

Aan de slag met rijke rekenvragen

Tekst: Pieter Gerrits, Anneke Noteboom en Gerdineke van Silfhout.
Amersfoort, 2020

Inleiding

In deze praktische publicatie laten we zien wat rijke rekenvragen kunnen betekenen in het kader van formatief evalueren. Vervolgens werken we aan de hand van concrete voorbeelden uit wat rijke rekenvragen zijn en aan welke criteria ze moeten voldoen. Ten slotte presenteren we een stappenplan waarmee je zelf rijke rekenvragen kunt ontwerpen.

Het belang van vragen

Er is veel geschreven over het stellen van vragen in het onderwijs. Niet vreemd. Gedurende een schooldag blijkt dat zestig procent van wat leraren zeggen, in de vorm van een vraag gegoten is (Sullivan en Lilburn, 2005). Vragen stellen is een goed middel voor de leraar om leerlingen aan te zetten tot nadenken en leren. Ook kan hij door middel van vragen inzicht krijgen in wat leerlingen al weten en kunnen.

Leraren kunnen verschillende soorten vragen stellen (Voerman, 2018):

- (gesloten) vragen die met ja of nee beantwoord kunnen worden, vragen naar feiten, en vragen over de gehanteerde regels in de klas;
- vragen die gaan over redeneringen ten aanzien van inhoud en strategie;
- vragen die betrekking hebben op zelfregulatie en persoonlijke kwaliteiten.

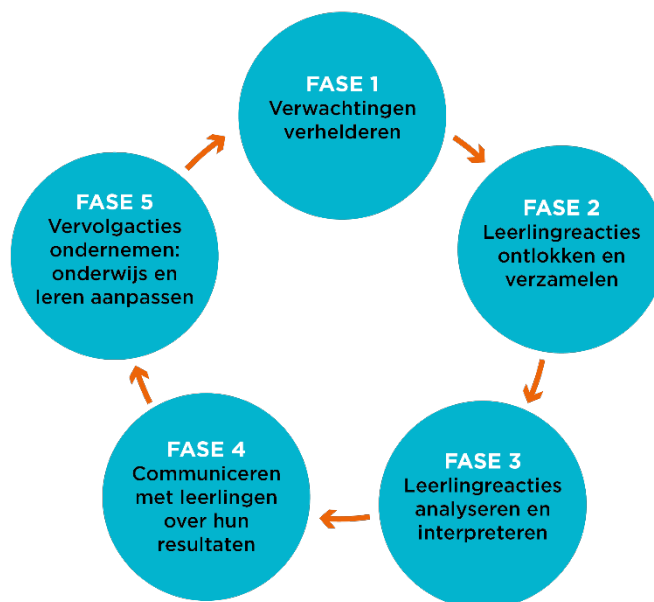
Dains (1986) constateerde in een ander onderzoek dat 93 procent van de vragen die leraren stellen lagere orde vragen zijn: vragen die zich richten op het reproduceren van feiten en procedures. Denk hierbij aan vragen die beginnen met "wie weet.." of "wie kan..". Daarnaast zijn er hogere orde vragen, vragen die bedoeld zijn het denken uit te lokken, problemen op te lossen, kritisch te denken en te redeneren. Deze vragen helpen leerlingen hun inzichten te verdiepen zodat ze hun kennis en vaardigheden beter in kunnen zetten in voor hen nieuwe situaties. Met rijke rekenvragen hebben we het over deze hogere orde vragen

Het belang van vragen bij formatief evalueren

Vaak gaat het de leraar bij het stellen van vragen niet zozeer om het goede antwoord maar meer om de redenering die de leerling gebruikt om tot dat antwoord te komen. Die redenering is niet altijd zichtbaar voor de leraar. Door de leerling reacties te ontlokken en die te verzamelen, te analyseren en te interpreteren wordt de redenering die de leerling heeft gevolgd vaak duidelijk. Dit gebeurt met name in de fase 2 en 3 van de cyclus formatief evalueren (zie kader). De leraar daagt leerlingen uit om hun redenering en reactie te geven door de juiste vragen te stellen. Hierdoor is hij ook beter in staat om deze reactie te interpreteren en met de leerling passende vervolgacties te ondernemen.

De cyclus van formatief evalueren in een notendop

Formatief evalueren heeft betrekking op alle activiteiten die leerlingen én leraar uitvoeren om de leervorderingen van leerlingen in kaart te brengen, te analyseren en interpreteren en te gebruiken om betere beslissingen te maken over vervolgstappen. Formatief evalueren is een cyclisch proces, waarbij de verschillende fasen steeds terugkeren binnen een les en/of lessenreeks, zoals Gulikers en Baartman (2017) laten zien in hun model van vijf fasen.



Figuur 1: De cyclus van formatief evalueren (Gulikers & Baartman, 2017).

Het belang en de kenmerken van rijke rekenvragen

Rijke rekenvragen passen uitstekend in het repertoire van formatieve activiteiten die de leraar onderneemt om zicht op het leer- en ontwikkelproces van leerlingen te krijgen. Rijke rekenvragen zijn hogere orde vragen die wiskundig denken uitlokken. Het betreft dus niet alleen vragen over feiten en procedures, maar ook vragen die gericht zijn op onder andere wiskundig probleemoplossen, kritisch denken en redeneren.

Rijke rekenvragen voldoen aan vier hoofdkenmerken¹:

- *De reacties van leerlingen op rijke rekenvragen geven informatie over hun leren.*
Leerlingen kunnen op verschillend niveau met een rijke rekenvraag aan de slag gaan. Ze kunnen zich beperken tot één mogelijk antwoord, ze kunnen er meer zoeken of ze kunnen proberen alle mogelijke antwoorden te zoeken of een regel te ontdekken. Ook in de redeneringen die ze geven kunnen er verschillen zijn: het kan gaan om meer informele of meer formele redeneringen. Rijke rekenvragen zijn behulpzaam bij formatief evalueren.
- *Rijke rekenvragen doen een beroep op wiskundig denken.*
Rijke rekenvragen doen niet alleen een beroep op het inzetten van kennis en procedurele vaardigheden, maar ook op onder andere inzicht, probleemoplossen, analyseren, creatief denken, kritisch denken en redeneren, uitleggen en communiceren. Een leerling kan dus verwoorden wat hij denkt bij het oplossen van een rekenprobleem en kan ook de argumenten van andere leerlingen weerleggen.
- *Rijke rekenvragen hebben (meestal) meer acceptabele antwoorden.*
Een vraag als 'Is dit figuur een vierkant?' is een gesloten kennisvraag. Er is maar één antwoord goed. De vraag 'Hoe kun je iemand uitleggen wat een vierkant is?' gaat nog steeds over de kennis van een vierkant, maar kinderen moeten dieper nadenken over de kenmerken van een vierkant, deze kennis actief toepassen en erover redeneren en het uitleggen. Rijke rekenvragen zijn meestal juist open vragen met méér antwoorden of waarbij verschillende redeneringen gevolgd kunnen worden.
- *Rijke rekenvragen zijn gericht op het leren tijdens het oplossingsproces.*
Ze zijn gericht op oplossen, puzzelen, zoeken, rekenen, redeneren, uitleggen, enzovoort ook gedurende dit proces nieuwe inzichten en vaardigheden leren. Ineens ontdekken ze een regel; ze zien structuren en relaties terwijl ze bezig zijn. Ze zien dat anderen andere oplossingen hebben. Ze denken na over wat wel en niet kan.

¹ Bewerking van de definitie van Sullivan & Lilburn (2005)

Voorbeelden van rijke rekenvragen

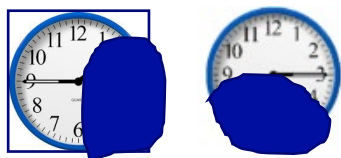
Voorbeeld 1. Klokkijken

Stel dat het leerdoel is: 'Ik kan klokkijken op een wijzerklok en tijden met kwart voor en kwart over aflezen'.

Een standaardvraag is: Hoe laat is het? Antwoorden: kwart voor 2; kwart over 8



De rijke rekenvragen kunnen zijn: Op de klok zie je alleen de grote wijzer.



- Hoe laat zou het kunnen zijn op deze klokken?

Passende vervolgvragen kunnen zijn:

- Welke tijden kunnen wel en niet op de eerste/tweede klok en waarom is dat zo?
- Hoe kun je aan de kleine wijzer zien of het kwart voor of kwart over is?

Klokkijken is lastig voor veel kinderen en dat is niet zo vreemd. Er zijn twee wijzers en de getallen waar ze naar wijzen, staan niet direct in verband met de kloktijd. Bovendien gebruiken we allemaal afwijkende tijdsaanduidingen. Met de alternatieve vragen in bovenstaand voorbeeld focus je op de essentie van de functie van de wijzers. Leerlingen worden uitgedaagd tot nadenken, redeneren en uitleggen, én creatief denken.

Voorbeeld 2. Zwaar, zwaarder, zwaarst

Een standaardvraag aan kleuters is: wat is zwaarder: de komkommer of het doosje tomaatjes? Zoek eens uit of je gelijk hebt.

Een rijke rekenvraag kan zijn: zoek dingen in het klaslokaal die zwaarder zijn dan dit boek. Kun je ook dingen vinden die ongeveer even zwaar zijn? Hoe kunnen we uitzoeken of het zwaarder / even zwaar is? Is iets dat groter is, ook altijd zwaarder? Hoe weet je dat zeker?

Voorbeeld 3. Vermenigvuldigen

Een standaardopgave is '6 x 8 = '.

Een rijke rekenvraag is: Ik weet dat de uitkomst van een vermenigvuldiging 48 is. Wat kan de opgave zijn? Meerdere antwoorden zijn mogelijk, variërend van 8 x 6 tot 4 x 2 x 2 x 3 of zelfs $\frac{1}{2} \times 84$.

Voorbeeld 4. Gemiddelde berekenen

Een standaardvraag is: De kinderen van de familie Westerveld zijn 7, 8 en 12 jaar oud. Wat is hun gemiddelde leeftijd?

Een rijke rekenvraag is: De gemiddelde leeftijd van de drie kinderen van de familie Westerveld is 9. Hoe oud kunnen de drie kinderen zijn? Leg uit of ze alle drie een even/oneven leeftijd kunnen hebben.

Hoe ontwerp je rijke rekenvragen?

We beschrijven een praktisch stappenplan over hoe je rijke rekenvragen kunt ontwerpen. Het stappenplan is te gebruiken in verschillende contexten: je gebruikt een les uit de methode waarbij je de les ombouwt en/of aanvult met rijkere rekenvragen. Of je werkt vanuit een leerlijn en ontwikkelt zelf een les met rijke rekenvragen.

Het stappenplan

Het stappenplan bestaat uit vier stappen:

1. Bekijk het leerdoel (of de leerdoelen) en bijbehorende succescriteria. Kijk naar wat een leerling gaat leren en raadpleeg hierbij de leerlijnen of leerdoelen uit de lesmethode. Bepaal of het gaat om het aanleren van een procedure, of juist om het toepassen of begrijpen ervan. Welke redenering of welk gedrag laat de leerling dan zien?
2. Denk aan een standaard (meestal gesloten) vraag. Kijk naar eventuele vragen die in een handleiding staan of bedenk welke vragen jij tijdens deze les spontaan zou stellen.
3. Gebruik deze standaardvraag om er een rijke vraag van te maken. Bekijk of de rekenvraag voldoet aan de hierboven beschreven kenmerken van rijke rekenvragen.
4. Formuleer vervolgvragen die inzicht, kennis, vaardigheden en het denken en redeneren kunnen vergroten en verdiepen.

Aan de hand van een aantal voorbeelden laten we zien hoe je zelf van een lagere orderekenvraag een rijke rekenvraag kunt maken. In de bijlage vind je bovendien voorbeelden van een aantal onderwerpen, met daarbij een lagere orderekenvraag en een rijke rekenvraag naast elkaar staan. Dit geeft inzicht in hoe je van een lagere ordeopgave zoals $8+7$ of 3×7 een rijke opgave kunt maken.

Voorbeelduitwerking 1

1. Leerdoel: Ik kan gepast betalen met bankbiljetten van 5, 10, 20, 50 euro en munten van 1 en 2 euro.
2. Gesloten vraag: Lieke koopt een fiets op de rommelmarkt. Ze betaalt precies genoeg.



Hoeveel kost de fiets? Het antwoord is: 57 euro.

3. Een rijke rekenvraag kan zijn: Lieke koopt op de rommelmarkt een fiets voor 57 euro. Ze heeft briefjes (5, 10, 20) en munten (1 en 2 euro). Hoe kan ze betalen?
4. Formuleer passende vervolgvragen:
 - Bedenk meer mogelijkheden.
 - Ik weet dat Lieke 7 briefjes/munten gaf. Welke briefjes/munten kunnen dat zijn?
 - Kan het ook met 10 briefjes/munten? Leg eens uit.

De standaardvraag vraagt van leerlingen dat ze de geldbedragen bij elkaar tellen. De rijke rekenvraag vraagt van leerlingen om de bedragen niet alleen bij elkaar op te tellen, maar ook om te bedenken op welke manieren een bedrag samengesteld kan worden, of welke voorwerpen ze kunnen kopen voor een bedrag. Hierdoor worden ze ook uitgedaagd de relatie te zien tussen de verschillende waarden: 1 briefje van 20 kun je inwisselen voor 2 briefjes van 10. Hoe meer kinderen hiermee puzzelen en redeneren, hoe meer ze nadenken over het leerdoel van de opdracht, namelijk de relaties tussen de verschillende waarden van bankbiljetten en munten én het handig samenstellen ervan.

Voorbeelduitwerking 2

1. Leerdoel: ik kan de oppervlakte van een rechthoek berekenen in vierkante meters.
2. Gesloten vraag: onze tuin is 8 meter breed en 10 meter lang. Wat is de oppervlakte van onze tuin? Het antwoord is: 80 m².
3. Een rijke rekenvraag kan zijn: onze tuin heeft een oppervlakte van 80 m². Wat kunnen de lengte en de breedte van onze tuin zijn?
4. Formuleer passende vervolgvragen:
 - Bedenk meer mogelijkheden.
 - Leg eens uit hoe je kunt nagaan of de maten kloppen.
 - Welke maten liggen meer en minder voor de hand, als je denkt aan een tuin?
 - Ik weet dat de tuin meer dan 14 meter lang is. Leg eens uit hoe die tuin er dan kan uitzien?

- Ik weet dat de tuin lijkt op een vierkant. Wat zouden dan de maten kunnen zijn?
- Moeten de lengte en breedte hele meters zijn? Kun je iets anders bedenken?

De alternatieve vragen dwingen de leerlingen om dieper na te denken over het begrip oppervlakte. En nodigen ook uit om na te denken over hoe lengte, breedte en oppervlakte samenhangen. De vragen richten zich niet alleen op het toepassen van de regel voor het uitrekenen van de oppervlakte. Ze dagen leerlingen ook uit om kritisch en creatief te denken en redeneren en om hun gedachten uit te leggen. Het is dan ook niet nodig om hele moeilijke getallen te nemen. Zo kunnen ook kinderen die moeite hebben met rekenen, wel aangezet worden tot wiskundig denken en het verdiepen van hun begrip.

Ten slotte

Rijke rekenvragen maken deel uit van je lesontwerp. Je gaat met deze vragen na wat de redeneringen van de leerling zijn en waar ze staan (fase 2 en 3 van de FE-cyclus). Van belang is dat de rijke rekenvragen passen bij de leerdoelen en succescriteria (fase 1) en dat de leraar met de leerlingen de antwoorden bespreekt en passende vervolgvragen onderneemt (fase 4 en 5). Op die manier zijn de rijke rekenvragen effectief ingebed binnen de cyclus van formatief evalueren.

Referenties

- Dains, D. (1986). Are Teachers Asking the Right Questions? *Education* 1, 4 p. 368-374.
- Gulikers, J.T.M., & Baartman L.K.J. (2017). *Doelgericht professionaliseren: formatieve toetspraktijken met effect! Wat DOET de docent in de klas?* Wageningen/Utrecht: Universiteit Wageningen, Hogeschool Utrecht.
- Noteboom, A., Silfhout, G. van, & Tammes, A.C. (2019). *Formatief evalueren in het primair onderwijs. Werken aan groei.* Enschede: SLO.
- Sullivan, P., & Lilburn, P. (2005). *Good questions for Math teaching. Why ask them and what to ask. Grades K-6.* Sausalito, USA: Math Solutions.
- Voerman, L. (2018). *Effectief coachen is vragen stellen én feedback geven.* Raadpleegbaar op: <https://www.lbbo.nl/materialenbank/effectief-coachen-is-vragen-stellen-en-feedback-geven-bbm-sept-2018>.

Bijlage

Onderstaande tabel geeft voor een aantal onderwerpen een voorbeeld van een lagere orderekenvraag en een rijke rekenvraag.

<i>Leerlijn</i>	<i>Lagere orde-rekenvraag/-opdracht (1 antwoord goed, reproductie)</i>	<i>Rijke rekenvraag</i>
Metten	Meet hoeveel cm je tafel breed is.	Zoek 3 voorwerpen die kleiner dan 100 cm zijn. Hoe groot zijn ze?
Vermenigvuldigen	Reken uit hoeveel flesjes sap in 3 kratten zitten. (18)	Hoe kun je erachter komen hoeveel flesjes sap in 3 kratten zitten?
Optellen/afrekken	[afbeelding met 7 voorwerpen en afbeelding met 8 voorwerpen] Hoeveel voorwerpen samen?	[afbeelding met 7 voorwerpen en afbeelding met 8 voorwerpen] Ik heb 18 voorwerpen nodig. Zijn het er genoeg?
Optellen/afrekken vermenigvuldigen	$8+7=...$ $3 \times 7=$	Welke sommen hebben hetzelfde antwoord? Weet jij nog meer sommen? 8+7: 7+6; 10+5; 7+8; 7+7... 3x7: 3x10; 4x9; 7x3; ..
Schaal	Bereken hoeveel km het in het echt is van Zwolle naar Meppel.	Maak op Google Maps een route die precies 21 km lang is in het echt.