 4.2.3 – Vraag 13 wiskunde A vwo 2013: Lichaamsoppervlak

> Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15% naar 21,0%. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.
> Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Hoewel anders van karakter dan bij de vorige twee B-vragen, wordt hier ook getoetst of leerlingen eerst de situatie op een rijtje kunnen zetten, voordat ze gaan rekenen. En in de volgende opgave moeten de leerlingen zich eerst goed in de situatie verplaatsen, eventueel een schets maken, voordat er een redenering kan worden gegeven.

Voorbeeld 4.2.4 – Vraag 7 wiskunde C vwo 2014: Hogeschool voor de Kunsten

foto 1

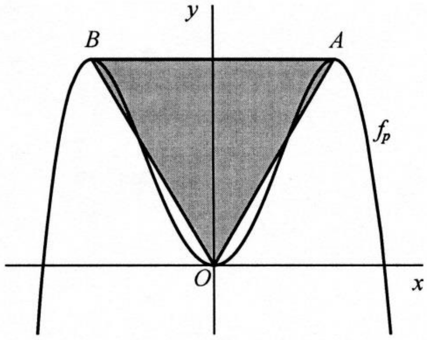
foto 2

> Op foto 1 lijkt het kunstwerk hoger dan de witte deur erachter. Op foto 2 lijkt het kunstwerk ongeveer even hoog als de deur. Foto 2 is op ongeveer 150 cm hoogte genomen. De hoogte van de deur is in werkelijkheid 230 cm.
> Leg uit dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de witte deur.

Po-2 Probleemoplossen-2 Het doel analyseren en transformeren.
Wat betekent het gevraagde? Kan ik het ook anders formuleren?

In een aantal typen opgaven is het in eerste instantie niet duidelijk wat eigenlijk het doel is dat bereikt moet worden met het beschikbare wiskundige gereedschap. Veelal is er dan ook een transformatie van dat doel nodig voordat er een brug kan worden geslagen naar de gegeven situatie en een stappenplan kan worden ontworpen en/of uitgevoerd.
Een voorbeeld is opgave 16 uit het wiskunde B vwo examen 2013. Leerlingen die de tijd namen om eerst eens rustig een doelanalyse uit te voeren, konden op de gedachte komen dat de vraagstelling eenvoudig te transformeren was naar de vraag aan te tonen dat driehoek OAB gelijkzijdig is.

Voorbeeld 4.2.5 – Vraag 16 wiskunde B vwo 2013: Driehoek bij een vierdegraads functie



Er is één waarde van p waarbij de lengte van lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van lijnstuk AB.
Bereken exact deze waarde van p.

Wellicht onbedoeld is vraag 7 wiskunde B vwo 2014 ook een voorbeeld van de noodzaak om eerst te bedenken wat er eigenlijk wordt gevraagd.

Voorbeeld 4.2.6 – Vraag 7 wiskunde B vwo 2014: Gebroken goniometrische functie

Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

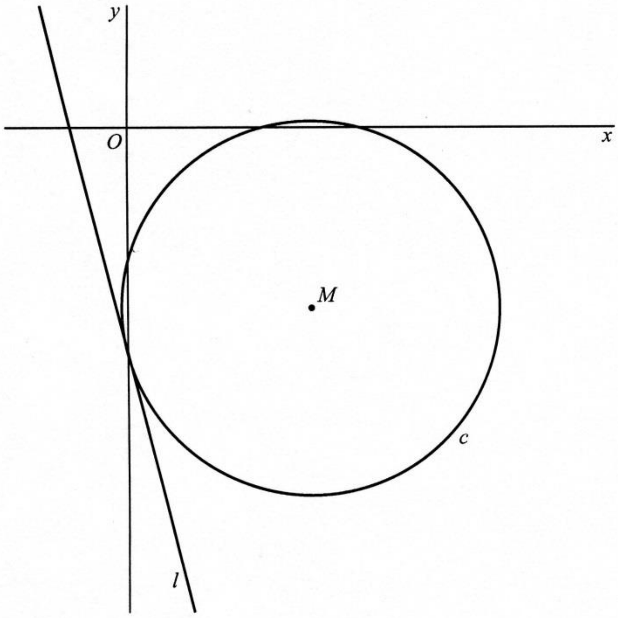
Analyse
Veel leerlingen bleken niet de parate kennis te hebben van puntsymmetrie anders dan in de oorsprong en moesten daarom eerst uitvogelen wat dat concreet voor het te bewijzen betekende. Dus WDA.

Voorbeeld 4.2.7 – Vraag 17 wiskunde B havo 2013: Cirkel en lijn

Nog een mooi voorbeeld, nu uit het examen wiskunde B havo 2013, vraag 17. De vraag suggereert een bepaalde aanpak, maar er zijn meerdere oplossingsroutes.

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 6y = -8\frac{2}{5}$ en middelpunt M en de lijn l met vergelijking $y = -4x - 3\frac{3}{4}$. Zie de figuur.

figuur



In de figuur lijkt het erop dat l de cirkel raakt. Als l inderdaad c raakt, dan is de afstand van M tot l gelijk aan de straal van c. Echter, de afstand van M tot l is kleiner dan de straal van c.

8p **17** Toon op algebraïsche wijze aan dat de afstand van M tot l kleiner is dan de straal van c.

Analyse
De formulering van de vraag lijkt tot doel te hebben een doelanalyse te voorkomen. In plaats van te gaan rekenen met afstanden (het weggegeven doel), kan de vraag ook getransformeerd worden naar het snijden van de lijn en de cirkel. Zijn er snijpunten, dan is aan het gevraagde voldaan. Ook de transformatie naar een meer meetkundige vraagstelling is mogelijk, zie de WDA Logisch redeneren met meetkundige eigenschappen.

Bij veel vragen van de pilotexamens lijkt het erop dat de vraagstellingen tot doel hebben te voorkomen dat leerlingen zelf moeten nadenken over het doel, over dat wat wordt gevraagd. Dat moet anders, conform het bedoelde examenprogramma.
Zo wordt in de volgende opgave in een heel bekende context (de koelwet van Newton) niet alleen verteld dat het verschil tussen de oventemperatuur en de omgevingstemperatuur exponentieel afneemt, maar wordt ook de structuur van de gevraagde formule weggegeven. Simpel invulwerk. Het alleen geven van de tabel (met wat meer data dan nu) en vervolgens vragen naar het type verband en de formule maakt het tot een WDA, zonder dat de oplossing buiten bereik van de leerlingen komt te liggen.

Voorbeeld 4.2.8 – Vraag 12 wiskunde A vwo 2014: Keramiek

Omdat het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur, dus V, bij benadering exponentieel afneemt, kan dit verschil worden beschreven met een formule van de vorm: $V = b \cdot e^{ct}$. Hierin wordt V uitgedrukt in ^{o}C en is t de tijd in uren na het uitzetten van de oven. Voor de oventemperatuur T in ^{o}C kan nu een formule worden opgesteld van de vorm: $T = a + b \cdot e^{ct}$.

Bereken de waarden van a, b *en* c in de formule voor T.

Po-3 Probleemoplossen-3 Vooraf (de eerste stappen van) een eenvoudig stappenplan bedenken.

Hoe kan ik beginnen? Wat doe ik eerst? Wat dan? Leidt dat tot iets goeds?

Docenten die al jaren weten hoe bepaalde opgaven kunnen worden aangepakt, realiseren zich niet altijd dat leerlingen een aanpak moeten bedenken voor opgaven die voor hen niet reproductie zijn. Vaak houdt die aanpak ook het bedenken van een eenvoudig stappenplan in. "Als ik nu eerst dit ga doen en dan dat…." Soms is het nodig om vooraf al een complex stappenplan in het hoofd te hebben, voordat er wordt gerekend. Zie de volgende voorbeelden.

Zelf laat ik zelden een oplossing of uitwerking zien. Ik stel alleen maar vragen, zoals: "Nee, niet meteen rekenen. Wat zou je kunnen doen? En wat dan? Helpt dat om tot een oplossing te komen?

Voorbeeld 4.2.9 – Vraag 4 wiskunde A havo 2013: De huisarts

Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen H_V na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als $H_V = 106t + 1078$.

Ook het totaal aantal huisartsen H_T neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule $H_T = 107t + 6703$, met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 1990.

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor H_T en H_V is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

4 Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

Analyse
Dat vereist dus zoiets als:
Stap 1 Het zal wel met een vergelijking moeten.
Stap 2 Die vergelijking opstellen.
Stap 3 Die vergelijking oplossen.
Stap 4 Het gevraagde antwoord geven.
Stap 5 Even terugkijken. Lijkt dit een redelijk antwoord?

Mijn leerlingen moesten eerst wel wennen dat ik bij vragen niet onmiddellijk met een uitleg losbarst. "Bij u moeten we het zelf eerst maar proberen." Leerlingen kwamen binnen met de idee dat nadenken tijdverlies is. In de sectie zijn wij nu aan het nadenken wat we daar aan moeten doen, vanaf leerjaar 1.

Voorbeeld 4.2.10 – Vraag 8 wiskunde B havo 2013: Derdegraadsfunctie en gebroken functie

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = -x^3 + 4x$ en $g(x) = 1 - \dfrac{1}{(ax+1)^2}$.

Voor elke waarde van a snijden de grafieken van f en g elkaar in de oorsprong. Er is een waarde van a zodat in de oorsprong de raaklijnen aan de grafieken van f en g loodrecht op elkaar staan.

Bereken exact deze waarde van a.

Wat moet ik achtereenvolgens doen? Die vraag helpt om op koers te blijven.

De standaardtechniek van het differentiëren moet in stappen worden toegepast om de vraag te kunnen beantwoorden. Een eenvoudig plan is vereist:

Stap 1. *De helling van de raaklijnen in de oorsprong vind je door de afgeleide voor* $x = 0$ *te berekenen.*

Stap 2. *Differentieer* $f(x)$ *en* $g(x)$ *en bereken* $f'(0)$ *en* $g'(0)$.

Stap 3. *Bedenk dat loodrecht betekent dat het product van de hellinggetallen gelijk is aan -1.*

Stap 4. *Vermenigvuldig de hellinggetallen en trek de conclusie.*

Stap 5. *Even terugkijken. Lijkt dit een redelijk antwoord?*

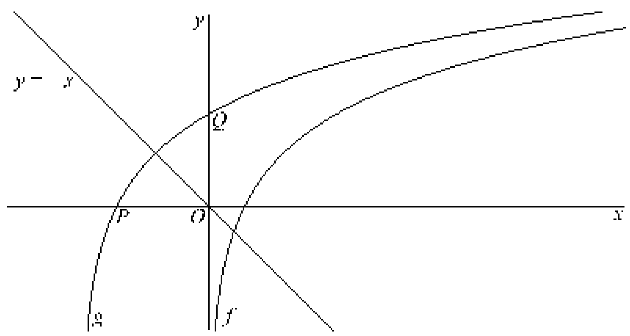
Voorbeeld 4.2.11 – Vraag 7wiskunde A vwo 2014 (2[e] tijdvak): Gespiegelde punten

Voor $x > 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 \cdot \ln x$.

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, waarbij $a > 1$. De grafiek van g snijdt de x-as in punt P en de y-as in punt Q.

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Zie de figuur.

figuur



8p 7 Bereken deze waarde van a. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Hier zijn heel wat stappen te maken. Waar te beginnen? Heb ik de functie g nodig? Om daarmee de coördinaten van P en Q berekenen? En dan maar eens kijken wat die spiegeling betekent?

Stap 1 $g(x) = 2 \cdot \ln(x + a)$

Stap 2 $g(x) = 0$ *geeft* $x_P = 1 - a$

Stap 3 $y_Q = g(0) = 2 \cdot \ln a$

Stap 4 Die spiegeling levert dus $2 \cdot \ln a = 1 - a$
Stap 5 Nu verder oplossen met de GR.

In dit stappenplan is uitgegaan van de gegeven situatie en van daaruit doorgewerkt.
Je kunt ook weer eerst het doel transformeren in $y_Q = -x_P$ en daar de berekeningen bij aanpassen. Soms gaat dat sneller. Wat deden de leerlingen?

Opgaven die je vanuit verschillende richtingen kunt aanpakken vind ik altijd een mooie kans om in de les achteraf op terug te kijken. Of vooraf ideeën voor een aanpak te inventariseren. Waarna iedereen verder gaat met de eigen favoriete benadering.

Po-4 Probleemoplossen-4 Vertalen naar een bekend wiskundig probleem.
Komt dit me bekend voor? Even uitschrijven? Een voorbeeld proberen?

Ook dit lijkt voor een expert vaak een triviale stap, maar voor een beginnende docent is het dat zeker niet zonder meer. In de wiskundige of toegepaste context moet een al beheerst wiskundig gereedschap worden herkend. Neem bijvoorbeeld:

Voorbeeld 4.2.12 – Vragen 8 en 9 wiskunde A vwo 2013: Vierkanten
Even het aantal verschillende vierkanten tellen? Op grond van de uitvoerige beschrijving (meer dan 100 woorden en drie plaatjes) moet je dan toch eerst op het idee komen dat het gewoon een bekend telprobleem is. Hetzelfde geldt voor de volgende vraag.

Voorbeeld 4.2.13 – Vraag 17 wiskunde C vwo 2013: DNA-bewijs
In ruim 100 woorden wordt de context uitgelegd. Daarna volgt de vraag:

> Bereken het aantal mogelijke vergelijkingen spoor-persoon en het aantal mogelijke vergelijkingen spoor-spoor uitgaande van het aantal DNA-profielen in de databank in september 2009.

Analyse
Tja, als je de tekst eenmaal heb gedecodeerd, dan herken je dat je voor spoor-persoon gewoon het aantal mogelijkheden van elk moet vermenigvuldigen, 40000·80000. Gewoon 40000 meisjes koppelen aan 80.000 jongens. En dat spoor-spoor hetzelfde is als het aantal paren uit 40.000 mensen.
Nu was de score p=0,33. Formuleer je de vragen als hierboven dan kom je wellicht boven de p=0,90 uit.

Voorbeeld 4.2.14 – Vragen 17 en 18 wiskunde A havo 2013: Formule 1
Voor een correcte beantwoording van de vragen 17 en 18 moeten de leerlingen zich door een grote hoeveelheid informatie (anderhalve pagina) worstelen. Als ze die gegevens wat op een rijtje hebben, moeten ze die vervolgens vertalen naar een 'kale' wiskundige situatie, telproblemen, die ze in de lessen hebben ontmoet. Op een aantal WDA wordt een beroep gedaan*:*
Po-1 Probleemoplossen-1 De gegeven situatie analyseren.
Po-4 Probleemoplossen-4 Vertalen naar een bekend wiskundig probleem.

Analyse
In vraag 17 wordt het aantal startopstellingen gevraagd, "gewoon" het product van het aantal mogelijke opstellingen per rij, $10! \cdot 7! \cdot 7!$ *(p=0,24). En wat zou de score zijn als er "gewoon" was gevraagd naar het aantal verschillende woorden van drie letters, gekozen uit groepjes van 10, 7 en 7 letters, in elk groepje onderling verschillende letters?*

Weet je, ik vraag mij af wat we nu eigenlijk toetsen met die lange verhalen. Ik heb 1 op 1 een dyslectische examenkandidaat havo begeleid. Wat je dan met redelijk succes zo'n leerling leert is om gewoon de getallen uit het verhaal op te schrijven en dan te bedenken wat voor vraag daarbij kan horen. Weten we zelf eigenlijk wel wat we hiermee toetsen? Tekstbegrip? Wiskunde?

Po-5 Probleemoplossen-5 — Een grafiek schetsen of onderzoeken met de grafische rekenmachine

Een bekende aanpak van een probleem is natuurlijk om het in een plaatje te schetsen. Merkwaardig genoeg lijkt het erop dat het bezit van een grafische rekenmachine juist de vaardigheid om even een schets van de grafiek te maken heeft ondermijnd. Bekend zijn de beruchte voorbeelden uit de eerstejaars toetsen na de invoering van de tweede fase. Bijvoorbeeld 22% van de aankomende eerstejaars aan de TU Delft maakte de vierkeuzevraag $x^2 \geq 4x$ goed, terwijl een simpel plaatje onmiddellijk uitsluitsel geeft.

Een formule/vergelijking grafisch interpreteren

Voordat de leerlingen naar de grafische rekenmachine grijpen, wil ik dat ze eerst nadenken over de formule/vergelijking. Eventueel een schets maken. $y = 12 - 3.2^{-0,7x}$ *"Hoe loopt de grafiek? Wat als die 12 er niet staat? En die exponent, wat doet die? Wat gebeurt er als x naar plus oneindig gaat? Of naar min oneindig? Dat soort vragen komen ook in een toets… en zonder GR.*

Even proberen met de grafische rekenmachine wat de kenmerken zijn.
Deze WDA komt niet expliciet aan de orde in de pilotexamens. Leerlingen kunnen op deze manier wel een beter beeld krijgen van de situatie. En deze WDA is ook een goede start voor een echte onderzoeksvraag.

Voorbeeld 4.2.15 – Variant op vraag 8 wiskunde B havo 2013

> De functies *g* zijn gegeven door $g(x) = 1 - \dfrac{1}{(ax+1)^2}$.
>
> Onderzoek of de grafieken voor alle waarden van $a \neq 0$ symmetrisch zijn. Toon die symmetrie vervolgens *algebraïsch* aan.

Analyse

- *Verkenning van de grafieken van* g *, bij voorbeeld met de grafische rekenmachine.*
- *De eigenschappen van de grafiek, met name. de verticale asymptoot, terugvertalen naar de formule van* g *.*
- *Symmetrie vertalen naar een algebraïsche vorm.*

Po-6 Probleemoplossen-6 — Getallenvoorbeelden doorrekenen en daaruit conclusies trekken.

Eerst enkele getallenvoorbeelden doorrekenen geeft een indruk van de operaties die moeten worden uitgevoerd en het helpt bijvoorbeeld om een formule met dezelfde structuur op te stellen. Maar rekenen met getallenvoorbeelden en een tabel leidt vaak ook direct tot een acceptabele redenering en oplossing.

Voorbeeld 4.2.16 – Vraag 11 wiskunde A havo 2013: Ontslagvergoeding

De eerste rekenmethode gebruikt de formule $V_1 = 0{,}5 \cdot m \cdot g$.

De tweede rekenmethode gebruikt de formule $V_2 = 6 \cdot m + 2{,}4 \cdot m \cdot d$.

Vakbonden hebben liever dat de formule voor V_2 gebruikt wordt dan de formule voor V_1. Toch is de formule voor V_2 niet altijd gunstiger. Er zijn situaties waarbij de eerste formule gunstiger is voor een ontslagen werknemer.

11 Geef een rekenvoorbeeld van zo'n situatie en geef daarbij aan op welke leeftijd de werknemer in dienst is getreden en op welke leeftijd hij ontslagen wordt.

4.3 Abstraheren

Bij *abstraheren* gaat het om het 'doorzien' van onderliggende wiskundige concepten in een gegeven situatie, zodat je kunt 'zien' en uitleggen dat het om eenzelfde begrip gaat. Bijvoorbeeld dat het begrip 'afgeleide' het onderliggende begrip is in een natuurkundige context (snelheid), in een economische context (marginale kosten), in een grafisch beschreven situatie (helling), in een formule of een tabel. Omgekeerd gaat het ook om het kunnen vertalen van abstracte begrippen (bijvoorbeeld primitiveren, integraal) naar concrete objecten (bijvoorbeeld afgelegde weg in een snelheid-tijd grafiek) en situaties (inhoud omwentelingslichaam).
Opgaven die toetsen of leerlingen kunnen abstraheren (of een abstractie hebben bereikt) vereisen van leerlingen veelal een redenering met kernconcepten uit een subdomein van de wiskunde. Het zwaartepunt ligt daarom in de volgende voorbeelden bij het redeneren met wiskundige begrippen of eigenschappen. In de volgende voorbeelden worden een aantal onderliggende concepten concreet geïllustreerd met opgaven uit de pilotexamens. Eerst komt een docent aan het woord, die vertelt hoe hij werkt aan het abstraheren, het leren 'doorzien' van het onderliggende begrip.
(N.B. In de pilotexamens wiskunde A havo is nog geen statistiek getoetst, terwijl dat subdomein nu wel in het centrale examen zal worden getoetst. Er zijn daarom ook nog geen voorbeelden beschikbaar. Vanzelfsprekend is er ook bij statistiek sprake van concepten, waarmee moet worden geredeneerd. Denk aan de relatie tussen steekproef en populatie, samenhang en causaal verband enzovoort.)

De boeken gaan veel te snel over op rekenen, waardoor de leerlingen het achterliggende begrip ontgaat. Daarom begin ik altijd een onderwerp met eigen voorbeelden en bouw dan in een vraag- en antwoordspel samen met hen het begrip op. Neem bijvoorbeeld de start van het differentiëren. Je neemt een fietstochtje van de school naar het sportveld, bedenkt samen een tabel van tijden en afstanden, vraagt naar de gemiddelde snelheid over een traject en naar de snelheid op een bepaald tijdstip. We maken er een grafiek bij enzovoort. Dan pakken we een formule voor zo'n fietstocht en lopen weer die vragen na. Op die manier heb je een context waar je vaak op terug kunt komen en win je tijd door een flink aantal van die kleine sommetjes uit het boek over te slaan.

Mijn kleinzoon, 5 vwo, heel intelligent, vroeg mij om hulp bij het hoofdstuk over integreren. "Kijk opa, nu hebben we primitiveren gehad en beginnen ze opeens over oppervlakte. Wat heeft dat nu met primitiveren te maken?"
"Wat zegt u nu? Is dat ook hetzelfde als we bij natuurkunde deden, de oppervlakte onder een tijd-snelheid grafiek?"

Ab-1 Abstraheren-1 Redeneren met kenmerken van formules en functies.

Welke variabelen doen er toe? Wat doet de waarde van de formule als een variabele heel grote waarden aanneemt? Welke variabele draagt het meeste bij aan de waarde van de formule? Wanneer is er sprake van stijging? Enzovoort.

N.B. De grenzen met de WDA Formules manipuleren en Modelleren zijn moeilijk scherp te trekken. De nadruk bij "Abstraheren" ligt op het redeneren.

Voorbeeld 4.3.1 – Vraag 6 wiskunde A havo 2013: Frisbee werpen

In de volgende vraag zijn L en B de lengte en breedte van een tegel en d de diameter van een frisbee. P is het verwachte percentage worpen waarbij de frisbee op meer dan één tegel terechtkomt. Komt de frisbee op één tegel terecht, dan krijg je een prijs.

$$P = 100 \cdot \frac{L \cdot B - (L-d)(B-d)}{L \cdot B}$$

De kermisexploitant heeft frisbees met verschillende diameters. Hij zegt: "Hoe groter de diameter van de frisbee is, des te kleiner is het verwachte percentage worpen dat een prijs oplevert." Uit de formule volgt dat deze uitspraak waar is.

Toon dit aan de hand van de formule aan, zonder voor *d* getallen in te vullen.

Analyse

De formulering "zonder voor d getallen in te vullen" is natuurlijk contraproductief. Je wilt juist dat leerlingen eerst maar eens een getallenvoorbeeld proberen (Polya!) om daarmee op het spoor van een algemene redenering te komen!

Voorbeeld 4.3.2 – Vraag 14 wiskunde A vwo 2013: Lichaamsoppervlak

$$S_{Dubois} = 0{,}007184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425}$$

S_{Dubois} is de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg. Het lichaamsgewicht (M) is evenredig met het volume. Als de lengtematen (lengte, breedte, hoogte) van een lichaam worden verdubbeld, wordt het volume 8 keer zo groot.

Toon met behulp van deze formule aan dat bij verdubbeling van lengtematen de lichaamsoppervlakte 4 keer zo groot wordt.

Analyse

In de examenopgave staat nog veel als uitleg bedoelde informatie, zonder dat die extra tekst de leerlingen op het goede spoor zette. Ook nu geldt weer dat de formulering in de examenvraag "zonder getallen in te vullen" natuurlijk contraproductief is. Je wilt juist dat leerlingen eerst maar eens een getallenvoorbeeld proberen (Polya!) om daarmee op het spoor van een algemene redenering te komen!

Natuurlijk kan ik na zoveel jaren ervaring al die sommetjes wel die de leerlingen moeten maken. Er zijn collega's die daarom hun lessen niet meer voorbereiden. Wel gemakkelijk, maar op die manier bereik je natuurlijk geen diepgang. Mijn lesvoorbereiding is altijd een antwoord op mijn vraag: "Hoe kan ik ze over wiskunde aan het denken krijgen?" Het gaat om de waarom-vraag! En dus moeten ze leren redeneren, ook over simpele formules.

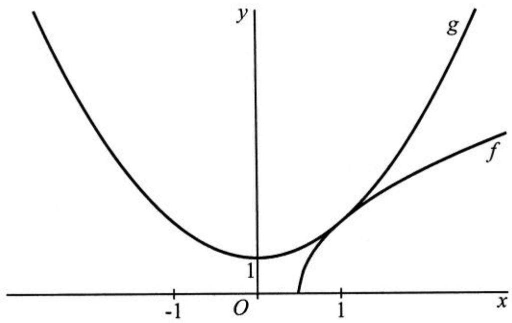
Ab-2 Abstraheren-2 **Redeneren met transformaties van functies.**

Het beslissende kenmerk is weer dat er moet worden geredeneerd met eigenschappen, in dit geval met eigenschappen van transformaties.

Voorbeeld 4.3.3 – Variant op vraag 4 wiskunde B havo 2013

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\sqrt{8x-4}$ en $g(x)=x^2+1$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur 1



De grafieken van f en g hebben het punt $(1, 2)$ gemeenschappelijk.

Naast de gevraagde *reproductie* in de vragen 4 en 5 kan ook deze WDA Ab-2 worden getoetst, namelijk het inzicht om bij een gegeven transformatie het bijpassende functievoorschrift te maken.
Bijvoorbeeld als volgt:

- De grafiek van f wordt horizontaal verschoven. De grafiek van de nieuwe functie k gaat door punt P(1,6). Wat wordt de nieuwe functie $k(x)$?
- De grafiek van g wordt gespiegeld in de lijn $y = x$. Wat wordt de nieuwe functie $m(x)$?

Enzovoort met combinaties van transformaties.

Een mooi voorbeeld van een combinatie van WDA is te vinden in de al eerder weergegeven opgave van voorbeeld 3.2.2 (*vraag 10 wiskunde B vwo 2013: Halverwege).*
De grafiek van functie f wordt getransleerd en gespiegeld, waarna van de nieuwe functie h de formule moet worden opgesteld. Eerst de gegeven grafische situatie goed analyseren, dan de eigenschappen van transformaties toepassen en vervolgens de formule maken.

Ab-3 Abstraheren-3 **Redeneren met de eigenschappen van de afgeleide.**

Een centraal begrip als ´de afgeleide functie´ moet zeker ook worden getoetst in alle representaties waarin die een rol speelt. Dat inzicht zakt vaak weg na veel rekenwerk.

Een goed voorbeeld is de volgende vraag, waarin de leerlingen niet alleen wordt gevraagd om de afgeleide te berekenen, maar ook te *redeneren* over het gedrag van de oorspronkelijke formule.

Voorbeeld 4.3.4 – Vraag 3 wiskunde A vwo 2013: Zevenkamp

$$P_{200m} = 4{,}99087.(42{,}5 - X)^{1{,}81}$$

Met de afgeleide van de formule voor de 200 meter, P_{200m}, met de tijd X tussen 0 seconden en 42,5 seconden, is na te gaan of P_{200m} toenemend stijgend, toenemend dalend, afnemend stijgend of afnemend dalend is.

3 Bepaal deze afgeleide en onderzoek met behulp van een schets van de grafiek van deze afgeleide of P_{200m} toenemend stijgend, toenemend dalend, afnemend stijgend of afnemend dalend is.

Ab-4 Abstraheren-4 **Betekenis van een concept in termen van een wiskundige of toegepaste context uitleggen.**

In alle programma's kan/moet worden gevraagd wat de betekenis van een uitkomst van een berekening is. Een leerling in de onderbouw moet kunnen uitleggen wat de gevonden oplossing van een vergelijking betekent. Of wat de parameters in een lineaire formule betekenen in een grafiek of in de context waar die formule aan is gekoppeld. Enzovoort.

Voorbeeld 4.3.5 – Vraag 15 wiskunde A vwo 2013: Lichaamsoppervlak

Bij een volwassen vrouw met een lengte van 1,75 m hoort, uitgaande van de bovenstaande formule van Dubois, de formule $S_{Dubois} = 0{,}303787 \cdot M^{0{,}425}$

Bereken door middel van differentiëren van deze laatste formule de waarde van de afgeleide voor $M = 66$ kg en leg uit wat de betekenis is van die waarde.

Ab-5 Abstraheren-5 **Redeneren met eigenschappen van parametervoorstellingen.**

Nog een voorbeeld van het bedoelde abstraheren. In wiskunde B vwo hoort daar natuurlijk ook het integreren bij. En zo zijn er allicht nog meer gedetailleerde uitwerkingen te vinden.

Voorbeeld 4.3.6 – Vraag 15 wiskunde B vwo 2013: Een eivorm

$x = 4 + 2\sin t$ en $y = 2\cos t$ met $0 \le t \le \pi$

$x = 4 + 4\sin t$ en $y = 2\cos t$ met $\pi \le t \le 2\pi$

Dit model voor de eivorm bestaat uit een halve cirkel gecombineerd met een halve cirkel die horizontaal is uitgerekt.

15 Toon dit aan en bereken hiermee de lengte en breedte van het ei.

Analyse

Het gevraagde omwerken van de parametervoorstelling zou wellicht gelet op het examenprogramma reproductie moeten zijn.

Aansluitend passen hier omgekeerd vragen naar het opstellen van een parametervoorstelling bij als de cirkels op een andere manier worden vervormd of verschoven. Dat vereist zeker een redenering met de eigenschappen van een parametervoorstelling.

4.4 Formules manipuleren

Symbol sense

Het moeilijk te vertalen begrip *symbol sense* is een kernbegrip in de didactiek van de algebra en het rekenen aan en redeneren met formules. Voor elk programma (havo, vwo wiskunde A, B, C) is vastgelegd wat leerlingen aan algebraïsche vaardigheden paraat moeten hebben, het *Weten dat*. Maar onder *symbol sense* valt ook een scala aan WDA. Het gaat bijvoorbeeld over het redeneren met formules en algebraïsche expressies, wat in dit document onder abstraheren (zie voorbeelden 4.3.1 en 4.3.2) is geclassificeerd. Daaraan verbonden is het vermogen om globaal naar een formule te kijken en de betekenis van de variabelen en de rekenregels in het oog te houden. Zie voor een nadere bespreking het hoofdstuk over variabelen en vergelijkingen in het *Handboek Wiskundedidactiek* (Drijvers et al., 2012).

Het gaat bij *symbol sense* in de eerste plaats om de vraag of leerlingen een betekenis kunnen geven aan de variabelen en de rekenregels. Daarover eerst maar eens een herkenbaar fragment van een les (USA, Alan Schoenfeld), een citaat uit de oude doos (Van Dormolen) en een verzuchting van een wiskundedocent.

Voorbeeld 4.4.1 – Lesfragment USA

De les gaat over machten in breuken en de leerlingen hebben in groepjes gewerkt aan de drie volgende opgaven. De docent loopt met de klas hun antwoorden na.

a) $\dfrac{m^6}{m^2}$ b) $\dfrac{x^3y^7}{x^2y^6}$ c) $\dfrac{x^5}{x^5}$

Vraag a) ? *Paul?* m^4 *. Ja dat is goed. Iemand iets anders?*

Vraag b) ? *Ik hoor* xy *. Hoe deed je dat? Aftrekken?*
Ja, dus 3-2 voor de x *en 7-6 voor de* y *.*

Vraag c) ? De antwoorden zijn 0, 0 gedeeld door 0, *x*, niets. De docent schrijft de breuk over, vraagt hoeveel x -en er staan, vraagt *Wat nu?*, leerlingen zeggen *wegstrepen*, docent zegt ook *wegstrepen* en nu staat er dit op het bord: $\dfrac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}$

Docent: *Wat heb ik nu over?* Leerlingen: *0; 0 gedeeld door 0; weg is weg.*
De docent protesteert, schrijft op het zijbord 5 gedeeld door 5, dat is dus 1.

Nu volgt een periode van verwarring, waarin de leerlingen geen verband zien tussen zijn voorbeeld en de opgave met al die x -en.
Dan steekt een leerling de vinger op: *Dus* x *tot de macht 0 over 1.* Docent hoort het 'gewenste' antwoord, valt haar bij, benadrukt dat tot de macht 0 gelijk is aan 1, waarna een andere leerling roept: *Yes. 1. I knew!!* De docent sluit deze episode af met de opdracht om in het schrift te schrijven: $a^0 = 1$.

In het boekje *Vaardigheden* (Van Dormolen, 1975) staat het volgende fragment, een voorbeeld van wat je eigenlijk als docent wilt bereiken.

Voorbeeld 4.4.2 – Vaardigheden

Een leerling heeft geleerd om opgaven als $(ab)^3 =$ en $(2p)^5 =$ en $(3abc)^7 =$ foutloos te herleiden tot producten van machten. Dan komt er een nieuw probleem:
$(a^2b^3)^4 = ?$ Dat is a^8b^{12}.
'*Hoe kom je daar aan?*'

'Je moet a^2 tot de vierde macht doen, dat is a^8. En je moet b^3 ook tot de vierde macht doen, dat is b^{12}.'
'Waarom moet je a^2 tot de vierde macht doen? '
'Wat tussen haakjes staat moet je tot de vierde macht doen. Dat is dus een product waarin a^2 vier keer voorkomt. Dat is dus a^2 tot de vierde.'

> *Soms weet ik het ook niet meer. Dan vragen leerlingen in de bovenbouw aan mij wat $(x^3)^5$ ook al weer is. En dan hebben ze geen idee hoe ze daar achter moeten komen, anders dan het zich herinneren van een regel. En als ik er niet bij ben of op de toetsen, dan kan er zomaar x^8 uit komen. Het gevoel van wat er uit kan komen ontbreekt vaak.*

Voor de vaardigheid 'formules manipuleren' is een classificatie tussen reproductie en productie alleen eenduidig mogelijk als helder wordt gedefinieerd wat voor een bepaalde doelgroep, lees bepaald examenprogramma, tot reproductie moet worden gerekend. Op basis van de syllabi en de leerstof uit de onderbouw is daarin een keuze te maken, zodat een duidelijke consensus voor het onderwijs en de constructie van toetsen mogelijk is. Onder de WDA *Formules manipuleren* verstaan we in dit document het niet standaard manipuleren van een formule of vergelijking. Het kwalitatief redeneren is al bij het *abstraheren* benoemd en het maken van een formule komt bij de WDA *Modelleren en algebraïseren* aan de orde.

Fo-1 Formules manipuleren-1 Twee formules door substitutie in elkaar uitdrukken.

In de pilotexamens komt deze WDA (te) weinig voor. Een eenvoudig geval is terug te vinden in de volgende, heel slecht gemaakte, vraag.

Voorbeeld 4.4.3 – Vraag 14 wiskunde C vwo 2013: Gelijke volumes

Noem de lengte in cm van een zijde van het vierkante grondvlak van een voorwerp uit deze serie l. Omdat de inhoud van elk voorwerp uit deze serie gelijk is aan 1 m^3, dus gelijk is aan 1 000 000 cm^3, geldt nu het volgende: $l^2 \cdot h = 1000000$.
Uitgaande van deze formule kan men een formule opstellen waarin l wordt uitgedrukt in h.
14 Stel deze formule op.

Fo-2 Formules manipuleren-2 Stapsgewijs een complexe vergelijking/formule oplossen/herleiden.

Het sleutelwoord is hier natuurlijk het bijvoeglijk naamwoord 'complexe'. In de onderbouw en in de examenprogramma's worden allerlei typen vergelijkingen opgelost en formules herleid. Maar dat is nog geen WDA *Formules manipuleren.* Veelal gaan die manipulaties door oefenen en veelvuldig toepassen tot het standaard wiskundig gereedschap behoren en is de toetsing reproductie. Tussen de verschillende examenprogramma's bestaan juist in het beoordelen van dit aspect van deze WDA grote verschillen.

Voorbeeld 4.4.4 – Vraag 16 wiskunde B havo 2013: Een halve cirkel als grafiek

Gevraagd het middelpunt en de straal van een (halve) cirkel die de grafiek is van de functie f met vergelijking $y = 1 + \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$.

Analyse

Deze opgave vereist eerst een analyse van de gegeven situatie Po-1, daarna een herformulering van het doel Po-2 (middelpunt en straal kan ik afleiden uit een vergelijking van het type $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ *en vervolgens stap voor stap herleiden naar die vorm Fo-2.*

(Ook in deze opgave kan worden gekozen voor een meer meetkundige aanpak.)

Voorbeeld 4.4.5 – Vraag 7 wiskunde A havo 2013

$P = 100 \cdot \dfrac{L \cdot B - (L-d)(B-d)}{L \cdot B}$ als $B = L$ herleiden tot $P = 100 \cdot \dfrac{2dL - d^2}{L^2}$.

Analyse

Dit lijkt een grensgeval. Eigenlijk zal dit reproductie moeten zijn, volgens de tabel in de syllabus.

In het pilotexamen wiskunde B havo 2014 komt verschillende keren de vraag naar een exacte oplossing voor. Terecht, maar is dat nu de WDA Formules manipuleren?
Vraag 5 een tweedegraads vergelijking, dus reproductie.
Vraag 7 een eerstegraads vergelijking, dus reproductie.
Vraag 9 een derdegraads vergelijking, x buiten haakjes, dus reproductie.
Vraag 10 een tweedegraads vergelijking, dus reproductie.
Vraag 13 een tweedegraads vergelijking, dus reproductie.
Vraag 16 een eerstegraads vergelijking, dus reproductie.
Vraag 17 type $A \cdot B = A \cdot C$, dus reproductie.
De aanpak van elke vergelijking of formule is standaard.
Het gehalte aan WDA Formules manipuleren is in deze opgave niet erg hoog. In het vervolgonderwijs krijgen deze leerlingen te maken met veel complexere formules en vergelijkingen.

4.5 Modelleren en algebraïseren

De WDA *Modelleren en algebraïseren* heeft een centrale plaats gekregen in de publicaties van cTWO en in het pilot-lesmateriaal. Tot de parate vaardigheden hoort het opstellen van de formules bij standaardfuncties, met enige variatie tussen de verschillende programma's. Daarnaast hoort het opstellen van een model in wiskundige termen bij een gegeven probleemsituatie tot de algemene vaardigheden voor iedere doelgroep. Sinds de invoering van de tweede fase havo-vwo wordt in de rubriek vaardigheden van de examenprogramma's wiskunde veel tekst gewijd aan deze wiskundige denkactiviteit, terwijl de uitwerking in de centrale examens tot nu toe volgens veel wiskundelaren mager is.
Het bepalende kenmerk van deze WDA is dat het algebraïsch rekenwerk sterk gekoppeld moet zijn aan de situatie waar die formule of het model een beschrijving van is. Dat is iets anders dan het aankleden (inkleden zeiden we vroeger eerlijk) van een wiskundige formule met een context, terwijl de vragen en acties en beschrijvingen nagenoeg niets met het model doen. Het rekenen aan die formules is dan niet rijk aan betekenis, maar zonder betekenis en kan meestal net zo goed met 'kale' formules in x en y worden uitgevoerd.

Het *Modelleren* is onder te verdelen in een aantal stappen. Zie bijvoorbeeld de syllabi sinds 2000 en het *Handboek Wiskundedidactiek.* In een probleemsituatie of een set vragen naar aanleiding van een context behoeven natuurlijk niet alle aspecten naar voren te komen. Dat is wel het geval bij een praktische opdracht of profielwerkstuk, waarin in een optimale omgeving verschillende wiskundige activiteiten kunnen worden gemobiliseerd. De grens met kwalitatief redeneren met formules (*abstraheren-1*) is niet scherp aan te geven. Je moet kwalitatief kunnen redeneren om bijvoorbeeld de grenzen van een model te bepalen.

Mo-1 Modelleren-1	Waar komt het model vandaan? Zijn er data of andere gegevens om aan het model betekenis te geven?
Mo-2 Modelleren-2	Een wiskundig model opstellen.
Mo-3 Modelleren-3	De relevantie van het model testen.
Mo-4 Modelleren-4	Het model aanpassen.
Mo-5 Modelleren-5	Modellen vergelijken.
Mo-6 Modelleren-6	Formules van modellen manipuleren.
Mo-7 Modelleren-7	Resultaten beoordelen in het licht van de context.

In de voorbeelden lopen de verschillende modelleerstappen vaak door elkaar.
We beginnen met *Mo-2: Een wiskundig model opstellen.*

Mo-2 Modelleren-2 Een wiskundig model opstellen

Voorbeeld 4.5.1 – Vraag 4 wiskunde A havo 2013: De huisarts
Zie hiervoor bij *Po-3 Vooraf een eenvoudig stappenplan bedenken* en dan de vergelijking opstellen waar de vraag mee kan worden beantwoord.

Een mooi voorbeeld van keuzes die gemaakt kunnen worden voor het toetsen van deze WDA is te vinden in:

Voorbeeld 4.5.2 – Vraag 11 wiskunde A vwo en 21 wiskunde C vwo: Vierkanten
Eerst de formulering uit het wiskunde C vwo examen.

> In het algemeen geldt voor een kunstwijzer van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot en met p^2-1 precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal:
>
> $$\textit{magisch getal} = 0{,}5\cdot p\cdot(p^2-1)$$
>
> Deze formule voor het magische getal is af te leiden door gebruik te maken van het volgende:
>
> - Voor de som van alle getallen in het kunstwerk geldt de formule.
>   *Som = 0,5.aantal termen.(eerste term + laatste term)*
> - Het aantal termen is p^2 (dit is namelijk gelijk aan het aantal getallen in een kunstwerk van p bij p getallen.
> - De eerste term is 0, de laatste term is p^2-1.
> - Het magische getal is gelijk aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.
>   Laat zien hoe je met behulp van bovenstaande de formule
>   *magisch getal* = $0{,}5\cdot p\cdot(p^2-1)$ kunt afleiden.

Analyse
Hier is duidelijk sprake van het opstellen van een formule bij een situatie, maar is dit een WDA? Met alle gegevens is dit gewoon een invuloefening en daarom eigenlijk geen WDA. Ook zonder dat de lezer iets weet over dat kunstwerk, kan de formule worden opgesteld. Zeker geen WDA Modelleren. En het blijft de vraag of al die extra gegevens helpen om tot een goed antwoord te komen. Immers de aandacht wordt verlegd naar de tekst en niet geconcentreerd op een analyse van de situatie, het doel en een stappenplan. Overigens was de score van de leerlingen wiskunde C laag: p=0,16.

Kijken we nu naar de formulering van de parallelle opgave uit het wiskunde A vwo examen.

> **11** Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat de formule voor het magische getal juist is. Gebruik daarbij voor het berekenen van de som van de getallen de formule
> *som* = 0,5 . *aantal termen* · (*eerste term* + *laatste term*).

Analyse
Nu moeten de leerlingen wel degelijk bedenken wat de verschillende onderdelen van de formule zijn en hoe die samen tot de formule leiden. Dat is de WDA Mo-1 (p-waarde 0,26). Een struikelblok voor de leerlingen kan de somformule zijn, omdat ze die wellicht niet paraat hebben. Een tussenvraag om die af te leiden helpt wellicht.

Mo-6 Modelleren-6 — Formules van modellen manipuleren

Voorbeeld 4.5.3 – Vraag 16 wiskunde A vwo 2013 Lichaamsoppervlak
In de context over de oppervlakte van een lichaam worden twee verschillende formules voor dezelfde doelgroep (kinderen) geponeerd:

> $S_{Mosteller} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M}$ en $S_{Haycock} = 0{,}024265 \cdot L^{0{,}3964} \cdot M^{0{,}5378}$
> S is de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg. Om de formules beter met elkaar te kunnen vergelijken wordt gevraagd om de formule van Mosteller te herschrijven in de vorm $S = c \cdot L^a \cdot M^b$.

Analyse
Hoewel in de opgave wel wordt gesproken over het vergelijken, wordt niet gevraagd om dat ook daadwerkelijk te doen. Wat is de verschillende impact die L en M hebben op de maat voor lichaamsoppervlakte? Dus vragen naar redeneringen met voorbeelden waarin de verschillende exponenten een rol spelen. (Bij de ene formule weegt L zwaarder, bij de andere juist M .) Dat is tegelijk abstraheren, het redeneren met de eigenschappen van een (complexe) formule. En dan moet je wellicht niet weggeven hoe die formules zo kunnen worden herschreven dat de modellen kunnen worden vergeleken.

Mo-1 Modelleren-1 — Waar komt het model vandaan? Zijn er data of andere gegevens om aan het model betekenis te geven?

Natuurlijk is het niet nodig alle aspecten bij alle contextvragen te toetsen, maar de vragen moeten zeker in de context *betekenis* hebben.

Voorbeeld 4.5.4 - Vragen 1, 2, 3 wiskunde A vwo 2013: Zevenkamp
Er worden twee formules voor de puntentelling gegeven, namelijk:
$Punten = A.(B - X)^C$ voor de baanonderdelen
$Punten = A.(X - B)^C$ voor de veldonderdelen
Er worden vervolgens enkele zinvolle rekenvragen gesteld over bepaalde formules en de afgeleide.

Analyse
In deze context vallen de formules voor de puntentelling uit de lucht. Een gemiste kans om iets over Modelleren te vragen. Waar komen die modellen voor de weging van die prestaties vandaan? Zie bijvoorbeeld de finale van de Wiskunde A-lympiade 1993-1994. Ook de geschiedenis van de vele formules uit het verleden geeft aanleiding tot goede vragen. Even googlen en er komen echte modelleervragen langs over de verschillende modellen voor de puntentelling.

Mo-1 tot en met Mo-7
De volgende variatie op een context uit een examen heeft tot doel te laten zien hoe allerlei aspecten van het *Modelleren* ook in schriftelijke toetsen aan de orde kunnen komen.

Voorbeeld 4.5.5 – Variant op de vragen 1, 2, 3 wiskunde B havo 2013: Tornadoschalen
Er worden in de vragen 1 tot en met 3 twee formules gedropt:
$F = \left[\dfrac{v}{6{,}3}\right]^{\frac{2}{3}} - 2$, de Fujita-schaal en de Torro-schaal $v = 2{,}39 \cdot (T + 4)^{\frac{3}{2}}$
In vraag 1 moet de F worden uitgerekend bij een gegeven windsnelheid en in vraag 2 moet de vergelijking $F = 4$ worden opgelost met in beide vragen wat omrekeningen. Vraag 3 vraagt naar de formule die F in T uitdrukt met als gegeven $F = aT + b$.

Analyse
De natuurwetenschappelijke context zou de makers van de examenopgaven hebben kunnen inspireren om zwaar in te zetten op de WDA Modelleren. Dat wil zeggen dat de leerlingen door het gehele proces van een model maken, evalueren, bijstellen, vernieuwen enzovoort worden geleid, waarbij naast het manipuleren met formules ook het redeneren met formules en het zelf sleutelen aan een model aan de orde komen. Even googlen en er komt een schat aan nuttige informatie boven. De eigen activiteit van de leerlingen betreft alleen het algebraïsch rekenwerk. De gehele context speelt geen rol en kan gewoon worden weggelaten (aangeklede formules).

Deze context is in ieder geval een authentieke context. Maar hoe zou het *Modelleren* in deze context beter uit de verf kunnen komen? Enkele suggesties.

Mo-1 Modelleren-1 **Waar komt het model vandaan?**
Zijn er data of andere gegevens om aan het model betekenis te geven?
Tornado's kunnen grote schade aanbrengen. Voor de zwaarte van een tornado zijn verschillende meetschalen ontworpen. In 1971 is de Fujita-schaal ontwikkeld, die gekoppeld werd aan de beschrijving uit de volgende tabel.

Fujita	Beschrijving
$F=0$	Storm. Lichte schade. Afgebroken takken en bomen met ondiepe wortels weggeblazen.
$F=1$	Matige tornado. Daken zwaar beschadigd, caravans omvergeblazen, kassen vernield.
$F=2$	Stevige tornado. Belangrijke schade. Daken van stevig gebouwde huizen afgerukt, dikke bomen ontworteld, caravans opgetild en neergekwakt.
$F=3$	Zware tornado. Zware schade aan grote gebouwen, treinen omvergeblazen, grote auto's opgetild.
$F=4$	Verwoestende tornado. Sommige woningen met de grond gelijk gemaakt, treinen verplaatst, zware voorwerpen de lucht in geblazen.
$F=5$	Ongelooflijke tornado. Huizen van hun fundamenten gerukt, auto's over meer dan 100 meter verplaatst, structurele schade aan hoge gebouwen.

Hoewel het moeilijk is om in een tornado de snelheden te meten, was er wel behoefte aan een wiskundig model, waarin de zwaarte van een tornado gekoppeld is aan de windsnelheid. Voor de genoemde Fujita-schaal geldt de volgende formule …. Enzovoort.

Vraag 1
Op 3 november 2013 trof een windhoos Wijk bij Duurstede. Dakpannen vlogen van huizen, bomen werden ontworteld. Een miljoen euro schade. Weeronline.nl meldde dat het gezien de schade zeker een tornado moet zijn geweest en er snelheden van 150 km/u moeten zijn voorgekomen.
Hoe zwaar is die storm dan geweest op de schaal van Fujita?

Mo-3 Modelleren-3 **De relevantie van het model testen.**

Vraag 2
Volgens Weeronline.nl is de zwaarste windstoot ooit in ons land gemeten 172,8 km/u, en wel op 25 november 2005 in Hoek van Holland.
Is een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal ooit voorgekomen?

Analyse
Deze vragen 1 en 2 verschillen wat betreft toetsing van algebra niet van de gestelde vragen op het examen. Wel wordt de achtergrond van het model verklaard en in vraag 2 de relevantie van het model bevraagd. Meteen de aanloop naar de volgende vraag.

Mo-4 Modelleren-4 **Het model aanpassen.**

Vraag 3
Vooral in Europa, waar niet vaak heel zware tornado's voorkomen was er onvrede met de schaal van Fujita. Men wilde wat beter de lichtere tornado's onderling kunnen onderscheiden en aan hun intensiteit een waarde toekennen.
Bedenk een Z-schaal die uit een lineaire transformatie uit de F-schaal ontstaat, $Z = aF + b$, die aan de Europese wens tegemoet komt.

Leg uit waarom jouw schaal inderdaad aan die Europese wens voldoet.

Analyse
Vraag 3 toetst het begrip van een lineaire formule, met name het effect van een aanpassing van a en b op de waarden van het nieuwe model. Dat is echt iets anders dan alleen maar een lineaire formule opstellen. Dat is zeker ook de WDA Abstraheren-1 Redeneren met kenmerken van formules of functies.

Mo-5 Modelleren-5 Modellen vergelijken

In Groot-Brittannië is om de genoemde reden in 1972 de Torro-schaal ontwikkeld met als formule ….. enzovoort.
Vraag 4
Vergelijk in een tabel de F -schaal en de T -schaal met elkaar. Waarom kiest men in Europa voor de T -schaal?

Analyse
Vraag 4 gaat over het vergelijken van twee gegeven modellen en toetst tegelijk het maken van tabellen bij formules en het redeneren met die data. (Probleemoplossen-6 Getallenvoorbeelden doorrekenen en daaruit conclusies trekken.)

Mo-6 Modelleren-6 Formules van modellen manipuleren

Vraag 5
Er bestaat een formule die F in T uitdrukt. Leid die formule af.

Vraag 6
De oudste schaal voor windkracht is die van Beaufort (de B -schaal), in woorden beschreven in 1805 en in 1921 eveneens in een formule vastgelegd.
Het verband tussen de B -schaal en de T -schaal is vastgelegd door de formule $B = 2(T + 4)$.
Leid de formule af die de snelheid v in m/s uitdrukt in de B .

Analyse
Vragen 5 en 6 toetsen de WDA Fo-1 zonder informatie weg te geven die een simpele verkorting mogelijk maakt. (Zie de oorspronkelijke vraag 3, waarin is gegeven dat het een lineaire formule wordt. Dan gewoon twee punten nemen en die formule opstellen.)

4.6 Logisch redeneren

Logisch redeneren als een aspect van WDA heeft betrekking op het redeneren met wiskundige objecten, concepten, modellen enzovoort. Dat wordt vereist bij nagenoeg alle WDA. We kunnen daarnaast nog wel twee meer specifieke typen redeneringen onderscheiden.

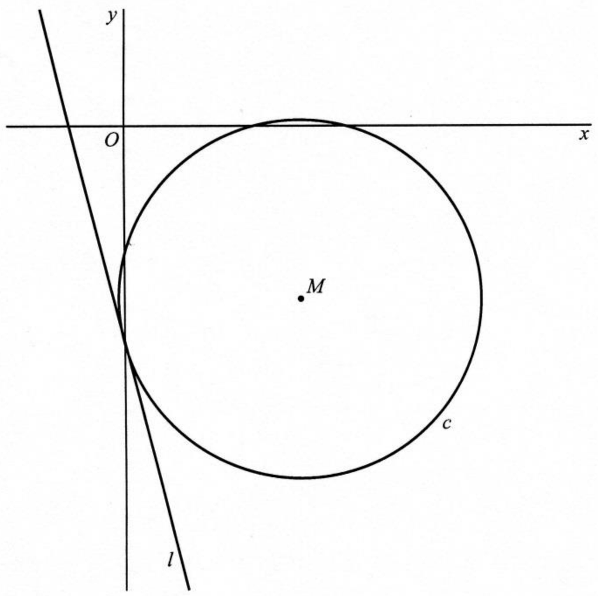
Mo-6 Modelleren-6 **Redeneren met meetkundige eigenschappen.**

Vanouds staat in de Euclidische meetkunde deze WDA centraal; de deductieve denkmethode is de fundamentele werkwijze geworden op een groot aantal wetenschapsgebieden. In de pilotexamens is een enkele opgave te vinden die met deze WDA kan worden aangepakt.

Voorbeeld 4.6.1 – Vraag 17 wiskunde B havo 2013

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 6y = -8\frac{2}{5}$ en middelpunt M en de lijn l met vergelijking $y = -4x - 3\frac{3}{4}$. Zie de figuur.

figuur



In de figuur lijkt het erop dat l de cirkel raakt. Als l inderdaad c raakt, dan is de afstand van M tot l gelijk aan de straal van c. Echter, de afstand van M tot l is kleiner dan de straal van c.

8p **17** Toon op algebraïsche wijze aan dat de afstand van M tot l kleiner is dan de straal van c.

Analyse

Het correctiemodel geeft alleen twee rekenpartijen, maar het is natuurlijk eleganter om logisch te redeneren in de meetkundige situatie zelf.

- *De afstand kleiner dan moet de lijn de cirkel snijden.*
- *De cirkel snijdt de y -as in de punten (0, -2,2) en (0, -3,8).*
- *Het snijpunt van de lijn met de y -as ligt daartussen, dus de lijn snijdt de cirkel! (Of is dat niet 'algebraïsch' genoeg?)*

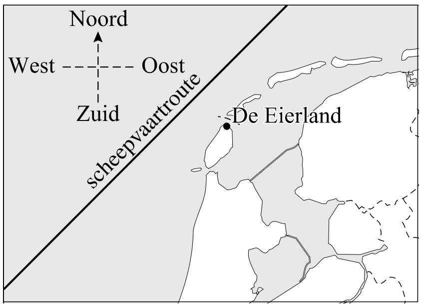
Al genoemd is *voorbeeld 4.4.4* opgave 16 wiskunde B havo, de functie f met vergelijking $y = 1 + \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$. Er is ook een meetkundige aanpak mogelijk door de randpunten van de halve cirkel te berekenen. Dat zijn eindpunten van een middellijn. Het middelpunt en de straal volgen dan vanzelf.

Een belangrijk aspect van deze WDA is wel dat leerlingen eerst een echte situatie moeten vertalen naar een 'kale' meetkundige situatie. Dat transformeren doet een beroep op het analyseren van de gegeven situatie *Po-1,* op het analyseren en transformeren van het doel *Po-2* en het logisch redeneren in de meetkundige situatie. Een mooi voorbeeld had de volgende examenvraag kunnen zijn.

Voorbeeld 4.6.2 – Vraag 19 wiskunde B havo 2014: De Eierland

De Eierland is een vuurtoren op de noordpunt van het Waddeneiland Texel. Zie figuur 1.

figuur 1



In deze figuur is ook een belangrijke scheepvaartroute door de Noordzee getekend, die in de buurt van Texel grofweg van zuidwest naar noordoost loopt. De route passeert De Eierland aan de noordkant op een afstand van ongeveer 28 kilometer.

Het licht van de vuurtoren De Eierland heeft bij helder weer een reikwijdte van ongeveer 54 kilometer.

Gegeven is dat een schip met een snelheid van 22 km/uur over de aangegeven scheepvaartroute vaart. De vraag is dan hoeveel tijd dit schip binnen het bereik (de reikwijdte) van De Eierland vaart.

Kijk, dit was nu een mooie afsluiting voor mijn havo B-leerlingen. En dan geven ze er een tekening bij en weg is het probleem en de WDA!

Analyse

Alles wat de leerlingen uit de context kunnen opmaken wordt in de examenopgave nog eens verteld. Maak een assenstelsel, de lijn van de scheepvaartroute snijdt de x-as onder een hoek van 45^0 *en de* y *-as in het punt (0, 28). Het bereik van de vuurtoren is een cirkelvormig gebied met het middelpunt O(0, 0) en straal 54. Zie de figuur.*
Kortom, de eenvoudige probleemsituatie wordt gereduceerd tot een rekensom, waarin het direct duidelijk is wat er moet gebeuren.

Lo-2 Logisch redeneren-2 Logisch redeneren met beweringen.

Conform het examenprogramma wiskunde C vwo is in de pilotexamens 2013 en 2014 een opgave te vinden over logisch redeneren. In 2013 zijn het de vragen 8 en 9: Wie is de dader? Zie hierna voor een vraag uit het examen 2014.

Voorbeeld 4.6.3 - Vraag 21 wiskunde C vwo 2014: Hoog opgeleid?

Sigmund trekt in het derde plaatje de volgende conclusie: De man is oud geworden en lang gezond gebleven, dus hij moet wel hoogopgeleid zijn, oftewel: $O \Rightarrow H$.

21 Onderzoek of de bewering $O \Rightarrow H$ in overeenstemming is met $H \Rightarrow O$ of met $\neg H \Rightarrow \neg O$. Geef een toelichting bij je antwoord.

Mijn C-leerlingen zijn heel positief over dit onderdeel van het programma. Gewoon je verstand gebruiken, zeggen ze dan. Zelf vind ik het ook relevant en dit soort vragen doen zeker een beroep op wiskundige denkactiviteiten.

Ik ben wel blij dat nu statistiek ook op het cse wiskunde A havo zal worden gevraagd, Maar dan vooral vragen waarin logisch moet worden geredeneerd met statistiek. Dus over al dan niet een causaal verband, verdelingen, conclusie die je wel of niet mag trekken enzovoort. Dat is in ieder geval maatschappelijk heel relevant.

4.7 Ordenen en structureren

Deze WDA heeft in de eerste plaats betrekking op het *ordenen en structureren* van grotere gehelen binnen de wiskunde en de toepassingsgebieden. Bijvoorbeeld de onderlinge verbanden en samenhang op het gebied van de functies, de meetkunde, het differentiëren enzovoort. Het benadrukken van die samenhang rond kernconcepten maakt het voor leerlingen mogelijk overzicht te behouden en nieuwe kennis daarin te op te nemen.

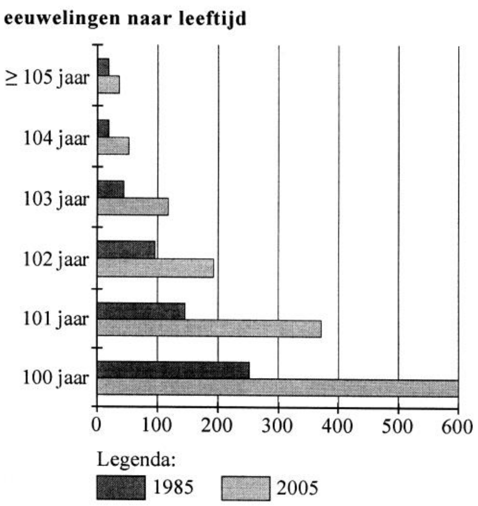
Een tweede, meer beperkte, interpretatie van deze WDA is het lokaal ordenen en structureren en dan wel met name in een voorgelegde beschrijving van een situatie. Dat kan een toegepaste probleemsituatie zijn of een wiskundige context. In de pilotexamens komt die activiteit ook vaak voor, vooral bij wiskunde A en C. Voorbeelden zijn de vragen 17 en 18 'Dialecten vergelijken' wiskunde A vwo 2013 en de 'onderzoeksvraag' 21 wiskunde A vwo 2013. Ook de aanpak van de eerder besproken vraag over het DNA-bewijs wiskunde C vwo 2013 (voorbeeld 4.2.13) zal moeten beginnen met het ordenen en structureren van de gegevens, voordat de vertaling naar een bekend telprobleem kan worden gemaakt. Nog een mooi voorbeeld.

Voorbeeld 4.7.1 – Vraag 16 wiskunde A havo 2013: Centenarians

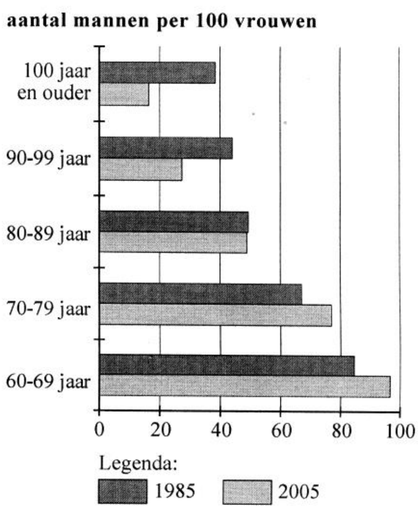
Ook in Nederland wordt het aantal personen van 100 jaar of ouder nauwkeurig bijgehouden. Deze personen worden ook wel **eeuwelingen** genoemd. Het Centraal Bureau voor de Statistiek heeft het aantal eeuwelingen in 2005 vergeleken met het aantal eeuwelingen in 1985. Gegevens daarover vind je in de figuren 2 en 3.

In figuur 2 kun je bijvoorbeeld aflezen dat er op 1 januari 1985 ongeveer 45 personen waren van 103 jaar oud. In figuur 3 kun je aflezen dat er op dat moment op elke 100 vrouwelijke eeuwelingen ongeveer 38 mannen waren.

figuur 2



figuur 3



16 Bereken met de gegevens van de figuren 2 en 3 hoeveel vrouwelijke eeuwelingen er op 1 januari 2005 in Nederland waren.

5. Onderwijs in wiskundige denkactiviteiten

In dit hoofdstuk zetten we nog eens op een rij wat de aanknopingspunten zijn voor wiskundeonderwijs waarin WDA worden ontwikkeld. En we geven aan welke werkwijzen contraproductief zijn voor het bereiken van goede leerresultaten. De citaten van de geïnterviewde docenten geven samen al een goed beeld van de optimale onderwijssituatie.

Doorlopende leerlijnen

+ In de wiskundesectie zijn voor het onderwijzen en toetsen in alle leerjaren stevige afspraken gemaakt over de balans tussen reproductie en productie.

- Het overleg over de leerjaren heen beperkt zich tot het doorgeven welke hoofdstukken het vorig leerjaar zijn 'behandeld'.

Parate kennis en vaardigheden onderwijzen

+ Voor alle leerjaren is vastgelegd welke kennis en vaardigheden in de loop van een leerjaar vlot, routinematig, moeten worden beheerst.

- Leerlingen noch docenten hebben een idee welke parate kennis en vaardigheden voor 100% zouden moeten worden beheerst.

Parate kennis en vaardigheden met begrip onderbouwen

+ Ook bij routineopgaven vraag ik altijd door naar de onderliggende betekenis.
En op de proefwerken vraag ik ook naar een uitleg.

- Ik ben al lang blij als ze op de eerstvolgende toets zich herinneren wat ze moeten doen.

Parate kennis en vaardigheden toetsen

+ De wiskundesectie heeft vastgelegd dat in elk leerjaar enkele malen een voortgangstoets over parate kennis en vaardigheden wordt afgenomen.

- Er zijn geen afspraken gemaakt over gemeenschappelijke jaartoetsen, begintoetsen (start leerjaar 1) of zoiets.

Parate kennis en vaardigheden onderhouden

+ De wiskundesectie heeft met de schoolleiding afgesproken dat leerlingen die de voortgangstoetsen niet voor 90% goed maken extra tijd moeten investeren.

- Tja, als leerlingen er met de pet naar gooien, kan ik daar niets aan doen.

Interactief doorvragen

+ Een deel van de les besteden we aan doorvragen, leerlingen laten uitleggen wat ze snappen, anders krijgen ze echt geen gevoel voor formules.

- Bij ons op school werken de leerlingen gewoon zelfstandig aan het maken van sommen uit het boek. Meer is niet nodig.

Interactief leren en onderwijzen

+ Als wiskundesectie hebben we de schoolleiding ervan overtuigd dat enige diepgang alleen te bereiken is in interactie met de klas.
- Onze leerlingen zitten meestal in een werkruimte met laptop/i-pad/smartphone te werken aan de sommen uit het boek.

Zelf opgaven maken of uitwerkingen nalezen

+ Wij hebben afgesproken dat leerlingen in de les niet de uitwerkingen mogen opzoeken, maar zelf moeten nadenken. “Dat kost zoveel tijd meneer!”
- Mijn lestaak is gewoon de vragen van leerlingen beantwoorden over de uitwerkingen, totdat ze die snappen.

Uitwerkingen?

+ Voor de helft van de opgaven zouden alleen antwoorden beschikbaar moeten zijn. Nu moeten we zelf opgaven zonder uitwerkingen maken.
- Handig dat voor alle opgaven uitwerkingen beschikbaar zijn, dan lopen de leerlingen tenminste nooit meer vast.

Mijn lesvoorbereiding

+ Na zoveel jaar weet ik heus wel hoe de sommen moeten. Voor elke les bedenk ik wat voor vragen ik ga stellen om de leerlingen aan het denken te zetten.
- Wat is er nog voor te bereiden? De leerlingen hebben een boek en ze kunnen mij wat vragen, dat is het dan.

Samenhang versterken

+ In ons PTA hebben we om de drie of vier lessen een klassikale les ingebouwd om aan de hand van kernopgaven te bespreken wat er is geleerd.
- In onze school wordt er bij wiskunde niet klassikaal les gegeven.

Abstraheren

+ Bij elk onderwerp stap ik in met een eenvoudige context waarin alle achterliggende betekenissen van het nieuwe begrip naar voren komen.
- Het boek begint met simpele voorbeeldsommen die ze kunnen imiteren en daar oefenen ze dan mee. En ik volg het boek.

Probleem oplossen

+ In alle leerjaren werken de leerlingen een aantal lessen in groepjes aan een groot probleem. Twee keer moeten ze dat thuis uitwerken en inleveren.
- Die praktische opdrachten en dergelijke kosten mij en de leerlingen teveel tijd.

Invulsommen

+ Bij al die sterk gestructureerde opgaven hoeven de leerlingen niet na te denken over wat ze aan het doen zijn. In de opbouw van een onderwerp moet dat juist wel.
- Het boek is steeds beter geworden. De leerlingen kunnen nu zonder vragen zelfstandig de sommen maken.

Vertrouwen

+ Alle leerlingen kunnen leren begrijpen wat ze aan het doen zijn in plaats van te proberen per type som trucs te onthouden. Dat zelfvertrouwen stimuleer je.
- Er zijn maar weinig leerlingen die een idee hebben van wat ze aan het doen zijn. Alleen voordoen, nadoen en veel oefenen helpt nog wat.

Probleemaanpak

+ In mijn lokaal hangen flappen met vragen die je jezelf kunt stellen als je vastzit bij de aanpak van een probleem. Die lopen we na bij een probleem.

- Tja, je ziet wat je moet doen of je ziet het niet. Dan vertel ik wel hoe het moet en hoop ik dat ze dat onthouden.

Huiswerk

? Het huiswerk is een drama. Als school en sectie moeten we toch wat bedenken, want zonder echte inspanning wordt het niks. Taken inleveren?

? In onze school hebben we besloten dat leerlingen die tegen het einde van een periode aantoonbaar niet hebben gewerkt op school het moeten afmaken.

? Net als bij andere vakken laat onze wiskundesectie leerlingen in tweetallen werken aan grote afsluitende opdrachten, die ze thuis moeten maken en inleveren.

? Meer voortgangstoetsen. Doen ze bij het hoger onderwijs ook.

We sluiten af met aanbevelingen van Alan Schoenfeld voor een les probleemoplossen (Drijvers et al., 2012).

Stimuleren van wiskundig denken aan de hand van een probleem

Acties van de docent	*Doel van de actie*
probleemstelling	
1. Een probleem presenteren	Waar gaat het over
2. Brainstormen over aanpak	
in groepjes aan het werk	
3. Rondlopen, vragen waar ze mee bezig zijn.	Sterke en zwakke punten?
4. Waar nodig hints geven.	Helpen blokkades overwinnen.
5. Doorvragen, generaliseren?	Uitdagen
6. Feedback. Vraag beantwoord?	Leren terug te kijken
nabespreking	
7. Oplossingswegen laten toelichten.	Aanpakmethoden benoemen.
8. Relaties leggen met andere problemen.	Analoge aanpak/concepten.

Register van voorbeelden

Referenties

cTWO. (2007). *Rijk aan betekenis*. Utrecht: Universiteit Utrecht.

cTWO. (2012). *Denken & doen; wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: Universiteit Utrecht.

Dormolen, J. van. (1975). *Vaardigheden: 1001 redenen waarom leerlingen geen goede routine hebben.* Utrecht, Pedagogisch Didactisch Instituut van de Leraarsopleiding.

Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwaneveld, B. (Eds.). (2012). *Handboek wiskundedidactiek*. Utrecht: Epsilon.

Expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen (2008). *Over de drempels met rekenen.* Enschede: SLO.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academy Press.

SLO heeft als nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling een publieke taakstelling in de driehoek beleid, praktijk en wetenschap. SLO heeft een onafhankelijke, niet-commerciële positie als landelijke kennisinstelling en is dienstbaar aan vele partijen in beleid en praktijk.

Het werk van SLO kenmerkt zich door een wisselwerking tussen diverse niveaus van leerplanontwikkeling (stelsel, school, klas, leerling). SLO streeft naar (zowel longitudinale als horizontale) inhoudelijke samenhang in het onderwijs en richt zich daarbij op de sectoren primair onderwijs, speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs en beroepsonderwijs. De activiteiten van SLO bestrijken in principe alle vakgebieden.

SLO

Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
E info@slo.nl

www.slo.nl

Foto omslag: Shutterstock

slo