

# Verschillende oplossingen variëren of vermijden

## Maak de keuze op basis van beoogde leerdoelen

In alle reken-wiskundemethodes wordt aandacht geschonken aan verschillende oplossingsstrategieën. Het vergelijken van verschillende aanpakken kan het inzicht vergroten, maar raken zwakkere leerlingen daarvan niet juist in de war? Is het voor hen niet beter je te beperken tot één vaste oplossingswijze? Zo eenvoudig is het niet. In dit artikel wordt bekeken welke rol beoogde leerprocessen en leerdoelen spelen bij het maken van de keuze om slechts één, of toch meer oplossingsstrategieën aan de orde te stellen.

### Inleiding

Rekenopgaven kunnen vaak op meerdere manieren worden opgelost. Dat is handig, want als de ene manier niet lukt, doe je het gewoon op een andere manier. Soms is de ene oplossingswijze ook makkelijker of sneller dan de andere.

In reken-wiskundemethodes wordt aandacht besteed aan verschillende oplossingsstrategieën, zodat kinderen hun eigen werkwijze kunnen vergelijken met andere manieren. De gedachte hierachter is dat kinderen zo doelmatiger leren werken en tot groter inzicht komen.

Aan de andere kant hoor je wel dat sommige kinderen juist in de war raken van die verschillende oplossingsstrategieën. Zwakkere rekenaars zien al gauw door de bomen het bos niet meer. Daarom wordt er wel voor gepleit om zwakkere rekenaars maar één bepaalde, vaste oplossingsstrategie aan te leren. Dat biedt hen houvast en zekerheid.

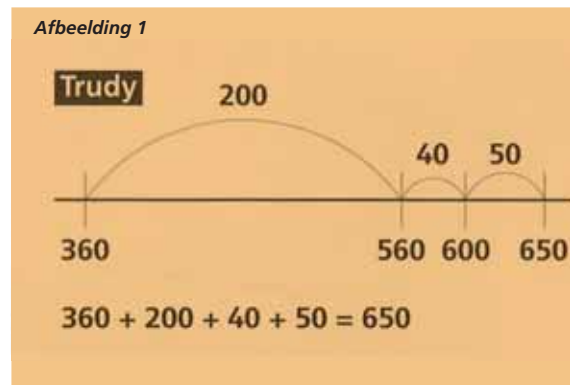
Het is echter maar de vraag of je zwakke rekenaars zo niet tekort doet. Soms zijn verschillende oplossingswijzen zo belangrijk voor het verdere leerproces, dat ze niet bij voorbaat voor bepaalde groepen kinderen kunnen worden weggelaten. Zo zijn bijvoorbeeld bij hoofdrekenend optellen en aftrekken de standaardstrategieën rijgen en splitsen beide van belang in het perspectief van het voortgezette rekenen. Rijgen is een belangrijke hoofdrekenstrategie en splitsen bereidt voor op het latere cijferend rekenen. Bij de afweging om het aantal oplossingsstrategieën voor kinderen al dan niet te beperken moet daarom altijd worden gekeken naar leerdoelen op de lange termijn.

In dit artikel worden bij wijze van voorbeeld zes opgaven uit verschillende reken-wiskundemethodes onder de loep genomen. Elke opgave kan op verschillende manieren worden opgelost en dit is in de vormgeving ook in beeld gebracht. Wanneer kies je ervoor om aandacht te besteden aan verschillende oplossingsstrategieën? Bij ieder voorbeeld spelen andere overwegingen.

### Standaardstrategieën en handig rekenen

In afbeelding 1 zie je hoe de optelopgave  $360 + 290$  door twee fictieve leerlingen, Trudy en Myra, wordt opgelost. Trudy lost de opgave rijgend op. Hiervoor splitst ze 290 op in 200, 40 en 50. Myra rekt handig, waarbij ze gebruik maakt van het feit dat 290 vlak bij 300 ligt.

De kinderen maken gebruik van verschillende getalstructuren. Trudy maakt gebruik van de interne opbouw van 290: '290 = 200 + 90' en '90 = 40 + 50'. Myra maakt gebruik van



Talrijk, groep 6.

de externe structuur van 290: '290 ligt vlak bij 300'. Doordat Myra dit laatste rekenfeitje tot haar beschikking heeft, kan ze de opgave op haar manier oplossen. Handig rekenen kan alleen als je over genoeg van zulke rekenfeitjes beschikt. Rijgen is een standaardstrategie bij optellen en aftrekken. Rijgen kan immers altijd, met alle getallen, en moet daarom door alle leerlingen worden geleerd.

Moeten zwakkere rekenaars zich beperken tot standaardstrategieën, omdat die altijd kunnen? Of moeten juist zoveel mogelijk kinderen handig rekenen leren, omdat het snel en efficiënt is? Handig rekenen is voor sommige kinderen lastiger. Je moet maar net weten dat 290 vlak bij 300 ligt, en je moet snappen dat als je er 300 bij doet, dat die 10 er vervolgens weer af moet.

Aan de andere kant; doordat je bij handig rekenen minder stappen hoeft te zetten, kan de kans op fouten in de uitvoering van de bewerking juist verminderen. Veel opgaven kunnen uiteindelijk sneller en efficiënter worden opgelost door handig te rekenen. Dat voordeel gun je zoveel mogelijk kinderen. 'Handig' is een relatief begrip; wat handig is voor de ene leerling, hoeft dat niet voor de andere te zijn. Het hangt er onder andere van af hoeveel rekenfeitjes een leerling paraat heeft. Om in te zetten op handig rekenen voor zoveel mogelijk leerlingen, moet je daarom eerst investeren in het uitbreiden

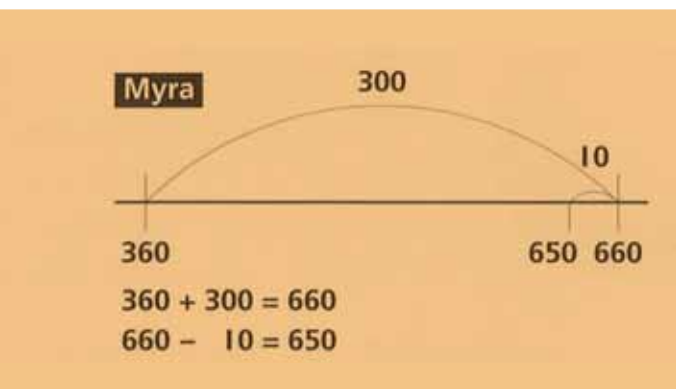
# Oplossingsstrategieën en?

## en en leerprocessen

van de beschikbare getalkennis. Dat kan door veel te oefenen met ordenen en vergelijken van getallen en positioneren van getallen op de getallenlijn. Allerlei speelse oefeningen, zoals je die bijvoorbeeld vindt op het Rekenweb<sup>1</sup>, komen daarbij goed van pas.

### Verkorten van aanpakken

Vaak beschikken kinderen over eigen ideeën en aanpakken. Dat zie je al in de onderbouw, waar kinderen optel- en aftrek-



*Wat handig is voor de een, hoeft dat niet voor de ander te zijn.*




opgaven in eerste instantie tellend oplossen. Vaak bestaan de eigen aanpakken uit veel stapjes en dat is op de lange termijn omslachtig. Het kost veel tijd en de kans op fouten is relatief groot. Zulke aanpakken moeten dan worden verkort.

In afbeelding 2 laten drie kinderen hun oplossingsmanieren zien bij de opgave  $5 \times 48$ . De jongen in het midden, Pascal,

laat een lange aanpak zien: herhaald optellen. Deze aanpak leidt tot het goede antwoord, maar moet op termijn wel worden verkort tot een vermenigvuldiging. Bijvoorbeeld zoals Merel laat zien. Zij gebruikt de tafelnis  $5 \times 4 = 20$  en  $5 \times 8 = 40$  en de kennis dat  $5 \times 40$ , afgeleid van  $5 \times 4 = 20$ , 200 is.

Afbeelding 2

In het magazijn staan 5 dozen met in elke doos 48 lijmpotjes. Samen zijn dat ... lijmpotjes. Zo rekenen deze kinderen dat uit:

		<b>Pascal:</b>	
<b>Merel:</b>			
$5 \times 40 = 200$		4	
$5 \times 8 = 40$		48	
$5 \times 48 = 240$		48	
		48	
		48	
		$\frac{48}{240} +$	
			<b>Serina:</b>
			$5 \times 48 = 200 + 40 = 240$

Wis en Reken, groep 6.

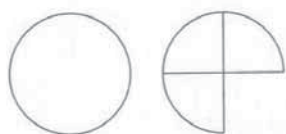
Serina ten slotte, rekt wiskundig gezien op dezelfde manier als Merel, maar de notatie is verder verkort; de deelstappen ( $5 \times 40$  en  $5 \times 8$ ) worden niet meer apart opgeschreven.

Het steeds verder verkorten van aanpakken (en de notatie) is een belangrijk leerdoel. Verschillende strategieën worden in eerste instantie met veel stapjes uitgevoerd. Denk bijvoorbeeld aan de rijgstrategie of aan staartdelen waarbij kinderen snel moeten leren grote happen te nemen in plaats van een heleboel kleine hapjes.

De meeste kinderen komen niet uit zichzelf tot verkorting, maar moeten hierbij worden ondersteund. Dit kan door aanpakken te vergelijken die in steeds verdere mate verkort zijn. Dat vraagt veel vakmanschap van de leerkracht. Deze zorgt ervoor dat in de bespreking oplossingswijzen in de juiste volgorde aan bod komen; aanpakken met veel tussenstappen eerst, gevolgd door steeds kortere manieren. Het verband tussen de langere en verkorte manieren moet duidelijk worden verwoord, evenals de voordelen van de verkorte manier – zoals snelheid, minder werk en minder kans op rekenfouten. Een ander aandachtspunt is dat aanpakken met veel tussenstappen op den duur steeds minder in de bespreking worden betrokken, en verkorte manieren steeds meer. Dit proces moet niet te snel gaan, want dan kunnen kinderen afhaken. Maar het mag zeker ook niet te lang duren, anders heb je kans dat kinderen vasthouden aan lange manieren en niet tot verkorting komen.

Afbeelding 3

## Vermenigvuldigen met pizza's.



$$2 \times 1\frac{3}{4} \text{ pizza} =$$

$$4 \times 1\frac{3}{4} \text{ pizza} =$$

$$5 \times 1\frac{3}{4} \text{ pizza} =$$

$$8 \times 1\frac{3}{4} \text{ pizza} =$$

De Wereld in Getallen, groep 7.

### Abstraheren

Bij rekenen-wiskunde wordt gebruik gemaakt van allerlei contexten, materialen en modellen. Dit maakt het rekenen concreet en ondersteunt het begrip. Zo zijn in de opgave uit afbeelding 3 verschillende abstractieniveaus te herkennen: er wordt verwezen naar concrete pizza's en daarop aansluitend is het cirkelmodel weergegeven. Dit helpt veel kinderen bij het oplossen van de formele vermenigvuldigopgaven met breuken. Ze kunnen daarbij denken aan pizza's – twee maal een hele pizza en twee maal driekwart pizza – of zelf breukencirkels tekenen.

Net als bij het verkorten van aanpakken, is het abstraheren en formaliseren een ontwikkeling die alle kinderen bij rekenen-wiskunde (moeten) doormaken. Vaak worden concrete situaties (contexten) gebruikt als uitgangspunt om aan te sluiten op het denken van kinderen en betekenis te geven aan getallen en bewerkingen. Geleidelijk wordt via het gebruik van schema's en modellen toegewerkt naar formeel redeneren en rekenen.

Dit speelt in de gehele basisschoolperiode: in de onderbouw bijvoorbeeld bij het tellen van groepjes als voorbereiding op de formele tafels van vermenigvuldiging. Maar ook in de bovenbouw bij nieuwe domeinen als breuken. Bij het zetten van een nieuwe leerstap, zoals het vermenigvuldigen van breuken in afbeelding 3, wordt binnen een les, of zelfs bij het oplossen van een enkele opgave, soepel geschakeld tussen verschillende abstractieniveaus. Aan de ene kant is abstraheren bij rekenen-wiskunde dus een geleidelijk proces, dat zich gedurende de hele basisschool afspeelt. Maar tegelijk is het vaak zo dat bij het oplossen van formele opgaven het terugdenken aan een meer concreet niveau veel kinderen ondersteuning biedt. Dit betekent dat bij het oplossen van opgaven verschillen kunnen optreden in abstractieniveau van de gebruikte oplossingsstrategieën.

In de loop van de basisschool wordt steeds gewerkt aan formalisering van aanpakken. Dat betekent dat, net als bij het verkorten, het vergelijken van aanpakken die verschillen qua abstractieniveau, kinderen kan helpen om te komen tot voor hen nieuwe aanpakken op een hoger niveau van abstractie. Ook hier let de leerkracht op de volgorde waarin aanpakken in de bespreking aan bod komen en schenkt hierbij aandacht aan de onderlinge relatie tussen concrete, modelondersteunde en formele aanpakken.

### Aansluiten op de eigen voorkeur

Het komt voor dat verschillende aanpakken geen sterke onderlinge relatie hebben. Soms is het niet zo duidelijk of de ene manier nu efficiënter, korter of sneller is dan de andere,

maar hangt het meer af van de eigen voorkeur van de rekenaar zelf. Bijvoorbeeld bij de opgave uit afbeelding 4.

Een deling van twee kommagetallen wordt hier op twee verschillende manieren opgelost. Rens doet het door te denken aan geld. Dat vermindert de complexiteit van de deling doordat je zo deels kunt denken in hele getallen (in eurocenten). Nina denkt ook in hele getallen, maar dan door beide getallen 100 keer zo groot te maken. Als de onderlinge verhouding van deeltal en deler gelijk is aan de oorspronkelijke deling, blijft de uitkomst immers ook gelijk. De manier van Nina is formeler dan die van Rens, maar voor opgaven met deze en soortgelijke getallen voldoen beide manieren even goed. Ook als de getallen wat complexer worden (met drie cijfers achter de komma bijvoorbeeld) kunnen beide manieren nog: op de manier van Nina door de getallen 1000 keer zo groot te maken en op de manier van Rens door te denken aan andere maten (millimeters en meters bijvoorbeeld).

Afbeelding 4

$$3,6 : 0,04 =$$



Pluspunt, groep 8.

Het vergelijken van zulke verschillende, min of meer gelijkwaardige, oplossingsstrategieën kan ertoe bijdragen dat kinderen hun eigen voorkeur volgen. Ook kunnen kinderen zo op het spoor worden gezet van andere aanpakken dan de eigen. Dat laatste zal voor sommige kinderen bijdragen aan een groter inzicht, maar kan andere kinderen in verwarring brengen. Bij het uitwisselen van dergelijke, elk adequate oplossingswijzen, kan je je dus afvragen voor welke leerlingen dit leerwinst oplevert (in de vorm van groter inzicht) en voor welke leerlingen dit belemmerend kan werken (omdat ze erdoor in de war kunnen raken).

In dat laatste geval kan de leerkracht ervoor kiezen één bepaalde strategie aan te bieden of te benadrukken. Dat is echter geen eenvoudige keuze; daarbij speelt mee welke oplossingswijze het best aansluit op het denken van de betreffende leerling én het meeste perspectief biedt op lange termijn. Deze overweging kan dus voor verschillende leerlingen telkens anders uitpakken.

### Flexibel strategiegebruik

In de opgave in afbeelding 5 staan vier verschillende manieren van aftrekken bij elkaar. Bij elke manier staat een voor-





JASPER OOSTLANDER

**Verskillende oplossingsmanieren; groter inzicht of meer ver-warring?**

beeldopgave, met steeds andere getallen. Het is de bedoeling dat leerlingen vervolgens bij rijtjes opgaven steeds een van de manieren kiezen. Bij sommige van die sommen is duidelijk een van de manieren 'handiger'. Bijvoorbeeld  $91 - 88$ , waarbij de manier 'langs een rond getal' voor de hand ligt. Bij andere sommen, zoals  $64 - 38$ , is dat minder duidelijk.

### Welke manier kies je?

Afbeelding 5

met een rond getal

..... - 30  
 $75 - 29 = \text{.....}$

splitsen

58 - 34  
 $58 - 34 = \text{.....}$

langs een rond getal

66 70 72  
 $72 - 66 = \text{.....}$

met de getallenlijn

93  
 $93 - 55 = \text{.....}$

Ik kan  $72 - 59$  op drie manieren maken.  
 Jij ook?



Rekenrijk, groep 5.

Flexibel rekenen houdt zo gezien meer in dan 'handig' kunnen rekenen zoals we dat aan het begin van dit artikel tegen kwamen. Het houdt in dat kinderen verschillende oplossingsmanieren – zowel standaardstrategieën als 'handige' manieren – afhankelijk van de getallen in de opgaven flexibel kunnen hanteren en afwisselen. Welke manier bij welke opgave of getallen meer voor de hand ligt, kan in een klassikale bespreking onderzocht worden. De bewering van de afgebeelde leerling – 'Ik kan  $72 - 59$  op drie manieren maken' – kunnen kinderen met elkaar bespreken en controleren. Anders dan bij het verkorten en abstraheren, is het hantieren van meerdere manieren hier geen middel om verder te komen in het leerproces, maar een doel op zich. Deze manier

van omgaan met verschillende oplossingsstrategieën stelt hoge eisen aan vaardigheid en inzicht van leerlingen. De verschillende strategieën moeten elk worden inge oefend en beheerst. Alleen als de verschillende manieren worden beheerst kan immers de afweging worden gemaakt welke manier bij welke opgaven het meest voor de hand ligt. Voor goede rekenaars biedt deze wijze van hanteren van meerdere oplossingswijzen een interessante uitdaging. Voor rekenaars waarvoor dit (te) hoog gegrepen lijkt te zijn, kan de vraag welke manier je kiest echter alleen worden beantwoord

aan de hand van de eigen voorkeur. Daarbij spelen dan dezelfde overwegingen als in de vorige paragraaf. Verder spelen de overwegingen uit de eerste paragraaf over standaardstrategieën en handig rekenen een rol; zet je voor zwakkere rekenaars alleen in op standaardoplossingwijzen, of investeer je ook in vormen van handig rekenen, juist ook voor de zwakkere rekenaars?

### Hoofdrekenen, cijferen of met de reken-machine

In het dagelijks leven wordt geregeld allerlei rekenwerk uitgevoerd. Denk alleen maar aan alles wat te maken heeft met het beheer van je geldzaken. Bij dergelijk alledaags rekenwerk heb je globaal de keuze tussen hoofdrekenen, cijferen en rekenen met de rekenmachine. Welke vorm je kiest hangt onder andere af van wat je precies wilt weten. Soms moet iets precies worden uitgerekend, en soms biedt een globale schatting genoeg informatie. Voor ingewikkelde bewerkingen met veel rekenwerk kan het rekenmachientje worden gebruikt, maar het komt ook voor dat je een niet al te complexe berekening even snel op een papiertje uitrekent. Alle drie de vaardigheden; (schattend) hoofdrekenen, cijferen en het kunnen hanteren van de rekenmachine, komen dan ook aan bod in de reken-wiskundemethodes. Vanuit het oogpunt van maatschappelijke redzaamheid moeten kinderen zoveel mogelijk alle drie deze vaardigheden leren beheersen. Daar valt niet zoveel aan te kiezen.

Afbeelding 6

Rekenmanieren.



Alles Telt, groep 7.

De keuze om zelf te rekenen of het rekenwerk over te laten aan de rekenmachine, hangt, net als bij flexibel strategiegebruik, af van de getallen of bedragen waar het om gaat, de berekeningen die moeten worden uitgevoerd en de eigen

vaardigheid daarin. In de methodes leren kinderen hoe ze deze keuze kunnen maken. Bijvoorbeeld op de manier van afbeelding 6. De eigen vaardigheid is hier doorslaggevend. Dat is anders bij het rijtje hieronder voor groep 8, waarbij één opgave hoofdrekend, één cijferend en één met de rekenmachine moet worden gemaakt:

$$36,54 : 1,8 =$$

$$693,6 : 3,4 =$$

$$1125,6 : 2,8 =$$

Hierbij moeten alle drie manieren zodanig worden beheerst, dat je ziet welke manier bij welke getallen het meest voor de hand ligt. Of dit voor alle leerlingen haalbaar is, is een soortgelijke overweging als bij flexibel strategiegebruik en is mede afhankelijk van de beschikbare rekenfeitjes.

In elk geval komt bij de bespreking van zulke opgaven aan de orde wanneer welke rekenvorm meer voor de hand ligt en waar dat van afhangt. Het is voor alle leerlingen van belang dat ze verantwoord leren kiezen tussen hoofdrekenen, cijferend rekenen en de rekenmachine.

### Tot slot

Kinderen nemen op verschillend niveau en op verschillende manieren deel aan de reken-wiskundelessen. De bedoeling is dat alle leerlingen zo vaardig mogelijk worden. Als het aandacht besteden aan verschillende oplossingsstrategieën daaraan bijdraagt, moet dat vooral gebeuren, maar als dat het leerproces belemmert, kan het beter achterwege blijven.

Aan de verschillende voorbeeldopgaven uit dit artikel is te zien dat deze overweging niet altijd hetzelfde uitpakt. Soms is het leren van verschillende aanpakken een doel op zich, zoals bij flexibel strategiegebruik of de keuze voor hoofdrekenen, cijferen of de rekenmachine. Daarbij kan de afweging worden gemaakt in hoeverre zo'n doel voor alle leerlingen geldt. Deze afweging kan verschillend uitpakken bij uiteenlopende

leerdoelen. Zo is het leren van 'handig rekenen' naast de standaardstrategieën met het oog op de lange termijn voor zoveel mogelijk kinderen zinvol. Hier kan de afweging anders uitvallen dan bijvoorbeeld bij het leren van flexibel strategiegebruik.

Soms ook is het aan de orde stellen van verschillende oplossingen geen doel, maar een middel dat bijdraagt aan het leerproces. Dat is het geval bij het verkorten en abstraheren van aanpakken. Daarbij kan het vergelijken van verschillende oplossingsmanieren juist ook voor minder vaardige leerlingen bijdragen aan het beoogde leerproces.

Het is dus geenszins een automatisme dat aan zwakkere leerlingen slechts één oplossingsstrategie moet worden aangeboden. Afhankelijk van de beoogde leerprocessen en leerdoelen kan de overweging om al dan niet aandacht te besteden aan meerdere oplossingen en aanpakken steeds verschillend uitpakken.

*De auteur is hogeschooldocent rekenen-wiskunde en didactiek aan Hogeschool Edith Stein en projectleider Panama ([www.fi.uu.nl/panama](http://www.fi.uu.nl/panama)).*

### Noot:

1. [www.rekenweb.nl](http://www.rekenweb.nl)



*Kiezen voor één of meer oplossingsmanieren vraagt om een zorgvuldige afweging.*

JASPER OOSTLANDER

## In memoriam

### Herman Heidenrijk 1934 – 2008

Op 3 november 2008 is Herman Heidenrijk overleden. Herman was de eerste voorzitter van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs. Tot eind jaren zestig was hij wiskundeleraar op de Antillen. In die tijd keerde hij terug naar Nederland waar hij docent wiskunde en didactiek en adjunct-directeur werd aan de Rijks-PA te Maastricht. Hij was al in 1969 aanwezig bij de eerste rekenconferentie te Egmond, waaruit later de Wiskobasbeweging is voortgekomen. Vanaf toen was Herman steeds actief aanwezig op de Wiskobasconferenties en later op de Panamaconferenties in Noordwijkerhout. Toen op 3 juni 1982 de NVORWO opgericht werd was het zonneklaar dat onder de 15 aanwezigen Herman degene was die het voorzitterschap op zich moest nemen. Niet alleen straalde hij een natuurlijk gezag uit, hij had ook vele contacten in alle echelons van het onderwijsveld en de politiek. Samen met Willem Faes, die ons al in 2000 is overleden, en ondergetekende gaf hij tot 1990 op voortreffelijke wijze leiding aan de NVORWO. Daarna trok hij zich terug, waardoor hij zich meer aan zijn gezin kon wijden. Toch bleef hij in het Limburgse actief, met name als bestuursvoorzitter van de Tylytschool 'De Maasgouw' te Maastricht, voor welk werk hij in 2006 een Koninklijke onderscheiding ontving. In 2001 werd hij getroffen door kanker, die aanvankelijk te genezen leek, maar uiteindelijk toch de fatale afloop heeft veroorzaakt. Hermans vrouw, de kunstenares Vera Kardaun, heeft indertijd nog het logo van de NVORWO ontworpen. Gaarne wens ik haar en alle kinderen veel sterkte toe. We hebben in hem een heer van stand, een voortreffelijk bestuurder en een goede vriend verloren.

*Ed de Moor*



*Herman Heidenrijk*