Veranderingen deel 2

vwo wiskunde C, domein C: Verbanden en domein D: Veranderingen

Uitwerkingen

slo

Verantwoording

Dit lesmateriaal is ontwikkeld in het kader van de nieuwe examenprogramma's zoals voorgesteld door de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) en herzien door SLO.

Auteur: Jacques Jansen
Met medewerking van: Simon Biesheuvel, Michiel Doorman, Floor van Lamoen, Hielke Peereboom

Herziene versie: Hielke Peereboom
Met medewerking van: Peter Vaandrager, Piet Versnel
Eindredactie: Martine de Klein

Informatie: SLO
Afdeling: tweede fase
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 661
Internet: www.slo.nl

Inhoud

§ 7 Helling

Opgave 1

a. De lengte van de rode driehoek is 8 en de hoogte 3, terwijl de lengte van de blauwe driehoek 5 is en de hoogte 2. En 8:3 is niet gelijk aan 5:2.

b. Blauwe driehoek: helling is $\frac{3}{8} = 0{,}375.$

Rode driehoek: helling is $\frac{2}{5} = 0{,}4.$

De helling van de rode driehoek is dus groter.

c. Omdat er een 'knik' in de schuine zijde zit, kunnen we dus niet spreken van twee driehoeken, maar wel van vierhoeken.

Opgave 2

a. $8\ \% = \frac{8}{100} = 0{,}08$

b. $\frac{21-0}{63-0} = \frac{21}{63} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$

c. $\frac{210-80}{80-10} = \frac{130}{70} = 1{,}857$

d. $\frac{130--30}{35--15} = \frac{160}{50} = 3{,}2$

e. 4,5

Opgave 3

a. $\frac{1912-290}{22{,}7} = \frac{1622}{22{,}7} = 71{,}45$ meter per kilometer.

b.

Horizontale verplaatsing	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Hoogteverandering	290-308	308-332	332-359	359-403	403-459	459-501	501-563
Afgelezen helling	0,018	0,024	0,027	0,044	0,056	0,042	0,059
Berekende helling	0,018	0,024	0,027	0,044	0,056	0,042	0,062

c. Zie boven.

d. Alles klopt, behalve de helling in de zevende kilometer.

Opgave 4

$\frac{1912-290}{22700} = \frac{1622}{22700} = 0{,}07145$, dus een hellingspercentage van ongeveer 7,1%.

Opgave 5

Het gaat om de percentages 4,4% in de vierde kilometer en 8,8% in de veertiende kilometer.

Opgave 6

Het hellingspercentage 7,1% treedt op aan het begin van de negentiende kilometer.

Opgave 7
Als we voor *x* de waarde 0 invullen, dan is *h* gelijk aan 2, hetgeen betekent dat de top op 2000 meter ligt.
Als we de vergelijking $-0{,}005x^2 + 2 = 0$ oplossen, dan komen daar als antwoorden $x = -20$ en $x = 20$ uit. Dat wil zeggen dat het profiel $20 - -20 = 40$ kilometer breed is.

Opgave 8

Lijnstuk	Helling
AB	0,175
BC	0,125
CD	0,075
DE	0,025

Opgave 9
a. $-0{,}005 \cdot (-9)^2 + 2 = 1{,}595$ (Denk erom dat je de haakjes om -9 niet vergeet!)

b. $\frac{1{,}595-1{,}5}{-9--10} = \frac{0{,}095}{1} = 0{,}095$

Opgave 10
$-0{,}005 \cdot (-9{,}9)^2 + 2 = 1{,}50995$ en $\frac{1{,}50995-1{,}5}{-{,}50995-} = \frac{0{,}00995}{0{,}1} = 0{,}0995$

Opgave 11

x-coördinaat P	Helling CP
–9	0,095
–9,9	0,0995
–9,99	0,09995
–9,999	0,099995

Opgave 12
Hoe dichter punt P bij punt C wordt genomen, hoe dichter de helling van CP in de buurt komt van het getal 0,1.

Opgave 13
De helling in punt C is 0,1.

Opgave 14

a. $0^2 + 3 \cdot 0 = 0$ en $0{,}001^2 + 3 \cdot 0{,}001 = 0{,}003001$

$$\frac{0{,}003001 - 0}{0{,}001 - 0} = \frac{0{,}003001}{0{,}001} = 3{,}001$$

De helling is dus 3.

b. $(-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 0$ en $(-2{,}999)^2 + 3 \cdot (-2{,}999) = -0{,}002999$

$$\frac{-0{,}002999 - 0}{-2{,}999 - -3} = \frac{-0{,}002999}{0{,}001} = -2{,}999$$

De helling is dus –3.

c. De helling is 0,5.

d. De helling is 3.

e. De helling is 0.

f. Ja, want in opgave d heb je te maken met de grafiek van een rechte lijn, en een rechte lijn heeft overal dezelfde helling (en het hellingsgetal is 3).

Opgave 15

a. Dit betekent dat de raaklijn in punt F een helling 0 heeft en dus horizontaal loopt.

b. De nulpunten van de parabool liggen bij $x = 0$ en $x = 4$.
De symmetrieas is dus $x = 2$.

c. Het punt met *x*-coördinaat 1 ligt precies aan de andere kant van de symmetrieas.
De helling in dat punt moet dan dus –2 zijn (bedenk dat de grafiek daar daalt).

Opgave 16

Als een grafiek op een interval waarop de grafiek stijgend is, is de helling altijd positief (groter dan 0).
Als de grafiek dalend is, is de helling altijd negatief (kleiner dan 0).

Opgave 17

$-0{,}05 \cdot (-10)^2 - 0{,}2 \cdot (-10) + 6 = 3$
$-0{,}05 \cdot (-9{,}999)^2 - 0{,}2 \cdot (-9{,}999) + 6 = 3{,}00079995$

$$\frac{3{,}00079995 - 3}{-9{,}999 - -10} = \frac{0{,}00079995}{0{,}001} = 0{,}79995 \approx 0{,}8$$

Opgave 18

De helling in punt Q is 0,2 en die in punt R is –0,8.

Opgave 19

a. Van (–5, 0) naar (0, 5) betekent: 5 naar rechts en 5 omhoog, dus 1 naar rechts en 1 omhoog, dus helling is 1.

b. Lijnen die dezelfde helling hebben lopen evenwijdig.

c. In het punt (–12; 1,2).

d. In het punt (8; 1,2).

Opgave 20

In een top van de grafiek is de helling 0. De coördinaten van dit punt zijn (–2; 6,2).

Opgave 21

a. De helling van de grafiek in het punt P(1, 4) is –2.

b. De helling moet dus –1 zijn en dat is het geval in punt (1,59; 3,17).
Opmerking: het is heel lastig om dit punt nauwkeurig te bepalen.
Als je in de buurt van het punt zit, is je antwoord al goed.

c. De grafiek is dalend; dat betekent dat de helling negatief is.
De grafiek is afnemend dalend; dat betekent dat de helling steeds dichter bij 0 komt, dus dat de helling groter wordt (maar wel negatief blijft).

d. $\frac{4}{\sqrt{16}} = 1$ en $\frac{4}{\sqrt{16{,}001}} = 0{,}99997$

$$\frac{0{,}99997 - 1}{16{,}001 - 16} = \frac{-0{,}00003125}{0{,}001} = -0{,}03125$$

Opgave 22

a. De helling van de grafiek in punt B(2, 1) is 1.

b. De helling moet dus ½ zijn en dat is het geval in punt (5, 8).

c. $2 \cdot \sqrt{5 - 1} = 4$ en $2 \cdot \sqrt{5{,}001 - 1} = 4{,}000499969$

$$\frac{4{,}000499969 - 4}{5{,}001 - 5} = \frac{0{,}000499969}{0{,}001} = 0{,}499969 \approx 0{,}5$$

d. De helling is gelijk is aan 2 in het punt(1,25; 1).

Opgave 23

a. De helling in A is 2,25 en die in B is 1,80. Dat is dus $2{,}25 - 1{,}80 = 0{,}45$ groter.

b. Bij $x = -1$ hoort $y = 1$.
Bij $x = 1$ hoort $y = -0{,}9$.
Dus 2 naar rechts en 1,9 naar beneden, dus de helling is –0,95.

c. De mier moet vanaf punt A eerst omhoog kruipen (eerst heel steil, later steeds minder steil) tot aan de top. Daarna kruipt de mier steeds sneller naar beneden tot aan een punt in de buurt van de oorsprong. Vervolgens blijkt de mier naar beneden gaan, maar dan steeds minder snel, tot aan het laagste punt van de grafiek. Na het laagste punt kruipt de mier weer steeds steiler omhoog tot aan punt B.
De hellingen tussen het hoogste en het laagste punt zijn negatief en op zijn kleinst in de buurt van de oorsprong.

Opgave 24

a. De helling in het punt A is 4 en in punt B: 1.

b. De grafiek van $y = 2^x$ stijgt in punt A minder snel dan de grafiek van $y = x^2$.
Dus de helling van $y = 2^x$ is kleiner dan die van $y = x^2$.

Opgave 25

a.

	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
Helling	$y = x^2$	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6
Helling	$y = 0{,}25x^2$	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5
Helling	$y = 2^x$	0,0433	0,0866	0,1733	0,3466	0,6932	1,3863	2,7726	5,5452

b. De hellingen uit de tweede rij zijn telkens 4 keer zo groot als die uit de derde rij.

c. De helling wordt steeds 2 keer zo groot.

d. Vermoedelijk $5{,}5452 * 2 * 2 * 2 * 2 = 88{,}7232$.

Herhalingsopgaven

Opgave 26

a. De grafiek stijgt overal, dus de helling is overal positief (en dus ook de marginale kosten).

b. De helling is bij benadering gelijk aan 0,75.

c. Ongeveer bij $q = 260$.

d. De marginale kosten zijn het laagste als de grafiek het minst steil omhoog loopt en dat is ongeveer bij $q = 180$.

Opgave 27

a. $n = 250 \cdot \sqrt{16 \cdot 0 + 225} - 3750 = 250 \cdot \sqrt{225} - 3750 = 250 \cdot 15 - 3750 = 0$

b. $n = 250 \cdot \sqrt{16 \cdot (3 \cdot 60) + 225} - 3750 = 10181$

c. De helling bij $t = 0$ is 133,33 en bij $t = 180$ is de helling 35,89.
Dus de toename is aan het eind kleiner dan aan het begin.
Of: De toename op [0, 10] is 1155 en de toename op [170, 180] is 364.
Dus de stijging is aan het eind kleiner dan aan het begin.

d. De helling bij $t = 30$ is 75,32 en de helling bij $t = 90$ is 49,01. En $49{,}0 * 1{,}5 = 73{,}5$.

Opgave 28

a. $K = \frac{21270}{0{,}2} + 233 \cdot 0{,}2 = 106396{,}60$ euro.

b. De helling van de grafiek in het punt met $L = 15$ is 138,47.

c. De helling van de grafiek in het punt met $L = 5$ is –617,8.
Dit betekent dat bij $L = 5$ de kavelkosten dalen met bijna 618 euro per hectometer.

d. Bij $L = 50$ met ongeveer 224 euro per hectometer.

e. Als *L* heel groot wordt dan is $\frac{21270}{L}$ bijna gelijk aan 0 en is dus $K \approx 233L$.
Omdat dit de formule is van een rechte lijn is de toename dus 233.

Opgave 29

a. In punt *A* is $x = 0$. Dan is $r = \sqrt{0^2 + 100} = 10$. En $S = \frac{100000}{10^3} = \frac{100000}{1000} = 100$.

b. Als *P* verder van *A* afligt, wordt *x* groter en dus ook *r*.
Omdat je bij het berekenen van *S* het getal 100000 door een steeds groter getal moet delen, wordt de uitkomst van de breuk (en dat is *S*) steeds kleiner.

c. De grafiek daalt, maar wel steeds minder snel en is dus afnemend dalend.

d. In het begin is de grafiek toenemend dalend, later afnemend dalend.

e. De grafiek daalt het snelst in de buurt van $x = 5$ en daar is de helling ongeveer –8,59.

§ 8 Exponentiële groei

Opgave 1

1983: $t = 56$

1948: $t = 21$

35 naar rechts en 2 omhoog, dus het hellingsgetal is $\frac{2}{35} = 0{,}057$.

De trendlijn $B = 0{,}057 \cdot t + b$ gaat door *(56, 5)*, dus $5 = 0{,}057 \cdot 56 + b$.

$b = 5 - 0{,}057 \cdot 56 = 1{,}8$

Dus: $B = 0{,}057t + 1{,}8$.

Opgave 2

a. De groeifactor per 83 jaar is $\frac{6{,}8}{2} = 3{,}4$.

b. De groeifactor per jaar is dan $3{,}4^{\frac{1}{83}} = 1{,}01485 \approx 1{,}015$.

c. $B = 2 \cdot 1{,}015^t$

d. Ongeveer in 1970 of 1971.

Opgave 3

Stel dat we uitgaan van het lineaire verband $B = 4t + 4$,
waarbij *t* de tijd is in uren en *B* het aantal bacteriën.
Bij $t = 0$ is $B = 4$ en bij $t = 1$ is $B = 8$.
Dat betekent dat het 1 uur duurt om het dubbele aantal bacteriën te krijgen.
Als we echter kiezen voor $t = 5$ dan is $B = 24$. Om nu het dubbele aantal te krijgen moet $B = 48$ worden en dat betekent dat $t = 11$ moet zijn. Dus een verdubbelingstijd van 6 uur.
Conclusie: de verdubbelingstijd bij een lineair verband is niet altijd hetzelfde.

Opgave 4

a. $Y_1 = 2 \cdot 1{,}015^X$
$Y_2 = 4$
Intersect $\rightarrow X = 46{,}556$
Dus ongeveer 47 jaar (behoorlijk alarmerend).

b. 2050: $t = 123$
$B = 0{,}057 \cdot 123 + 1{,}8 = 8{,}83$, dus bij linaire groei 8,83 miljard mensen;
$B = 2 \cdot 1.015^{123} = 12{,}48$, dus bij exponentiële groei 12,48 miljard mensen;
Verschil: $12{,}48 - 8{,}83 = 3{,}65$ miljard mensen.

c. $1{,}015^{10} = 1{,}1605 \approx 1{,}16$

d. Dus een toename van ongeveer 16%.

Opgave 5

a. Rode grafiek: door (0, 1) en (1; 5,4), dus groeifactor 5,4.
Zwarte grafiek: door (0, 1) en (1; 2,4), dus groeifactor 2,4.
Blauwe grafiek: door (0, 1) en (1; 0,5), dus groeifactor 0,5.

b. Rode grafiek: $5{,}4^t = 2$, dus $t \approx 0{,}411$.
Zwarte grafiek: $2{,}4^t = 2$, dus $t \approx 0{,}792$.

c. Rode grafiek: $helling \approx 1{,}686$.
Zwarte grafiek: $helling \approx 0{,}875$.
Verschil: $1{,}686 - 0{,}875 = 0{,}811$.

Opgave 6
Halveringstijd is 1.

Opgave 7
a. $1{,}2^t = 2$, dus verdubbelingstijd $t \approx 3{,}802$.
b. $0{,}75^t = 0{,}5$, dus halveringstijd $t \approx 2{,}409$.
c. $1{,}02^t = 2$, dus verdubbelingstijd $t \approx 35{,}003$.

Opgave 8
a.

t	0	1	2	3	4
h	0,1	0,82	1,396	1,857	2,225

$\frac{0{,}82}{0{,}1} = 8{,}2$ en $\frac{1{,}396}{0{,}82} = 1{,}7$. De factoren zijn niet gelijk, dus geen exponentieel verband.

b. Zie GRM.
c. Als *t* groter wordt, dan wordt $0{,}8^t$ kleiner en nadert tot 0.
Daardoor wordt er steeds minder van 3,7 afgetrokken en wordt *h* dus groter.
d. Bij het poten is $t = 0$ en dan is $h = 0{,}1$ meter, dus 1 decimeter.
e. Als *t* groter wordt, dan wordt $0{,}8^t$ kleiner en nadert tot 0. Datzelfde geldt voor $3{,}6 \cdot 0{,}8^t$.
Daardoor wordt er steeds minder van 3,7 afgetrokken en nadert de waarde van *h* dus tot 3,7 meter.
f. $Y_1 = 3{,}7 - 3{,}6 \cdot 0{,}8^X$
$Y_2 = 3$
Intersect $\rightarrow X = 7{,}339$
Dus na 7,339 weken en dat is na $7{,}339 \cdot 7 = 51$ (of 52) dagen.

Opgave 9
a. $Y_1 = 3{,}7 - 3{,}6 \cdot 0{,}8^X$
$CALC \rightarrow dy/dx \rightarrow X = 2 \rightarrow dy/dx = 0{,}51$
Dus 0,51 meter per week.

b. $\frac{0{,}51 \cdot 100}{7} \approx 7{,}29$ centimeter per dag.
c. Na 11,34 weken (of na 79 dagen).

Opgave 10
a. $Y_1 = 24 - 3{,}2 \cdot 1{,}05^X$
Zie verder GRM.
b. Als *t* groter wordt, dan wordt $1{,}05^t$ groter en dus ook $3{,}2 \cdot 1{,}05^t$.
Daardoor wordt er steeds meer van 24 afgetrokken en wordt *h* dus kleiner.
c. $CALC \rightarrow dy/dx \rightarrow X = 20 \rightarrow dy/dx = -0{,}41$

Opgave 11
a. $Y_1 = 13 + 44 \cdot 0{,}65^X$
Zie verder GRM.
b. Als *t* groter wordt, dan wordt $0{,}65^t$ kleiner en nadert tot 0. Datzelfde geldt voor $44 \cdot 0{,}65^t$.
Daardoor wordt er steeds minder bij 33 opgeteld en daalt de waarde van *h* dus tot 13.
c. $CALC \rightarrow dy/dx \rightarrow X = 6 \rightarrow dy/dx = -1{,}43$

Opgave 12

a. $t = 1 \rightarrow H = 71{,}3$

$t = 5 \rightarrow H = 625{,}04$

$\frac{625{,}04}{71{,}3} = 8{,}766$, dus een toename met 776,6%.

Of: $\frac{625-71{,}3}{71{,}3} \cdot 100\ \% = 776{,}6\ \%$.

b. Als t groter wordt, dan wordt $0{,}7^t$ kleiner en nadert tot 0. Datzelfde geldt voor $1041 \cdot 0{,}8^t$.

Daardoor wordt er steeds minder van 800 afgetrokken en nadert de waarde van h dus tot 800 gram.

De grafiek stijgt.

Aan de tabel in je GRM is te zien dat de grafiek afnemend stijgt.

c. $t = 0 \rightarrow H = 800 - 1041 = -241$ (maar dat kan niet).

Dus H ligt altijd tussen 0 en 800.

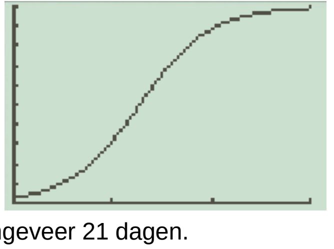
d. $\mathrm{Y}_1 = 800 - 1041 \cdot 0{,}7^{\mathrm{X}}$

$CALC \rightarrow dy/dx \rightarrow X = 2 \rightarrow dy/dx = 181{,}94$

Dus 182 gram per jaar.

Opgave 13

a.



b. Na ongeveer 21 dagen.

Opgave 14

a. $Y_1 = 100/(1 + 35 * 0{,}756^X)$

Table $\rightarrow$ de waarden komen goed overeen met de tabel.

b. $t = 0 \rightarrow P = 2{,}78$, dus ongeveer 3%.

c. $Y_2 = 50$

Intersect $\rightarrow X = 12{,}71$

Dus na ongeveer 13 dagen.

d. Als t groter wordt, dan wordt $0{,}756^{\mathrm{t}}$ kleiner en nadert tot 0. Datzelfde geldt voor $35 \cdot 0{,}756^{\mathrm{t}}$.

Daardoor komt de noemer steeds dichter bij 1 en de breuk steeds dichter bij 100.

Dus het percentage nadert de 100%.

e. Zie GRM ($X_{min} = 0$ en $X_{max} = 21$).

f. $t = 12 \rightarrow P = 45{,}05$

$t = 0 \rightarrow P = 2{,}78$

groeifactor in 12 dagen: $\frac{45{,}05}{2{,}78} = 16{,}22$

groeifactor per dag: $16{,}22^{\frac{1}{12}} = 1{,}26$

$Y_2 = 2{,}78 \cdot 1{,}26^X$

Kijk in de *Table* en daar blijkt dat de waarden van Y_1 en Y_2 bijna gelijk zijn tussen 0 en 12.

Opgave 15

a. Aantal in 2003: $1200 \cdot 0{,}24 + 940 \cdot 0{,}90 + 860 \ \cdot 0{,}30 = 1392$;
$\frac{1392}{940} = 1{,}48$, dus een toename van 48%.

b. Als *t* groter wordt, dan wordt $0{,}43^t$ kleiner en nadert tot 0. Datzelfde geldt voor $43 \cdot 0{,}43^t$.
Daardoor komt de noemer steeds dichter bij 3 en de breuk steeds dichter bij $\frac{222}{3} = 74$.
Dus het percentage nadert de 74%.

c. Als *t* groter wordt, dan wordt $0{,}43^t$ kleiner en nadert tot 0. Datzelfde geldt voor $43 \cdot 0{,}43^t$.
Er wordt dus steeds minder bij 3 opgeteld. Daardoor wordt de noemer dus steeds kleiner.
Dus wordt de breuk steeds groter en is de grafiek van P dus stijgend.

d. De grafiek lijkt de eerste drie jaren exponentieel te stijgen.
$Y_1 = 222/(3 + 43 \cdot 0{,}43^X)$
$t = 0 \rightarrow P = 4{,}83$
$t = 3 \rightarrow P = 34{,}59$
groeifactor in 3 dagen $\frac{34{,}50}{4{,}83} = 7{,}17$
groeifactor per dag $7{,}17^{\frac{1}{3}} = 1{,}93$
$Y_2 = 4{,}83 \cdot\ 1{,}93^X$
Kijk in de *Table* en daar blijkt dat de waarden van Y_1 en Y_2 bijna gelijk zijn tussen 0 en 3.

e. $Y_1 = 222/(3 + 43 \cdot 0{,}43^X)$
$CALC \rightarrow dy/dx \rightarrow X = 4 \rightarrow dy/dx = 13{,}78$
Dus 13,78% per jaar.

Herhalingsopgaven

Opgave 16

a. $Y_1 = 214 \cdot 2^{(0{,}083X)}$
$Y_2 = 428$
Intersect $\rightarrow X = 12{,}05$
Dus ongeveer 12 dagen.

b. $t = 0 \rightarrow G = 214$
$t = 1 \rightarrow G = 226{,}67$
$\frac{2226{,}67}{214} = 1{,}059 \approx 1{,}06$
Dus een toename met ongeveer 6%.

c. $CALC \rightarrow dy/dx \rightarrow X = 10 \rightarrow dy/dx = \ 21{,}89$

Opgave 17

a. In de figuur is te zien dat het ongeveer 6 uur duurt dat de temperatuur van de koffie is gedaald tot 80 °C. Als we dus een inschenktemperatuur van 80 °C hebben duurt het dus nog $24 - 6 = 18$ uur voordat die koffie een temperatuur van 50 °C bereikt.

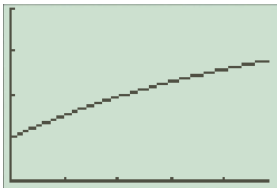
b. Op tijdstip $t = 0$ is de temperatuur 95 °C, dus het temperatuurverschil met de omgevingstemperatuur is $95 - 20 = 75$ °C.
Op tijdstip $t = 24$ is de temperatuur 50 °C, dus het temperatuurverschil met de omgevingstemperatuur is $50 - 20 = 30$ °C.
De groeifactor is dus $\frac{30}{75} = 0{,}4.$

c. $95 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 15{,}2$, dus ongeveer 15 °C.

d. Groeifactor per dag is 0,4 , dus de groeifactor per uur is $0{,}4^{\frac{1}{24}} = 0{,}9625$
$t = 16 \rightarrow T = 20 + 75 * 0{,}962516 = 60{,}716$, dus ongeveer 60,7 °C.

e. $Y_1 = 75 \cdot 0{,}9625^X$
$Y_2 = 37{,}5$
Intersect $\rightarrow X = 18{,}155$
Dus ongeveer 18 uur.

f. $Y_1 = 20 - 15 \cdot 0{,}9625^X$



Opgave 18

a. De verdubbelingstijd bij 42 °C is groter dan die bij 40 °C. Dat betekent dat de bacteriën er bij 42 °C langer over doen om zich te verdubbelen en dat de groei dus zwakker is dan bij 40 °C.

b. $Y_1 = 16{,}9/(-X^2 + 75X - 1350)$
$T = 34 \rightarrow V = 0{,}384$, dus verdubbelingstijd is $0{,}384 * 60 = 23{,}05$ minuten.

c. De groei is het sterkst als de verdubbelingstijd het kleinst is, dus als de grafiek van *V* een minimum heeft.
$CALC \rightarrow minimum \rightarrow X = 37{,}5$
Dus bij 37,5 °C.

d. $1800 \cdot 0{,}86^3 = 1144{,}9008$, dus 1145 bacteriën.

e. $Y_1 = 1800 \cdot 0{,}86^X$
$Y_2 = 900$
Intersect $\rightarrow X = 4{,}596$
Dus de halveringstijd is ongeveer 4,6 uur (of 276 minuten).

f. $CALC \rightarrow dy/dx \rightarrow X = 2 \rightarrow dy/dx = -200{,}79$
Dus een afname van ongeveer 201 bacteriën per uur.

§ 9 Machtsverbanden en leesbare grafieken

Opgave 1

a.

x	1	2	3	6	10
Totale oppervlakte (O)	6	24	54	216	600
Inhoud (I)	1	8	27	216	1000

b. De oppervlakte wordt dan $2^2 = 4$ keer zo groot.

c. Het volume (de inhoud) wordt dan $2^3 = 8$ keer zo groot.

d. Iets dat je tot de derde macht doet groeit sneller dan iets dat je in het kwadraat doet, omdat de exponent van de eerste groter is.

Opgave 2

Bij $I = x^3$ is $c = 1$ en $p = 3$.
Bij $O = 6x^2$ is $c = 6$ en $p = 2$.

Opgave 3

Inhoud (I)	1000	64	729	100	I
Lengte ribbe (x)	10	4	9	$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt[3]{I}$

Opgave 4

a. $\sqrt[3]{I} = I^{\frac{1}{3}}$

b. $x = I^{\frac{1}{3}}$

Opgave 5

a. $x^2 = x \cdot x = I^{\frac{1}{3}} \cdot I^{\frac{1}{3}} = I^{\frac{2}{3}}$

b. $O = 6x^2 = 6 \cdot I^{\frac{2}{3}}$

Opgave 6

$I = 0 \rightarrow O = 0$
$I = 1 \rightarrow O = 6$
Gemiddelde verandering is dus $6 - 0 = 6$.
$I = 4999 \rightarrow O = 1745{,}18$
$I = 5000 \rightarrow O = 1745{,}41$
Gemiddelde verandering is dus $1745{,}41 - 1745{,}18 = 0{,}23$.
Er is dus sprake van afnemende stijging.

Opgave 7

Als de inhoud van een kubus wordt 1000 keer zo klein wordt, dan wordt de oppervlakte van de kubus $1000^{\frac{2}{3}} = 100$ keer zo klein.

Opgave 8

$$f = \frac{O}{I} = \frac{6x^2}{x^3} = \frac{6 \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{6}{x}$$

Opgave 9

a. $\frac{6}{x} = 6 \cdot \frac{1}{x} = 6 \cdot x^{-1}$

b. $f = \frac{6}{x} \Rightarrow f \cdot x = 6$, dus een omgekeerd evenredig verband.

Opgave 10

Als het gewicht (dus ook het volume) van de baby $\frac{5}{80} = \frac{1}{16} (= 0{,}0625)$ deel is van het gewicht van een volwassene, dan is de huidoppervlakte van een baby $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}16 \approx \frac{1}{6}$ deel van de huidoppervlakte van een volwassene.

Opgave 11

Omdat een baby een relatief grote huidoppervlakte en omdat het lichaam de meeste warmte verliest via de huid is er dus hulp nodig van een kruikje om het lichaam op temperatuur te houden.

Opgave 12

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \cdot 1^p = 1 \cdot 1 = 1$, dus de grafiek gaat door (1, 1).

Opgave 13

$y = x^{-1}$ is de blauwe grafiek.
$y = x$ is de zwarte grafiek.
$y = x^{\frac{2}{3}}$ is de groene grafiek.
$y = x^2$ is de rode grafiek.
Dus van $y = x^{\frac{1}{2}}$ is geen grafiek getekend.

Opgave 14

a. Zie GRM.
$y = 2^x$ is een toenemend stijgende grafiek, die boven de *x*-as loopt.
$y = x^2$ daalt links van de *y*-as en stijgt rechts van de *y*-as.

b. Bij machtsverbanden staat de variabele als grondtal en is de exponent een constante (vast getal).
Bij $y = 2^x$ spreken we van een exponentieel verband.

Opgave 15

a.

$y =$	Door (0, 0)	Door (–1, –1)	Door (1, 1)	Door (–1, 1)
x^2	Ja	Nee	Ja	Ja
x^3	Ja	Ja	Ja	Nee
x^4	Ja	Nee	Ja	Ja
x^5	Ja	Ja	Ja	Nee
x^6	Ja	Nee	Ja	Ja

b. Ja, beide beweringen zijn waar.

c. Als de exponent *p* oneven is, geldt altijd dat de grafiek door (–1, 1), (0, 0) en (1, 1) gaat en toenemend stijgend is voor $x > 0$ en afnemend stijgend voor $x < 0$.

Opgave 16

a.

$y =$	Door (–1, 1)	Door (–1, –1)	Door (1, 1)	Afnemend dalend voor $x > 0$
x^{-1}	Nee	Ja	Ja	Ja
x^{-2}	Ja	Nee	Ja	Ja
x^{-3}	Nee	Ja	Ja	Ja
x^{-4}	Ja	Nee	Ja	Ja
x^{-5}	Nee	Ja	Ja	Ja

b. Als de exponent *p* negatief en even is, geldt altijd dat de grafiek door (–1,1) en (1, 1) gaat en toenemend stijgend is voor $x < 0$ en afnemend dalend voor $x > 0$.

c. Als de exponent *p* negatief en oneven is, geldt altijd dat de grafiek door (–1, -1) en (1, 1) gaat en toenemend dalend is voor $x < 0$ en afnemend dalend voor $x > 0$.

d. Zie hierboven.

Opgave 17

a. Als je voor de *x* in de vergelijking de *x*-waarden van de punten A en E invult en voor de *y* de *y*-waarden van de punten, krijg je de twee gegeven vergelijkingen.

b. $c = 0{,}5$

c. $40{,}5 = 0{,}5 \cdot 3^p$
$Y_1 = 40{,}5$ en $Y_2 = 0{,}5 \cdot 3^X$
Intersect $\rightarrow X = 4$
Dus $p = 4$.

d. $y = 0{,}5 \cdot x^4$

Opgave 18

a. Als je voor de *x* in de vergelijking de *x*-waarden van de punten *A* en *E* invult en voor de *y* de *y*-waarden van de punten, krijg je de twee gegeven vergelijkingen.

b. Als je in beide vergelijkingen linker- en rechterkant deelt door de macht, dan krijg je de twee ‘nieuwe’ vergelijkingen.

c. $Y_1 = \frac{3}{3^X}$ en $Y_2 = \frac{24}{6^X}$

Intersect $\rightarrow X = 3$
Dus: $p = 3 \rightarrow c = \frac{1}{9}$ en dus $y = \frac{1}{9} \cdot x^3$.

Opgave 19

$y = 6 \cdot x^4$

Opgave 20

$y = 26\frac{1}{6} \cdot x^{0{,}585}$

Opgave 21

a. Je kunt de formule ook anders schrijven, namelijk als $S = \frac{700}{L^2} = 700 \cdot \frac{1}{L^2} = 700 \cdot L^{-2}$ en dat is een machtsformule.

b. $10\ cm \rightarrow L = 0{,}10 \rightarrow S = 70000$ en $50\ cm \rightarrow L = 0{,}50 \rightarrow S = 2800.$
Dus 25 keer zoveel.

Opgave 22

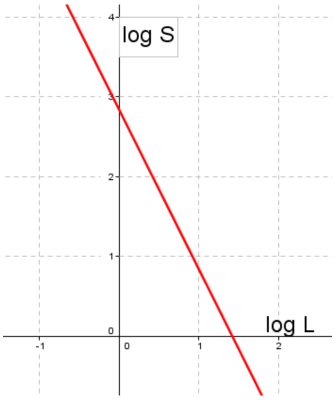
$D = \frac{8500}{1{,}1^{\frac{2}{3}}} \approx 7977$; er zijn dus 7977 diersoorten met een gewicht van 1,1 kg.

$S = \frac{700}{0{,}28^2} \approx 8929$; er zijn dus 8929 diersoorten met een lengte van 0,28 m.

Het is dus mogelijk dat er 7000 diersoorten zijn die bij beide groepen horen, dus deze persoon heeft gelijk.

Opgave 23

L	*S*	log(*L*)	log(*S*)
0,1	70000	–1	4,85
1	700	0	2,85
10	7	1	0,85
100	0,07	2	–1,15



Opgave 24

a. $\frac{1500}{0{,}4} = 3750$ keer zo intelligent.

b. $\frac{7500}{5000 \cdot 1000} \cdot 100\% = 0{,}15$

c. Muis: $\frac{0{,}4}{0{,}012 \cdot 1000} \cdot 100\% = 3{,}33$

Dolfijn: $\frac{840}{110 \cdot 1000} \cdot 100\ \% = 0{,}76$

Mens: $\frac{1500}{70 \cdot 1000} \cdot 100\ \% = 2{,}14$

Walvis: $\frac{7800}{37000 \cdot 1000} \cdot 100\ \% = 0{,}02$

Dus de muis zou het intelligentst zijn.

Opgave 25

a. Olifant, nijlpaard, dolfijn en mens.

b. Ongeveer 1300 gram.

Opgave 26

a. $12 \cdot 70^{\frac{2}{3}} = 203{,}82$ gram.

b. Omdat het werkelijke hersengewicht 1500 gram is ligt het punt boven de trendlijn.

c. $1500 - 204 = 1296$ gram.

Opgave 27

a. $12 \cdot 110^{\frac{2}{3}} \approx 275$ gram

b. $12 \cdot G^{\frac{2}{3}} = 35 \Rightarrow G^{\frac{2}{3}} = \frac{35}{12} = 2{,}9167 \Longrightarrow G = 2{,}9167^{\frac{3}{2}} = 4{,}98$ kilogram

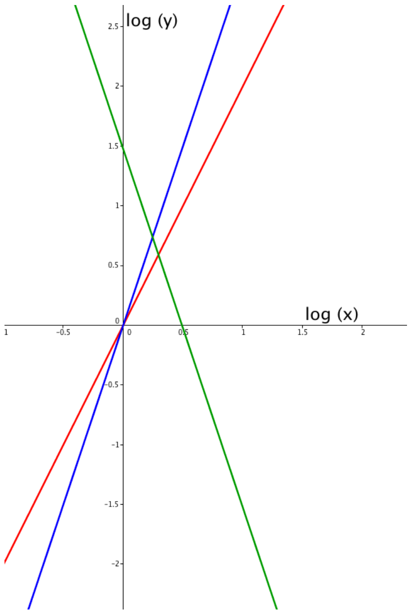
c. $H = 12 \cdot G^{\frac{2}{3}} \Rightarrow G^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} \cdot H \Rightarrow G = \left(\frac{1}{12} \cdot H\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot H^{\frac{3}{2}} = 0{,}024 \cdot H^{1{,}5}$

Opgave 28

a., b. en c.:

x	1	10	20
$y = x^2$	1	100	400
$y = x^3$	1	1000	8000
$y = 30 \cdot x^{-3}$	30	0,03	0,00375

$\log x$	0	1	1,3
$\log x^2$	0	2	2,602
$\log x^3$	0	3	3,903
$\log(30 \cdot x^{-3})$	1,477	–1,523	–2,426



d. Alle drie een rechte lijn (na herschaling).

Opgave 29

a. $2^2 = 4$ bij beide verbanden, en $4^2 = 16 = 2^4$.

b. Zie GRM.

c. Tussen 0,485 en 3,212 (of een ander interval tussen beide genoemde getallen).

d. Tussen 0 en 0,485 èn rechts van 3,212.

e. Helling van $y = x^2$ voor $x = 2$ is 4.
Helling van $y = 2^x$ voor $x = 2$ is 2,77.

Opgave 30

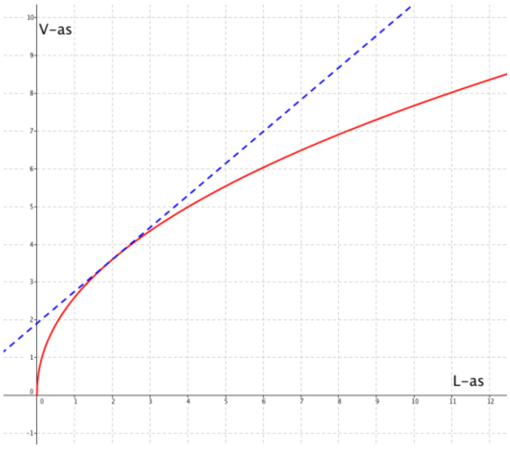
a. $V = 8 \Longrightarrow L = 2{,}6 \cdot 8^{0{,}47} = 6{,}9092$
$V = 13 \Longrightarrow L = 2{,}6 \cdot 13^{0{,}47} = 8{,}6801$

$\frac{8{,}6801}{6{,}9092} = 1{,}256$, dus ongeveer 26% langer.

b.

V	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L	0	2,6	3,60	4,36	4,99	5,54	6,04	6,49	6,91	7,30	7,67

c.



d. Aflezen dat de raaklijn door (0, 2) en (6, 7) gaat, dus de helling is ongeveer $\frac{7-2}{6-0} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$.

e. Dit betekent dat als er 2 liter water in de vissenkom zit de lengte van de goudvis toeneemt met 0,846 centimeter per liter.

f. Als *r* toeneemt van 10 tot 30, dan neemt *V* toe met $17{,}67 - 3{,}53 = 14{,}14$.

Dus als *r* met 1 toeneemt, neemt *V* toe met $\frac{17{,}67-3{,}53}{30-10} = \frac{14{,}14}{20} = 0{,}707$.
Dat betekent dat $a = 0{,}71$.
We kunnen *V* dus schrijven als $V = 0{,}71 \cdot r + b$.
Als we voor *r* de waarde 10 invullen in de formule moet *V* gelijk zijn aan 3,53.
Dus: $0{,}707 \cdot 10 + b = 3{,}53 \Longrightarrow b = 3{,}53 - 7{,}07 = -3{,}54$.

Herhalingsopgaven

Opgave 31

a. $c \cdot 40^{1,8} = 300 \Longrightarrow c = \frac{300}{765,082} = 0,392 \approx 0,4$.

b. 'Hoogste' plus aflezen: (52, 610).

$B = 0,4 \cdot 52^{1,8} = 490,756$ (of $B = 0,392 \cdot 52^{1,8} = 480,941$).
Dus een afwijking van $610000 - 490756 = 119244$ euro (of 129059 euro).

En dat is $\frac{119244}{490756} \cdot 100 = 24,3\%$ (of $\frac{129059}{480941} \cdot 100 = 26,8\%$).

c. Bij het plusteken van 20 woningen is de afstand tot de grafiek net even groot als bij het vorige punt. Dat betekent dat de afwijking van het berekende aantal even groot is bij 20 woningen als bij 52 woningen. Maar omdat de berekende kosten bij 20 woningen veel lager zijn dan bij 52 woningen is de procentuele afwijking bij 20 woningen veel groter dan bij 52 woningen.

d. De helling bij $x = 20$ is ongeveer 7,91 (of 7,75).
Dat betekent dat bij 20 woningen de toename van de kosten 7910 (of 7750) euro per woning bedraagt.

e.

x	***B***	**log(*x*)**	**log(*B*)**
1	0,4	0	-0,398
20	87,885	1,301	1,944
40	306,033	1,602	2,486
60	634,939	1,778	2,803
80	1065,668	1,903	3,028

Opgave 32

a. $log\, 65 = 1,813$
Verticale lijn trekken door 1,813 en kijken waar deze lijn de getekende lijn snijdt.
Door het snijpunt een horizontale lijn tekenen en aflezen waar deze de verticale as snijdt.
Dat is ongeveer bij 0,11.
$10^{0,11} = 1,288$
Dus het gewicht is ongeveer 1,3 gram.

b. $W = \frac{1}{316628} \cdot 50^{3,1} = 0,584$ gram.

c. $Y_1 = \frac{1}{316628} \cdot x^{3,1}$
$Y_2 = 1$
Intersect → $X = 59,48$
Dus vanaf 60 mm.

§ 10 Rijen

Opgave 1
Omdat alle getallen uit de eerste rij die van de tweede rij een handdruk geven, moeten er wel evenveel getallen in de eerste rij als in de tweede rij zijn en zijn de rijen dus ook even lang.
Mogelijk verband: $getal\ uit\ de\ tweede\ rij = 2 * getal\ uit\ de\ eerste\ rij - 1$.

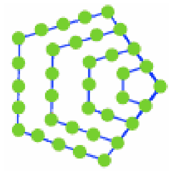
Opgave 2
a. Vierde rij: ieder getal is de som van de twee getallen die daarvoor in de rij staan.
Vijfde rij: $1 + 2,\ 1 + 2 + 3,\ 1 + 2 + 3 + 4, \ldots$
Zesde rij: ieder getal is het dubbele van het voorafgaande getal.
Zevende rij: $1,\ 1 \cdot 2,\ 1 \cdot 2 \cdot 3,\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,\ \cdots$
b. Zesde rij: $y = 2^n$
Zevende rij: $y = n!$

Opgave 3
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

Opgave 4
Bijvoorbeeld: $n = 4 \Longrightarrow 0{,}5 \cdot (4^2 + 4) = 0{,}5 \cdot (16 + 4) = 0{,}5 \cdot 20 = 10$

Opgave 5
a. Je kunt de waarde van elke term *direct* uitrekenen zonder dat je eerst alle voorgaande termen in de rij hoeft te berekenen/kennen.
b. $n = 100 \Longrightarrow 0{,}5 \cdot (100^2 + 100) = 0{,}5 \cdot (10000 + 100) = 0{,}5 \cdot 10100 = 5050$

Opgave 6
a. $1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$
b. Bijvoorbeeld: $n = 4 \Longrightarrow 0{,}5 \cdot (3 \cdot 4^2 - 4) = 0{,}5 \cdot (3 \cdot 16 - 4) = 0{,}5 \cdot 44 = 22.$
c. $n = 5 \Longrightarrow 0{,}5 \cdot (3 \cdot 5^2 - 5) = 0{,}5 \cdot (3 \cdot 25 - 5) = 0{,}5 \cdot 70 = 35.$
d. Vraag je docent hoe je de formule op jouw rekenmachine kunt invoeren.
e. 590.
f. Vanaf rangnummer 82.



Opgave 7
a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
b. $u(n) = n2$
c. $v(n) = 2n - 1$

Opgave 8
a. Steeds *7* erbij optellen.
b. $1,\ 1 \cdot 2,\ 1 \cdot 2 \cdot 3,\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,\ \cdots$
c. Steeds vermenigvuldigen met –1.
d. Steeds 7 ervan aftrekken.

Opgave 9

a. $u(n) = 7 \cdot n$

b. $u(n) = n!$

§ 11 Recursieve formules

Opgave 1
$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ handen.

Opgave 2
a. Als er nog maar één persoon is, kan die geen handen schudden.
b. Als de *n*^e persoon binnenkomt zal deze de handen van de $n - 1$ andere personen moeten schudden. Er waren al *u(n* - 1) handen geschud, dus nu $u(n - 1) + n - 1$.
c. $u(9) = u(8) + 9 - 1 = 28 + 8 = 36$ (zie opgave 1 voor $u(8)$).

Opgave 3
a. Door de omtrek van de voorgaande letter door *2* te delen.
b. $\begin{cases} P(1) = 73{,}5 \\ P(n) = 0{,}5 \cdot P(n-1) \end{cases}$

Opgave 4
a. Door de oppervlakte van de vorige letter door $2^2 = 4$ te delen.

b. $\begin{cases} Opp(1) = 47{,}74 \\ Opp(n) = 0{,}25 \cdot Opp(n-1) \end{cases}$

Opgave 5
a. 8, 6, 2, –6, –22, –54, …
b. 3, 7, 47, 2207, 4870847, 2,37 * 10^{13}, …
4, 4, 4, 4, 4, 4, …

Opgave 6
a. Rij $a(n)$: 1, 4, 7, 10, …
Rij $b(n)$: 1, 4, 7, 10, …
Beide rijen leveren dezelfde termen op.
b. Nee.

Opgave 7
$a(50) = 5 + 3 \cdot a(49) = 5 + 3 \cdot 101 = 308$

$$a(49) = 5 + 3 \cdot a(48) \Longrightarrow a(48) = \frac{a(49) - 5}{3} = \frac{96}{3} = 32$$

Opgave 8
De formule $u(n) = u(n-1) + n - 1$ is gegeven.
In deze formule gaan we de n vervangen door $n + 1$.
Je krijgt dan: $u(n+1) = u(n + 1 - 1) + n + 1 - 1 = u(n+1) = u(n) + n$

Opgave 9
Zesde lid: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
Honderdste lid: $1 + 2 + \ldots + 98 + 99 = 4950$

Opgave 10

a. $u(15) = 10681152342$

b. $v(15) = -14{,}9987$

$w(15) = 15294{,}33$

Opgave 11

a. $P(1) = 43, P(2) = 47, P(3) = 53, P(4) = 61, P(5) = 71, P(6) = 83$

b. $P(41) = 1763 = 41 * 43.$ Dus de 41e term is geen priemgetal.

Opgave 12

a. ...

b. Om een volgend getal uit de rij te vinden moet je de twee voorgaande getallen bij elkaar optellen:
…, 34, 55, 89, 144, …

Opgave 13

…, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, …

Opgave 14

Zie opgave 13.

Opgave 15

a. $u(n) = 2 \cdot u(n-1)$ met $u(1) = 2$

b. $u(n) = 2^n$

c. $1, 1 * 2, 1 * 2 * 3, 1 * 2 * 3 * 4, \ldots$

d. 479001600

Opgave 16

Directe formule	Eerste vijf termen in rijnotatie	Recursieve formule
$t(n) = 1 - 7n$ voor $n \geq 1$	$1, -6, -13, -20, -27, \ldots$	$\begin{cases} t(1) = 1 \\ t(n+1) = t(n) - 7 \end{cases}$
$u(n) = 3 * 4^n$	$12, 48, 192, 768, 3072, \ldots$	$\begin{cases} u(1) = 12 \\ u(n) = 4 \cdot u(n-1) \end{cases}$
$u(n) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$10, 5, 2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$	$\begin{cases} u(n) = \frac{1}{2} * u(n-1) \\ u(1) = 10 \end{cases}$
	$2, 4, 5, 5\frac{1}{5}, 5\frac{3}{13}, \ldots$	$\begin{cases} v(n+1) = 6 - \frac{4}{v(n)} \\ v(1) = 2 \end{cases}$
$u(n) = 3^n$	$a_1=3, a_2=9, a_3=27, a_4=81, \ldots\ldots$	$\begin{cases} u(1) = 3 \\ u(n) = 3 \cdot u(n-1) \end{cases}$

§ 12 Rijen bij lineaire verbanden

Opgave 1

a. Er komt steeds 2 bij.

b. Je kunt het berekenen door $9 + 2 = 11$.

c. De figuur bestaat uit 20 haken.

d. De dertiende haak: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25.
De twintigste haak: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39.

e. Je kunt ook kijken naar de oppervlaktes van de totale figuur (een vierkant) en dan de oppervlaktes van elkaar aftrekken, dus bijvoorbeeld $6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$.

f. Oppervlakte van de n^e haak: $2n - 1$.

g. $196{=}142$, dus de figuur bestaat uit 14 haken.
De grootste haak heeft een oppervlakte van $2 * 14 - 1 = 27$.

Opgave 2

$t(n) = 2000 + (n - 1) \cdot 100$

Als je de haakjes wegwerkt krijg je $t(n) = 100 \cdot n + 1990$ en dat lijkt erg op een lineair verband.

Opgave 3

$$\begin{cases} t(1) = 2000 \\ t(n) = t(n-1) + 100 \end{cases}$$

Opgave 4

$$\begin{cases} u(1) = 1 \\ u(n) = u(n-1) + 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} v(1) = 1 \\ v(n) = v(n-1) + 2 \end{cases}$$

Opgave 5

a. $\begin{cases} t(1) = 7 \\ t(n) = t(n-1) + 8 \end{cases}$

$t(n) = 7 + (n-1) \cdot 8$

$t(10) = 79$

b. $\begin{cases} u(1) = -13 \\ u(n) = u(n-1) + 4 \end{cases}$

$u(n) = -13 + (n-1) \cdot 4$
$u(10) = 23$

c. $\begin{cases} v(1) = 23 \\ v(n) = v(n-1) - 4 \end{cases}$

$v(n) = 23 + (n-1) \cdot -4$
$v(10) = -13$

Opgave 6

a. $2\,,2\frac{1}{2}\,,3\,,3\frac{1}{2}\,,4\,,\dots$

b. $16\,,13\,,10\,,7\,,3\,,\dots$

c. $1\frac{1}{7}\,,1\frac{2}{7}\,,1\frac{3}{7}\,,1\frac{4}{7}\,,1\frac{5}{7}\,,\dots$

d. $-8\,,-6\frac{1}{2}\,,-5\,,-3\frac{1}{2}\,,-2\,,\dots$

e. $12\,,8\,,4\,,0\,,-4\,,\dots$

Opgave 7

$u(n) = -8 + (n-1) \cdot 1{,}5$

$v(n) = 12 + (n-1) \cdot -4$

Opgave 8

a. $294 - 216 = 78$ zitplaatsen meer als we $34 - 21 = 13$ ringen omhoog gaan.
Dat betekent dat er per ring 6 plaatsen bijkomen.
In de eerste ring heb je dus $216 - 20 * 6 = 96$ zitplaatsen.

b. $\begin{cases} A(1) = 96 \\ A(n) = A(n-1) + 6 \end{cases}$

$A(n) = 96 + (n-1) \cdot 6$

Opgave 9

a. Nee, want je weet niet hoe je aan de derde term moet komen.

b. $a(n) = 8 + (n-1) \cdot 4$

c. 8; 12; 18; 27; 40,5; 60,75; …
Of: 8, 12 ,17, 23, 30, 38, …

Opgave 10

a. In elke volgende ring komen er steeds 6 ringen bij.
In de veertigste ring zitten dus $40 * 6 = 240$ cirkels.

b. $A(n) = 6 \cdot n$

c. De rij is 12, 24, 36, 48, …

$\begin{cases} E(1) = 12 \\ E(n) = E(n-1) \cdot 2 \end{cases}$

$E(n) = 12 \cdot n$

d. $E(100) = 1200$

§ 13 Rijen bij een exponentieel verband

Opgave 1

a. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \ldots$

b. $\begin{cases} u(1) = 1 \\ u(n) = u(n-1) \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$

c. Paradox van Zeno.

Opgave 2

a. Bijvoorbeeld: $63 * 1{,}618 = 101{,}934 \rightarrow 102$

b. Bijvoorbeeld: $165 = 102 + 63$

Opgave 3

Bijvoorbeeld: $126 * 1{,}618 = 203{,}868 \rightarrow 204$

Bijvoorbeeld: $330 = 204 + 126$

Opgave 4

$r(0) = 3, r(14) = 2959$

$b(0) = 7, b(13) = 3658,\ b(14) = 5919$

Opgave 5

a. 6, 30, 150, 750, 3750, …

$\begin{cases} u(1) = 6 \\ u(n) = u(n-1) \cdot 5 \end{cases}$

b. Bij een exponentieel verband moet je tekens met hetzelfde getal vermenigvuldigen en dat moet bij deze rij ook.

Opgave 6

In de rij van Mulisch vermenigvuldig je telkens met $\frac{1}{2}$.

Opgave 7

a. $\begin{cases} u(1) = 17 \\ u(n) = u(n-1) \cdot 0{,}85 \end{cases}$

b. $\begin{cases} r(1) = -9{,}1 \\ r(n) = r(n-1) \cdot 7 \end{cases}$ of $\begin{cases} r(0) = -1{,}3 \\ r(n) = r(n-1) \cdot 7 \end{cases}$

Opgave 8

a. $u(n) = 18 \cdot 3^{n-1}$

b. $u(n) = \frac{2}{3} \cdot (-1{,}5)^{n-1}$

Opgave 9

a. De rijen A, F, G en H.

b/c.

A: $A(n) = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ en $\begin{cases} A(1) = 162 \\ A(n) = A(n-1) \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$

F: $F(n) = 2 \cdot \sqrt{2}^{n-1}$ en $\begin{cases} F(1) = 2 \\ F(n) = F(n-1) \cdot \sqrt{2} \end{cases}$

G: $G(n) = 0{,}1 \cdot 0{,}1^{n-1}$ en $\begin{cases} G(1) = 0{,}1 \\ G(n) = G(n-1) \cdot 0{,}1 \end{cases}$

H: $H(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ en $\begin{cases} H(1) = \frac{1}{2} \\ H(n) = H(n-1) \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$

d. A: $162 , 54 , 18 , 6 , 2 , \frac{2}{3} , \frac{2}{9}$, ...
F: $2 , \sqrt{8} , 4 , \sqrt{32} , 8 , \sqrt{128} , 16 , \sqrt{512}$, ...
G: $0.1 , 0.01 , 0.001 , 0.0001 , 0.00001 , 0.000001 , 0.0000001 , 0.00000001$, ...
H: $2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} , 2^{-4} , 2^{-5} , 2^{-6} , 2^{-7}$, ...

Opgave 10

$\frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2, \frac{3}{2} = 1{,}5, \frac{5}{3} = 1{,}67, \dots$

Er wordt niet steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigd, dus geen meetkundige rij.

Opgave 11

a.

Term	*f*(1)	*f*(2)	*f*(3)	*f*(4)	*f*(5)	*f*(6)	*f*(7)	*f*(8)	*f*(9)	*f*(10)	*f*(11)	f(12)
Waarde	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Verhouding		1:1=1	2:1=2	3:2=1,5	1,667	1,600	1,625	1,615	1,619	1,618	1,618	1,618

b. De waarde van de verhoudingen nadert steeds dichter de waarde van φ.

Opgave 12

a. Na 1 jaar: $1000 * 1{,}025 = 1025$ euro.
Na 2 jaar: $1025 * 1{,}025 = 1050{,}63$ euro of $1000 * 1{,}025 * 1{,}025 = 1050{,}63$ euro.

b. $B(t) = 1000 \cdot 1{,}025^t$

$\begin{cases} B(0) = 1000 \\ B(t) = B(t-1) \cdot 1{,}025 \end{cases}$

c. $B(18) = 1000 \cdot 1{,}025^{18} = 1559{,}66$

d. $\begin{cases} B(0) = 1000 \\ B(t) = B(t-1) \cdot 1{,}025 + 500 \end{cases}$

Opgave 13

Groeifactor is $\frac{72}{152} \approx 0{,}47$

$$u(1) = \frac{152}{0.47} = 152 \cdot \frac{152}{72} \approx 320{,}89$$

$$u(0) = \frac{320{,}89}{0{,}47} = 152 \cdot \frac{152}{72} \cdot \frac{152}{72} \approx 677{,}43$$

$$\begin{cases} u(0) = 677{,}43 \\ u(t) = u(t-1) \cdot \frac{72}{152} \end{cases}$$

Herhalingsopgaven

Opgave 14

a. Als je kijkt naar de afmetingen van de opeenvolgende rechthoeken dan zie je het volgende:
1 bij 2, 2 bij 3, 3 bij 4, 4 bij 5, 5 bij 6.
De rechthoeken die je nog moet tekenen hebben dus de afmetingen 6 bij 7 en 7 bij 8.

b. 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, …

c. $\begin{cases} R(1) = 2 \ \ en \ R(2) = 6 \\ R(n) = 2 \cdot R(n-1) - R(n-1) + 2 \end{cases}$

Opgave 15

a. 7 vrouwen, 49 zakken, 343 katten, 2401 kittens. Telkens het vorige aantal maal 7.

b. $7 + 49 + 343 + 2401 = 2800$

c. $7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 + 117649 = 137256$

Opgave 16

a. 1 jaar later: $3000 \cdot 0{,}90 + 450 = 3150$
2 jaar later: $3150 \cdot 0{,}90 + 450 = 3285$

b. $\begin{cases} B(0) = 3000 \\ B(n) = 0{,}90 \cdot B(n-1) + 450 \end{cases}$

c.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3000	3150	3285	3406	3515	3614	3702	3782	3854	3918

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3976	4029	4076	4118	4156	4191	4222	4249	4274	4297

N.B.: De grafiek bestaat uit 21 punten (en dus geen lijn door die punten).

d. en e. Op den duur staan er 4500 bomen op zijn perceel. Maak hierbij gebruik van de tabelfunctie op je GRM.

Opgave17

a. 0,5 is de groeifactor die hoort bij een afname met 50% van de actieve bestanddelen van het al ingenomen medicijn. 5 is de hoeveelheid actieve bestanddelen die je elke 24 uur inneemt.

b. Zie GRM.

c. Op den duur wordt de hoeveelheid medicijn 10 mg.

Opgave 18

a. Bij het begin:

$$L = \frac{400}{1 + 399 \cdot 0{,}55^0} = \frac{400}{1 + 399 \cdot 1} = 1$$

Na 1 week:

$$L = \frac{400}{1 + 399 \cdot 0{,}55^1} = \frac{400}{1 + 399 \cdot 0{,}55} \approx 1{,}81$$

b. Groeifactor is 1,81;

$L = 1{,}81^t$

c. $\begin{cases} L(0) = 1 \\ L(n) = 1{,}81 \cdot L(n-1) \end{cases}$

d. $\begin{cases} H(0) = 1 \\ H(t) = H(t-1) + 0{,}78 * H(t-1) - 0{,}0016\,(H(t-1))^2 \end{cases}$

e. $L(9) \approx 140{,}97$ en $H(9) \approx 134{,}68$. Het verschil is dus ongeveer 6,29.