Afstemming wiskunde-natuurkunde tweede fase

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

slo

Afstemming wiskunde-natuurkunde tweede fase

Juni 2015

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

Auteurs: Johan van de Konijnenberg, Jos Paus, Maarten Pieters, Kees Rijke, Wim Sonneveld
Redactie: Jos Paus

Informatie
SLO
Afdeling: tweede fase
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 661
Internet: www.slo.nl
E-mail: tweedefase@slo.nl

AN: 3.7402.634

Inhoud

1. Inleiding

Door een faseverschil tussen de perioden waarin de vernieuwingscommissies van natuurkunde (2005-2010) en wiskunde (2005-2012) hun opdracht hebben uitgevoerd, moesten deze commissies noodgedwongen kansen op meer afstemming tussen de beide vakken laten liggen. Wel heeft een gezamenlijke werkgroep Afstemming wiskunde-natuurkunde van deze commissies in 2007 een aantal beargumenteerde aanbevelingen gedaan. SLO heeft daarom medio 2013 een werkgroep 'Afstemming wiskunde-natuurkunde tweede fase' ingesteld, als onderdeel van de SLO-projecten Coördinatie invoering nieuwe examenprogramma's natuurwetenschappelijke vakken en Coördinatie invoering nieuwe examenprogramma's wiskunde.
Voorafgaand aan de start hebben de projectleiders overleg gehad met Chris van Weert, voorzitter van de Commissie vernieuwing natuurkundeonderwijs havo/vwo en Roel van Asselt, lid van de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO). In dit overleg is afgesproken dat de nieuwe werkgroep die aanbevelingen uit 2007 waar mogelijk en relevant van suggesties zou voorzien. Die suggesties zouden zich richten op twee groepen belanghebbenden: enerzijds op degenen die examenprogramma's en syllabi verder uitwerken, zoals docenten, auteurs en examenconstructeurs, anderzijds op de organisaties die de kaders voor die uitwerking stellen, zoals het College voor Toetsen en Examens (CvTE) en SLO. Het voor u liggende verslag van de werkgroep bevat deze suggesties, in de vorm van analyses en aanbevelingen bij een aantal thema's.

Aanbevelingen van de 2007-werkgroep die in dit stadium niet op zinvolle wijze konden worden uitgewerkt, blijven ook in dit nieuwe verslag gedocumenteerd, zodat zij de aandacht krijgen bij toekomstige herzieningen van examenprogramma's.

Werkwijze en leeswijzer

De SLO-werkgroep Afstemming wiskunde-natuurkunde tweede fase heeft de aanbevelingen van de Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde (2007) (Van de Giessen, 2007) als uitgangspunt van de opdracht gekozen. Nu de examenprogramma's wiskunde en natuurkunde zijn vastgesteld, is er gekeken welke aanbevelingen uit 2007 nog actueel zijn. In bijlage 1 zijn deze aanbevelingen in een werkschema weergegeven. Daarin is ook aangegeven welke thema's de SLO-werkgroep heeft opgepakt om verder uit te werken – voor deze thema's zijn nieuwe aanbevelingen opgesteld.

De werkgroep heeft acht thema’s uitgekozen die van belang zijn voor de samenhang tussen de beide vakken, en die op redelijke termijn realiseerbaar zijn in de uitwerkingen in leermiddelen, examenopgaven en lespraktijk. Het gaat om de volgende thema's:

1. rekenkundige en wiskundige vaardigheden in de onderbouw en bovenbouw
2. examenwerkwoorden
3. manipuleren van expressies
4. nauwkeurigheid en afronden
5. notaties
6. evenredigheid en verhoudingen
7. vectoren in de wiskunde en natuurkunde
8. hulpmiddelen

Bij elk van deze thema’s zijn aanbevelingen geformuleerd. Die zijn, samen met beknopte analyses, beschreven in hoofdstuk 2. Uitvoeriger analyses en suggesties voor alternatieven zijn in de bijlagen 2 tot en met 11 opgenomen.

Sommige aanbevelingen zijn voornamelijk bestemd voor docenten en lerarenopleiders die willen afstemmen met hun wiskunde- of natuurkunde-collega's, andere zijn vooral bestemd voor examenmakers of uitgevers, weer andere voor syllabus- of vernieuwingscommissies. De aanbevelingen na ieder thema staan nog eens apart vermeld in Hoofdstuk 3. Daarbij zijn ook steeds de voornaamste geadresseerden van de aanbeveling aangegeven.

In juni 2014 heeft de werkgroep een bijeenkomst georganiseerd met vertegenwoordigers van Cito, cTWO, CvTE, IOBT, NVON, NVvW en leden van de syllabuscommissies wiskunde en natuurkunde (zie bijlage 12). Tijdens deze bijeenkomst is een eerste versie van het verslag van deze werkgroep besproken. De werkgroep heeft dankbaar gebruik gemaakt van de resultaten van deze bijeenkomst.

Samenstelling van de werkgroep

Johan van de Konijnenberg, docent wis- en natuurkunde
Jos Paus, docent natuurkunde, SLO
Maarten Pieters, SLO
Kees Rijke, docent wiskunde
Wim Sonneveld, docent natuurkunde

2. Thema's

Voordat we hier de verschillende thema's aan de orde stellen wil de werkgroep wijzen op de diversiteit in leerlingpopulaties: met of zonder natuurkunde, met wiskunde A of met wiskunde B. Die diversiteit maakt afstemming lastig. Er kan niet zomaar van leerlingen affiniteit met het andere vak verwacht worden: wiskunde B-leerlingen zullen bij natuurkundige contexten een voorsprong hebben op wiskunde A-leerlingen, die op hun beurt meer ophebben met een vak als economie. Het is goed om bij de discussie over afstemming aandacht aan deze diversiteit te besteden.

Thema 1. Rekenkundige en wiskundige vaardigheden in de onder- en bovenbouw

In *Overzicht tussendoelen wiskunde havo en vwo* (Bos, Den Braber, Gademan, & Van Wijk, 2010) is door SLO en cTWO beschreven welk niveau leerlingen aan het eind van klas drie moeten hebben, met uitsplitsing naar havo en vwo en met aandacht voor de aansluiting op de uiteenlopende vervolgtrajecten wiskunde A, B of C. Hierbij is gebruik gemaakt van wettelijke kaders: kerndoelen van de onderbouw en de domeinen van het referentiekader rekenen.
De syllabi van zowel natuurkunde als wiskunde geven een overzicht van de rekenkundige en wiskundige vaardigheden.

In de syllabi van wiskunde havo en vwo is als bijlage een lijst opgenomen met begrippen die zonder nadere toelichting in examenvragen kunnen worden gebruikt. Deze begrippen komen in de bovenbouw aan de orde. Deze lijst is hier als bijlage 3 toegevoegd.

Als we kijken naar de S*yllabus natuurkunde* (subdomein A12) zien we wiskundige vaardigheden die bij natuurkunde nodig zijn:

Subdomein A12. Rekenkundige en wiskundige vaardigheden
Eindterm
De kandidaat kan een aantal voor de natuurkunde relevante rekenkundige en wiskundige vaardigheden correct en geroutineerd toepassen bij voor de natuurkunde specifieke probleemsituaties.

Sommige van deze vaardigheden worden in de onderbouw geleerd, andere in de bovenbouw. Tabel 1 geeft hiervan een overzicht. In de linker kolom staan de (wiskundige) vaardigheden die genoemd zijn in de syllabus voor natuurkunde. In de rechterkolom wordt soms verwezen naar de tussendoelen, soms naar vaardigheden die in de wiskundesyllabi zijn terug te vinden.

Tabel 1. *Vaardigheden*

Natuurkunde	**Wiskunde**
basisrekenvaardigheden uitvoeren:	
• rekenen met verhoudingen, procenten, breuken, machten en wortels	• algebraïsche vaardigheden • tussendoelen
• de omtrek en de oppervlakte berekenen van een cirkel, een driehoek en een rechthoek	• tussendoelen • meetkunde: bij havo wiskunde B
• de oppervlakte berekenen van een bol	komt in de syllabi niet voor
• het volume berekenen van een balk, een cilinder en een bol	• tussendoelen • meetkunde: bij havo wiskunde B
• *absolute waarde toepassen*	functies/verbanden: bij vwo wiskunde B
wiskundige technieken toepassen:	
• herleiden van formules	algebraïsche vaardigheden
• redeneren met evenredigheden (recht, omgekeerd, kwadratisch, omgekeerd kwadratisch)	• functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B • tussendoelen
• oplossen van lineaire en tweedegraads vergelijkingen	• functies/verbanden: lineaire vergelijkingen bij wiskunde A en wiskunde B, tweedegraads vergelijkingen bij wiskunde B • tussendoelen
• *oplossen van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden*[1]	• functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B • meetkunde: bij wiskunde B • tussendoelen
• *toepassen van log x, ln x,* e^{-ax}, e^{ax}, a^x, x^a, *sin x en cos x*	functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B, ln en e-macht alleen bij vwo
• toepassen van x^n (alleen havo)	functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B
• in een rechthoekige driehoek met twee zijdes of met één zijde en één hoek gegeven, de overige zijdes en hoeken uitrekenen, gebruik makend van sinus, cosinus, tangens en de stelling van Pythagoras	• meetkunde: bij wiskunde B • tussendoelen
• grafisch optellen en ontbinden van vectoren	meetkunde: bij vwo wiskunde B
• grafieken tekenen bij een meetserie	niet expliciet
• functievoorschriften opstellen van lineaire verbanden, *evenredige verbanden (recht, omgekeerd, kwadratisch, omgekeerd kwadratisch) en wortelverbanden*	functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B
• grafieken tekenen met behulp van een functievoorschrift	functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B
• aflezen van diagrammen, waaronder *logaritmische diagrammen, dubbel-logaritmische diagrammen en* diagrammen met asonderbrekingen	functies/verbanden: bij vwo wiskunde A
• interpoleren en extrapoleren in diagrammen en tabellen	• komt in de syllabi niet voor (niet gerelateerd aan diagrammen en tabellen) • tussendoelen

[1] Cursief komt alleen voor bij vwo

Natuurkunde	Wiskunde
• *differentiëren van lineaire en kwadratische functies, machtsfuncties, sinusfuncties en cosinusfuncties*	analyse: (co-)sinusfuncties alleen bij vwo wiskunde B
• tekenen van de raaklijn aan een kromme en de steilheid bepalen	analyse: bij wiskunde B en bij vwo wiskunde A
• de oppervlakte onder een grafiek bepalen	analyse: bij vwo wiskunde B
• *relaties van de vorm* $y = ax^2$, $y = ax^{-1}$, $y = ax^{-2}$ *en* $y = ax^{1/2}$ *door coördinatentransformatie weergeven als een rechte lijn door de oorsprong*	komt in de syllabi niet voor
berekeningen uitvoeren met bekende grootheden en relaties en daarbij de juiste formules en eenheden hanteren:	
• formules zoals vermeld bij de vakinhoudelijke subdomeinen	komt in de syllabi niet voor
• substitueren van formules	algebraïsche vaardigheden
• in natuurkundige formules eenheden afleiden en controleren	komt in de syllabi niet voor

Het is belangrijk dat docenten wiskunde en natuurkunde op de hoogte zijn van de wiskundige vaardigheden die bij natuurkunde nodig zijn zodat zij kunnen overleggen in welke lessen, op welke manier en wanneer deze vaardigheden aan de orde komen.
Deze tabel staat ook in bijlage 2. Daar is de tabel uitgebreid met een kolom 'aandachtspunten'.

Aanbeveling bestemd voor syllabuscommissies:

1. *Neem de bovenstaande tabel met wiskundige vaardigheden die bij natuurkunde nodig zijn op in de syllabi voor natuurkunde en wiskunde.*

Thema 2. Examenwerkwoorden

In de syllabi voor natuurkunde en wiskunde worden (CvTE, 2014) 'examenwerkwoorden' genoemd: werkwoorden die regelmatig voorkomen in de centrale examens. Deze werkwoorden hebben een speciale betekenis. Leerlingen moeten weten wat er van hen wordt verwacht als zij deze woorden tegenkomen.

De examenwerkwoorden maken niet altijd duidelijk op welk niveau leerlingen een bepaalde handeling moeten verrichten; het niveau is afhankelijk van de complexiteit van de onderliggende vraag.

In tabel 2 en tabel 3 staat het overzicht per vak van de verschillende examenwerkwoorden.

Examenwerkwoorden natuurkunde (bron: syllabi natuurkunde, 2014).
Deze woorden worden genoemd bij zowel havo als vwo.

Tabel 2. *Examenwerkwoorden natuurkunde*

Bereken	De kandidaat moet de waarde van een grootheid uitrekenen, uitgaande van gegevens in de vraag en/of uit andere informatiebronnen. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.
Bepaal	De kandidaat moet de waarde van een grootheid vaststellen en/of uitrekenen, uitgaande van gegevens in grafieken of figuren of door het maken van een constructie. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules en/of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.
Beredeneer, leg uit	De kandidaat moet gegevens uit de opgave combineren met natuurkundige kennis en een of meer denkstappen zetten om te komen tot hetgeen beredeneerd of uitgelegd moet worden. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke gegevens de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.
Noem, geef (aan), wat, welke, wanneer, hoeveel	De kandidaat kan volstaan met een (eind)antwoord, tenzij vermeld staat: ‘licht toe’. In dat geval moet de kandidaat aangeven hoe hij aan het antwoord is gekomen.
Toon aan / laat zien dat	De kandidaat moet laten zien dat een gegeven waarde en/of bewering correct is. Hij kan daarbij gebruik maken van berekeningen en/of redeneringen. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.
Toon aan / laat zien of	De kandidaat moet laten zien of een gegeven waarde en/of bewering correct is. Hij mag daarbij gebruik maken van berekeningen en/of redeneringen. Het antwoord wordt afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.

Leid af	De kandidaat moet van een formule (of eenheid) laten zien, dat deze volgt uit gegeven en/of bekende formules gebruik makend van wiskundige bewerkingen, zoals combineren, herschrijven en substitueren. Een getallenvoorbeeld volstaat niet bij het afleiden van een formule of een eenheid. Bij het afleiden van een formule volstaat bovendien een eenhedenbeschouwing niet.
Schets	De kandidaat moet door middel van een grafische voorstelling kenmerkende eigenschappen aangeven, zonder dat de waarden precies hoeven te kloppen.
Teken	De kandidaat moet door middel van een grafische voorstelling kenmerkende eigenschappen aangeven, waarbij de waarden precies moeten kloppen. In het correctievoorschrift wordt een marge voor deze waarden gegeven.
Construeer	De kandidaat moet door middel van een grafische voorstelling kenmerkende eigenschappen aangeven, waarbij de waarden precies moeten kloppen. In het correctievoorschrift wordt een marge voor deze waarden gegeven. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden e kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.
Schat	De kandidaat moet de waarde van een grootheid ongeveer aangeven, zonder de exacte waarde te bepalen. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.

Examenwerkwoorden wiskunde (bron: syllabi wiskunde, 2014)
Deze woorden worden genoemd bij zowel havo als vwo.

Tabel 3. *Examenwerkwoorden wiskunde*

	woord	**Toelichting**
1	aantonen	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
2	afleiden (van een formule)	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van een formule blijkt. In het algemeen geldt dat de formule controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
3	aflezen	Het antwoord is voldoende.
4	*algebraïsch* [2]	*Stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd worden.*
5	bepalen	De wijze waarop het antwoord gevonden wordt is vrij; een toelichting is vereist.
6	berekenen	De wijze van berekenen is vrij; een toelichting is vereist. De toevoeging „algebraïsch" of „exact" legt beperkingen op aan de wijze van berekenen.

[2] Cursief: alleen genoemd bij wiskunde B

7	beredeneren	Een redenering waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
8	*bewijzen*	*Een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.* *In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.*
9	*exact*	*Stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; de antwoorden mogen niet benaderd worden.*
10	herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven in een gelijkwaardige vorm.
11	onderzoeken	De aanpak is vrij, een toelichting is vereist. *De toevoeging „algebraïsch" of „exact" legt beperkingen op aan de wijze van onderzoeken*.
12	oplossen	De wijze van oplossen is vrij; een toelichting is vereist. *De toevoeging „algebraïsch" of „exact" legt beperkingen op aan de wijze van oplossen.*
13	schatten	De wijze van schatten is vrij; een toelichting is vereist.
14	schetsen van een grafiek	Een schets van een grafiek moet voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten.
15	tekenen van een grafiek	Een tekening van een grafiek moet, naast een assenstelsel met een schaalverdeling, de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten. De tekening van de grafiek moet nauwkeurig zijn.

De woorden 'algebraïsch' en 'exact' zijn een nadere specificering van de manier waarop de oplossing gevonden moet worden.

Sommige werkwoorden hebben bij natuurkunde en wiskunde een verschillende betekenis. Dat betekent dat de leerlingen andere handelingen moeten verrichten bij de verschillende vakken. Een voorbeeld hiervan is 'bepaal'. Bij wiskunde is de oplossingsmethode vrij, bij natuurkunde is het de bedoeling dat leerlingen gegevens halen uit een grafiek of figuur, of gebruik maken van een constructie.
Bij andere werkwoorden is er nauwelijks sprake van een verschil. Een voorbeeld hiervan is 'afleiden' (of 'leid af').

Het is voor leerlingen duidelijker als er met één gemeenschappelijke lijst van examenwerkwoorden gewerkt wordt. Dat hoeft niet te betekenen dat met deze woorden bij verschillende vakken precies dezelfde handeling wordt aangegeven. De verschillen kunnen in die lijst duidelijk gemaakt worden. Dit geeft leerlingen een beter zicht op wat er bij deze vakken van hen wordt verlangd. Deze lijst kan worden opgenomen in de syllabi voor wiskunde en natuurkunde.

In bijlage 4 zijn de twee bovenstaande tabellen naast elkaar gezet om de overeenkomsten en verschillen duidelijk te laten zien.

Aanbeveling bestemd voor syllabuscommissies:

2. *Leg de examenwerkwoorden die in de syllabi wiskunde en natuurkunde genoemd worden naast elkaar en maak daar één lijst van. Als er essentiële verschillen in het gebruik van de werkwoorden zijn, kunnen deze aangegeven worden.*

Thema 3. Manipuleren van expressies

In de natuurkunde moeten leerlingen relaties zo herschrijven dat de gevraagde grootheid links van het '=' - teken staat. Aan de rechterkant staat een uitdrukking waarin grootheden staan die gegeven zijn. Ook moeten vergelijkingen opgelost worden.

Tabel 4 geeft de meest voorkomende manipulaties met voorbeelden weer.

Tabel 4. *Manipulaties*

Activiteit	Voorbeelden wiskunde	Voorbeelden natuurkunde
Herleiden, vereenvoudigen, uitdrukken	Vereenvoudig $3(x-2)+5(4-x)$. Herleid $3e^{x-2}-5e^{x}$ tot ae^{x}. $y=\ln(x+2)$: druk x uit in y	Voor een valbeweging zonder beginsnelheid geldt: $x(t)=\frac{1}{2}\,g\,t^2$ en $v(t)=g\,t$ Herleid deze formules tot: $x(t)=\frac{1}{2}\,v(t)\cdot t$
Oplossen	Los op: $m^2-2m-8=0$.	*f* is de brandpuntsafstand van een lens. Los *f* op uit: $\frac{1}{f}=\frac{1}{12}+\frac{1}{36}$
Bewijzen	Bewijs: $(2a+b)^2-8ab=(2a-b)^2$ voor alle waarden van a en b.	Voor het aantal aanwezige kernen geldt: $N(t)=N(0)e^{-\lambda t}$ De activiteit *A(t)* is de afgeleide van deze functie. Toon aan dat: $A(t)=-\lambda\,N(t)$

De begrippen *herleiden*, *vereenvoudigen* en *omvormen* zijn niet synoniem, maar ook niet strikt gescheiden in betekenis. Alle drie komen ze neer op “anders schrijven”. Bij *herleiden* is het zelfs moeilijk om een specifiekere omschrijving te geven; meestal betreft het een vereenvoudiging, maar niet altijd. Bij *vereenvoudigen* zal het bij routineopgaven uit een leerboek meestal wel duidelijk zijn wat de bedoeling is, maar in het algemeen moet het doel genoemd of omschreven worden.

Het gelijkheidsteken en andere, vergelijkbare tekens.

Het gelijkheidsteken wordt vaak verkeerd gebruikt. Dat is niet zo verwonderlijk, want het gelijkheidsteken (gelijkteken, isgelijkteken) wordt gebruikt voor verschillende doeleinden. Tabel 5 geeft een overzicht van het gebruik van het '='-teken (is gelijk aan) en een aantal verwante symbolen.

Tabel 5. *Gebruik van symbolen*

Gebruik	**Voorbeeld**	**opmerking**
gelijke waarde	$2 + 2 = 4$	
definitie	$D = b^2 - 4ac$ $f(x) = 3x - 7$	Alternatieve notaties: $D := b^2 - 4ac$, $D \overset{\text{def}}{\equiv} b^2 - 4ac$.
toekenning	$x = 4$ of $x := 4$	In sommige programmeertalen wordt hiervoor ook ":=" gebruikt; men zegt dan "x wordt 4".
gelijk naar gelang situatie	$2x = 4$ is alleen waar als $x = 2$	De zogenaamde open bewering.
identiteit	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	Hiervoor gebruikt men ook "≡" (dus $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$).
veronderstelling	$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ met p en q geheel	Als $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dan volgt een tegenspraak.
is ongeveer gelijk	$\pi \approx 3{,}14$	
is evenredig met	omtrek ~ r	de omtrek van een cirkel is evenredig met de straal van de cirkel
komt overeen met	1 cm ≙ 5 N	bij het tekenen van krachten
is gelijkvormig met	$\Delta ABC \sim \Delta PQR$	driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek PQR
is congruent met	$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	driehoek ABC is congruent met driehoek PQR (dus gelijkvormig en even groot)

Voorbeelden van typische fouten:

$x = 2 \cdot 20 = 40 + 6 = 46$: het bekende breien

auto = 20 m/s : in plaats van: v_{auto} = 20 m/s

vraag a = l = 32 cm : gelijkheidsteken laten fungeren als dubbele punt

ijs = koud : "ijs is gelijk aan koud" is onzinnig

Aanbevelingen bestemd voor docenten en auteurs:

3. *Besteed in de onderbouw gestructureerd aandacht aan het vereenvoudigen, herleiden en omvormen van expressies. Een goede mogelijkheid daarvoor biedt het algebraïsch bewijzen van identiteiten. In de bovenbouw wordt hier in de nieuwe examenprogramma's al voldoende aandacht aan besteed.*

4. *Leg meer nadruk op de betekenis van het '=' -teken, zodat omvormen, oplossen van vergelijkingen en het bewijzen van identiteiten beter van elkaar onderscheiden worden.*

Thema 4. Nauwkeurigheid en afronden

Wiskunde en natuurkunde gaan verschillend om met gegevens die in een context genoemd worden. Bij natuurkundigen zijn gegevens bijna altijd het resultaat van metingen – en daarmee automatisch behept met een meetfout. Natuurkundigen schrijven in principe niet meer cijfers (decimalen) op dan waarover zij voldoende zekerheid hebben; niet bij het verrichten van metingen, en ook niet na verdere bewerkingen van de meetgegevens. Wiskundigen daarentegen definiëren vaak exacte probleemstellingen en ronden liever niet af als ze dat kunnen vermijden.

Leerlingen leren daardoor bij wiskunde en natuurkunde twee manieren om met gegevens om te gaan. Die twee manieren zijn feitelijk niet in strijd met elkaar, maar het kan toch voorkomen dat wat bij het ene vak volkomen correct is, bij het andere fout gerekend wordt. Bij wiskunde kan bijvoorbeeld van leerlingen verwacht worden dat ze sin(45°) schrijven als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Bij natuurkunde is de hoek van 45˚ ongetwijfeld afkomstig van een meting. Dat brengt mee dat sin(45°) moet worden afgerond op 0,71; een antwoord als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zou leiden tot puntenaftrek.

Bijlage 5 gaat verder in op nauwkeurigheid, notaties, absolute en relatieve fouten en hoe daar in de natuurkunde mee wordt omgegaan. Uiteindelijk komt het neer op een aantal ‘vuistregels' voor afronding na het uitvoeren van een aantal bewerkingen: optellen en aftrekken, delen en vermenigvuldigen, en het nemen van een logaritme.

De syllabus van natuurkunde havo en vwo (2016) zegt er het volgende over:

De kandidaat kan:
3. uitleggen wat bedoeld wordt met de significantie van meetwaarden en uitkomsten van berekeningen weergeven in het juiste aantal significante cijfers,

- *bij het optellen en aftrekken van meetwaarden wordt de uitkomst gegeven met evenveel decimalen als de gegeven meetwaarde met het kleinste aantal decimalen;*
- *bij het delen en vermenigvuldigen wordt de uitkomst gegeven in evenveel significante cijfers als de gegeven meetwaarde met het kleinste aantal significante cijfers;*
- *als de logaritme van een meetwaarde wordt genomen, krijgt het antwoord even veel decimalen als de meetwaarde significante cijfers heeft;*
- *gehele getallen die verkregen zijn door discrete objecten te tellen, vallen niet onder de regels van significante cijfers (dit geldt ook voor mathematische constanten en geldbedragen);*

Voor wiskundigen zijn de begrippen 'nauwkeurigheid' en ‘meetfout’ nauwelijks een issue. Het begrip 'nauwkeurigheid' komt wel in de syllabi voor, maar wordt niet nader omschreven.

In de syllabus van wiskunde A en B havo (2017), vwo (2018) staat:

2.1.2 Nauwkeurigheid en afronden
Als in een examenopgave niet vermeld is in welke nauwkeurigheid het antwoord gegeven dient te worden, dient de kandidaat die nauwkeurigheid uit de probleemsituatie af te leiden. Het kiezen van een passende maateenheid valt hieronder. Als de probleemsituatie dit toelaat, mag een nauwkeuriger antwoord gegeven worden dan de nauwkeurigheid die de kandidaat uit de probleemsituatie afgeleid zou kunnen hebben. Het correctievoorschrift geeft hier uitsluitsel over.
Een kandidaat kan uit de probleemsituatie afleiden wanneer afronden volgens de gebruikelijke afrondingsregels (6,4 wordt 6 en 6,5 wordt 7) niet van toepassing is.
Een kandidaat moet weten dat tussentijds afronden gevolgen kan hebben voor het eindantwoord en dient hiernaar te handelen.

A 3.11. De kandidaat kan antwoorden afronden op een voorgeschreven nauwkeurigheid dan wel op een nauwkeurigheid die past bij de probleemsituatie.

Een wiskundeleerling moet dus in principe zelf uit de probleemsituatie kunnen afleiden hoe nauwkeurig het antwoord moet zijn. Dat kan een probleem zijn, want het is niet omschreven hoe een leerling tot een verantwoorde afronding kan komen.
Het probleem kan vermeden worden door in wiskundeopgaven expliciet aan te geven hoe nauwkeurig het antwoord genoteerd dient te worden. Bijvoorbeeld: 'rond het antwoord af op een geheel aantal meters'.

De werkgroep vindt het niet opportuun om de strengere regels van de natuurkunde op te leggen aan wiskundeleerlingen. Wel is het belangrijk dat docenten op de hoogte zijn van en rekening houden met de manier waarop hun collega's met afronding omgaan.

Aanbeveling bestemd voor docenten, auteurs en examenmakers:

5. *Besteed in zowel natuurkunde als wiskundelessen aandacht aan het begrip nauwkeurigheid en aan de verschillen in interpretatie daarvan. Geef in wiskundeopgaven met een rijke context aan hoe het antwoord moet worden afgerond.*

Thema 5. Notaties

In contextrijke opgaven komen verschillende grootheden met de bijpassende eenheden voor. De manier waarop deze grootheden en eenheden worden genoteerd is niet altijd hetzelfde, zelfs niet binnen één vak. Schrijfwijzen als $F=m \cdot a$ met m in kilogram en $F=0{,}001 \cdot m \cdot a$ met m in gram komen voor.

De notaties $x(t)$ en x_t , $v(t)=x'(t)$ en $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ komen naast elkaar voor. De syllabuscommissies hebben hier uitvoerig over gesproken en hebben hier afspraken over gemaakt.

Bijlage 6 gaat uitgebreid in op het gebruik en de schrijfwijze van grootheden en eenheden, notaties in expressies en notaties bij grafieken.

In bijlage 7 staan notatieconventies voor de meest voorkomende natuurkundige grootheden en eenheden die (informeel) zijn afgesproken door uitgevers.

Aanbevelingen bestemd voor docenten, auteurs en examenmakers:

6. *Gebruik bij de notatie van grootheden, eenheden en symbolen dezelfde schrijfwijze, zowel in expressies als bij grafieken.*

7. *Gebruik in boeken en examenopgaven dezelfde typografie.*

Thema 6. Evenredigheid en verhoudingen

Evenredigheid en verhoudingen
Evenredigheid en verhouding spelen een belangrijke rol bij het vinden en vastleggen van verbanden in de natuurwetenschappen. Op school speelt evenredigheid een nadrukkelijke rol in natuur- en scheikunde , veel meer dan in wiskunde het geval is. De evenredigheidsconstante heeft bij natuur- en scheikunde ook vaak een specifieke naam die van de context afhangt (snelheid, geleidingsvermogen, veerconstante, warmtegeleidingscoëfficiënt, concentratie, enz.).

In de meetkunde komt evenredigheid aan de orde bij gelijkvormigheid, en bij oppervlakten en inhouden. Toch ligt er in wiskunde op school weinig nadruk op evenredigheid en omgekeerd-evenredigheid. Evenredigheid wordt in het Nomenclatuurrapport Wiskunde (NVvW, 2007) onder Analyse en Algebra genoemd, in de eindtermen komt het in breder verband voor bij '*verbanden*', en in het domein *'functies en grafieken'*.

Bijlage 9 gaat in op:
- het begrip 'evenredigheid' gezien vanuit de historische context;
- het begrip 'evenredigheid' als concept;
- de verhoudingstabel als didactisch hulpmiddel;
- vanuit het SALVO-materiaal: het 'per-getal';

Juist vanwege het veelvuldige gebruik van evenredigheden en verhoudingen binnen de vakken wiskunde en natuurkunde is het zinvol om het gebruik binnen de vakken op elkaar af te stemmen zodat leerlingen inzien dat deze begrippen in beide vakken dezelfde betekenis hebben. Soms gaat het om didactische afstemming, soms om afstemming op het conceptuele vlak.

In de natuurwetenschappelijke vakken worden tabellen vooral gebruikt voor het weergeven van metingen. In dergelijke meettabellen heeft elke grootheid zijn eigen kolom; bij elke nieuwe meting begint men dus op een nieuwe regel. In zo’n meettabel staat de onafhankelijke grootheid in de eerste kolom (links) en de afhankelijke grootheden daarnaast.
In wiskundemethoden komen we vooral functietabellen tegen. Deze worden meestal horizontaal weergegeven, met x in de bovenste rij. Daarnaast gebruikt men, zowel bij wiskunde als bij natuur- en scheikunde, verhoudingstabellen. Verhoudingstabellen worden soms ingezet als didactisch hulpmiddel en komen niet in alle methoden voor.

Aanbevelingen bestemd voor docenten en auteurs:

8. *Besteed bij wiskunde uitgebreider aandacht aan het begrip evenredigheid en laat de introductie en definitie van evenredigheid bij wiskunde en natuurkunde beter sporen. Het begrip evenredigheid moet bij wiskunde in hogere jaren regelmatig en functioneel terugkomen.*

9. *Maak bij de bètavakken uniform gebruik van meettabellen. Stem de vorm van een evenredigheidstabel of een functietabel af op het didactisch gebruik.*

10. *Noteer in meettabellen de gelijksoortige gegevens in kolommen met:*
    a. *de onafhankelijke grootheid links*
    b. *de naam van de grootheid boven de kolom met de eenheid tussen haakjes er achter*
    c. *de verhoudingsgrootheid (zo deze relevant is) in een aparte kolom*

Thema 7. Vectoren in de wiskunde en natuurkunde

Een vector in de natuurkunde is een grootheid die wordt gekenmerkt door een grootte en een richting; voorbeelden zijn snelheid $\vec{v}$ en kracht $\vec{F}$.
Een vector is in de wiskunde formeel gezien een ruimer begrip. Vectoren worden gedefinieerd in termen van een algebraïsche structuur, en fysische vectoren vormen slechts een deelverzameling van de objecten die aan die definitie voldoen.
Voor de middelbare school gaat het behandelen van die formaliteit veel te ver. Wel is het van belang te weten dat er een verschil van opvatting kan bestaan. Mogelijk worden vectoren door een wiskundige beschouwd als getalkolommetjes die aan bepaalde regels voor optellen en vermenigvuldigen voldoen, en door een natuurkundige als bijna tastbare pijlen.

In bijlage 10 wordt ingegaan op de verschillende bewerkingen die met vectoren kunnen worden uitgevoerd en hoe vectoren worden gerepresenteerd.
Het is een goede mogelijkheid om vectoren eerst bij wiskunde te behandelen en pas daarna bij natuurkunde te gebruiken. Binnen de school zal hierover afgestemd moeten worden.

Bij wiskunde D heeft de docent de vrijheid om het uitwendig product te behandelen en kan hij met zijn natuurkundecollega afspreken wanneer dat het beste past binnen de programma's van de wiskunde en natuurkunde.

Aanbeveling bestemd voor syllabuscommissie:

11. *Handhaaf het onderwerp vectoren in het examenprogramma voor vwo-wiskunde B.*

Aanbeveling bestemd voor docenten, auteurs en examenmakers:

12. *Gebruik voor de notatie van vectoren een letter met een pijl erboven, en bij het verder uitwerken de kolomnotatie:* $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

Aanbeveling bestemd voor docenten en auteurs:

13. *Overweeg om het uitwendig product bij wiskunde D te behandelen. Dat zal het inzicht van leerlingen in lorentzkracht en krachtmoment aanmerkelijk vergroten. In dat kader wil de werkgroep wijzen op de mogelijkheid om gebruik te maken van het krachtmoment als uitwendig product bij biofysica.*

Thema 8. Hulpmiddelen

Sinds bij de invoering van de nieuwe tweede fase in 1998 de grafische rekenmachine (GRM) zijn intrede deed in de bovenbouw van havo en vwo, is er discussie geweest over de voor- en nadelen van de mogelijkheden die deze biedt. Deze mogelijkheden liggen in de eerste instantie op het gebied van functieonderzoek en van kansrekening en statistiek. Een meer gedetailleerde omschrijving van die mogelijkheden is in bijlage 11 opgenomen.

Wetenschappelijke rekenmachines beschikken ook over een deel van deze functies, maar met de GRM gaat alles veel overzichtelijker en gemakkelijker. Bovendien biedt de grafische component van de GRM op het gebied van kansrekening ook geheel nieuwe mogelijkheden, namelijk in het plotten van kansverdelingsfuncties als functie van een invoervariabele.

Het is duidelijk dat de verschillen met een standaard wetenschappelijke rekenmachine zeer groot zijn, en dat deze verschillen zich vooral bij wiskunde (zowel A als B) manifesteren.

De werkgroep wil zich niet mengen in de discussie of de mogelijkheden van de GRM gezien moeten worden als een vloek of als een zegen**,** maar heeft wel in een ander opzicht een aanbeveling**.** Het gebruik van hulpmiddelen is in het verleden altijd afgestemd tussen wiskunde, natuurkunde en scheikunde. Het is dan ook opmerkelijk dat er bij de invoering van de vernieuwde examenprogramma's niet eenzelfde beleid is gevoerd met betrekking tot het gebruik van de GRM. De werkgroep signaleert hierover ook onbegrip en zelfs irritatie bij leerlingen en docenten. De werkgroep beveelt aan die eenheid van beleid te herstellen, en het gebruik van de GRM of bij alle exacte vakken toe te staan, of bij alle exacte vakken te verbieden.

Aanbeveling voor syllabuscommissies:

14. *Stem het gebruik van hulpmiddelen af voor de verwante vakken biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde.*

3. Overzicht aanbevelingen

In tabel 6 staan de aanbevelingen nogmaals vermeld, met een aanduiding voor wie de aanbevelingen met name bedoeld zijn:

- docenten, lerarenopleiders (doc)
- auteurs, uitgevers (aut)
- examenmakers (ex)
- syllabuscommissieleden (syl)

Tabel 6. *Overzicht aanbevelingen*

aanbeveling per thema	**vooral voor**
Thema 1. Rekenkundige en wiskundige vaardigheden in de onderbouw en bovenbouw	
1. Neem de bovenstaande tabel met wiskundige vaardigheden die bij natuurkunde nodig zijn op in de syllabi natuurkunde en wiskunde.	syl
Thema 2. Examenwerkwoorden.	
2. Leg de examenwerkwoorden die in de syllabi wiskunde en natuurkunde genoemd worden naast elkaar en maak daar één lijst van. Als er essentiële verschillen in het gebruik van de werkwoorden zijn, kunnen deze aangegeven worden.	syl
Thema 3. Manipuleren van expressies.	
3. Besteed in de onderbouw gestructureerd aandacht aan het vereenvoudigen, herleiden, omvormen van expressies. Een goede mogelijkheid daarvoor biedt het algebraïsch bewijzen van identiteiten. In de bovenbouw wordt hier in de nieuwe examenprogramma's al voldoende aandacht aan besteed.	doc, aut
4. Leg meer nadruk op de betekenis van het '='- teken, zodat omvormen, oplossen van vergelijkingen en het bewijzen van identiteiten beter van elkaar onderscheiden worden.	doc, aut
Thema 4. Nauwkeurigheid en afronden.	
5. Besteed in zowel de natuurkunde als wiskundelessen aandacht aan het begrip nauwkeurigheid en aan de verschillen van interpretatie daarvan. Geef in wiskundeopgaven met een rijke context aan hoe het antwoord moet worden afgerond.	doc, aut, ex

Thema 5. Notaties. *6. Gebruik bij de notatie van grootheden, eenheden en symbolen dezelfde schrijfwijze, zowel in expressies als bij grafieken.* *7. Gebruik in boeken en examenopgaven dezelfde typografie.*	 doc, aut, ex doc, aut, ex
Thema 6. Evenredigheid en verhoudingen. *8. Besteed bij wiskunde uitgebreider aandacht aan het begrip evenredigheid en laat de introductie en definitie van evenredigheid bij wiskunde en natuurkunde beter sporen. Het begrip evenredigheid moet bij wiskunde in hogere jaren regelmatig en functioneel terugkomen.* *9. Maak bij de bètavakken uniform gebruik van meettabellen. Stem de vorm van een evenredigheidstabel of een functietabel af op het didactisch gebruik.* *10. Noteer in meettabellen gelijksoortige gegevens in kolommen met:* *a. de onafhankelijke grootheid links* *b. de naam van de grootheid boven de kolom met de eenheid tussen haakjes er achter* *c. de verhoudingsgrootheid (zo deze relevant is) in een aparte kolom*	 doc, aut doc, aut doc, aut
Thema 7. Vectoren in de wiskunde en natuurkunde. *11. Handhaaf het onderwerp vectoren in het examenprogramma voor vwo-wiskunde B.* *12. Gebruik voor de notatie van vectoren een letter met een pijl erboven, en bij het verder uitwerken de kolomnotatie:* $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ *13. Overweeg om het uitwendig product bij wiskunde D te behandelen. Dat zou het inzicht van leerlingen in lorentzkracht en krachtmoment aanmerkelijk vergroten. In dat kader wil de werkgroep wijzen op de mogelijkheid om gebruik te maken van het krachtmoment als uitwendig product bij biofysica.*	 syl doc, aut, ex doc, aut
Thema 8. Hulpmiddelen. *14. Stem het gebruik van hulpmiddelen af voor de verwante vakken biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde.*	 Syl

Referenties

Bos, M., Braber, N. den, Gademan, J., & van Wijk, P. (2010*). Overzicht tussendoelen wiskunde havo en vwo: een beschrijving van de te verwerven kennis en vaardigheden.* Enschede: SLO.

Carson,S. (1999). *Physics in Mathematical Mood. Shaping the future 2*. London: Institute of Physics.

College voor Toetsen en Examens (2014). *Syllabus natuurkunde (2014).* Den Haag: CvTE.

College voor Toetsen en Examens (2014). *Syllabus wiskunde (2014).* Den Haag: CvTE.

College voor Toetsen en Examens (2014). *Syllabus wiskunde (2018)*. Den Haag: CvTE.

Dormolen, J. v. (1975). Vectoren in de wiskunde en in de natuurkunde. In: *Bundel Natuurkunde Wiskunde Conferentie 1975 te Noordwijkerhout* . Noordwijk: NWC.

Giessen, C, van de. Hengeveld, T., Kooij, H. van der, Rijke, K., & Sonneveld, W. (2007). *Eindverslag van Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde*. Utrecht: cTWO / NiNa.

Koolstra, G. (2013). Formules in wiskunde-examens. *Euclides, 89*(1)*.*

Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen (2008). *Over de drempels met rekenen : consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen.* Enschede: SLO.

NVvW. (2007). Nomenclatuurrapport. Nieuwerkerk a/d IJssel: NVvW.

Paus, J. (2013). *Handreiking schoolexamen natuurkunde havo/vwo : bij het examenprogramma geldig vanaf schooljaar 2013-2014.* Enschede: SLO.

SALVO. (n.d.). SALVO-materiaal. Opgehaald van http://www.fisme.uu.nl/salvo/lesmateriaal/index.php?ct=1

Valk, T. van der, Wijers, M., & Broekman, H. (2001). Achtergronden van verhoudingstabellen in wiskunde en natuurwetenschappen*. Nieuwe Wiskrant 20*(3)*,* 44-49.

Bijlagen

Bijlage 1 Werkschema 2014

Werkgroep afstemming wiskunde natuurkunde 2014
Uitwerkschema gebaseerd op aanbevelingen *Eindverslag Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde* (2007)

Aanbeveling	***nog relevant?***	***verwijzing***
Algemeen		
1. *bèta-afstemmings-document* Het vakjargon moet op elkaar worden afgestemd. Denk aan begrippen, notaties, synoniemen. Een nomenclatuur is zeer wenselijk. De werkgroep beveelt aan dat een bèta-afstemmings-document wordt ontworpen dat als uitgangspunt zal dienen voor lesmateriaal, gebruik in de klas en bij examens vanaf 2010. De werkgroep stelt voor dit document te doen ontwerpen door een nomenclatuurcommissie van wiskundigen en natuurkundigen in te stellen op gezamenlijk initiatief van NVvW en NVON.	ja	thema 1 thema 5
2. *syllabuscommissies* De curricula voor wiskunde en natuurkunde moeten op elkaar worden afgestemd en samenhang moet worden aangebracht. Met het oog op de gewenste en noodzakelijke afstemming beveelt de werkgroep aan om wiskunde te betrekken bij de beschrijving van de syllabi van natuurkunde en omgekeerd natuurkunde bij de syllabi van wiskunde. Dat zou bijvoorbeeld kunnen door een waarnemer van de kant van cTWO/NiNa of door advisering door (leden uit) de werkgroep afstemming wiskunde-natuurkunde.	ja	thema 2 thema 4
3. *profielcommissie* De werkgroep ondersteunt het in het recente ‘Ontwerpadvies’ van de profielcommissie NT & NG opgenomen advies om een permanente landelijke profielgroep te installeren. De opdracht van deze profielgroep is de samenhang te stimuleren en te bewaken. Daartoe dient deze profielgroep passende bevoegdheden te krijgen.	ja	-
4. *nascholing* Er moeten nascholingsprogramma’s ontwikkeld worden waarmee docenten deskundigheid gaan verwerven in het andere vak. Het is sterk aan te bevelen dat wiskunde- en natuurkundedocenten, liefst van dezelfde school en liefst gezamenlijk deze nascholing volgen. In die programma’s moet de nadruk liggen op de samenhang tussen de vakken.	ja	-

Aanbeveling	***nog relevant?***	***verwijzing***
Thema algebraïsche vaardigheden		
5. De visiedocumenten voor wiskunde en natuurkunde zoeken de start van lange leerlijnen voor algebraïsche en rekenkundige vaardigheden in de onderbouw van het vo. Gecijferdheid begint echter in de kleuterklassen van het po (of liever: nog eerder). Kinderen moeten van het begin af aan in het onderwijs gevormd worden met een grotere mate van gecijferdheid.	ja	thema 5
6. Een cruciale rol spelen de pabo's en de nascholingen voor leraren in het po (zoals verzorgd door het Freudenthal Instituut). Het is zeer gewenst om te streven naar een hoger niveau van gecijferdheid bij (aanstaande) leraren. Tot de middelen daartoe behoren de rekentoetsen op de pabo's. De gecijferdheids-lat zou daarbij hoger gelegd moeten worden.	ja	thema 5
7. Zoek mogelijkheden in de media (Teleac, …), het volwassenenonderwijs, de volksuniversiteiten, enz. om de gecijferdheid in Nederland te vergroten. Alfabetisering wordt in Nederland sterk gestimuleerd en gesubsidieerd; dat zou ook moeten gebeuren met de bestrijding van ongecijferdheid.	ja	-
8. In de nieuwe wiskunde- en natuurkundeprogramma's moet significantie een duidelijke plaats krijgen, al vanaf de onderbouw van het vo. Het gaat dan over het omgaan met nauwkeurigheid van getallen, meetfouten, aantal significante cijfers en tolerantie.	ja	thema 4
9. Naast examenprogramma's moeten in syllabi eenduidige afspraken gemaakt worden over de notatie van bewerkingen en de voorrangsregels. En die moeten nadrukkelijker onderwezen worden vanaf het basisonderwijs.	ja	thema 5
10. Leerlingen en leraren moeten de juiste benamingen leren gebruiken voor de bewerkingen. Wij denken (behalve aan de in het bovenstaande genoemde bewerkingen) ook aan: plus (niet: "en" of "erbij"), min (niet: "eraf"), maal (niet: "keer"), gedeeld door, tot de macht. En ook aan: term, som, verschil, factor, product, quotiënt, macht, grondtal, exponent.	ja	thema 5
11. Meer inzicht in het gebruik en de betekenis van het 10-tallig stelsel is zeer gewenst. Dit ook in verband gezien met het metrieke stelsel. Daarin is het rekenen met machten van 10 zeer belangrijk (denk aan milli-, deci-, kilo-…).	ja	thema 1
12. De werkgroep beveelt aan om meer eenheid te brengen in de schrijfwijze van getallen en het gebruik van bewerkingstekens.	ja	thema 5
13. Er moet meer aandacht komen in het (wiskunde-)onderwijs voor betekenis en gebruik van letters in expressies. Ook moet er een helder onderscheid gemaakt worden tussen de verschillende soorten van expressies. Het gaat om het vergroten van de symbol sense.	ja	thema 5
14. De werkgroep beveelt aan om gestructureerd meer aandacht in de onderbouw te besteden aan het vereenvoudigen, herleiden, omvormen van expressies. Een goede mogelijkheid daarvoor biedt het bewijzen in een algebraïsche context.	ja	thema 3
15. Het is zeer gewenst om meer nadruk te leggen op de betekenis van het is-gelijk-teken, zodat omvormen, oplossen van vergelijkingen en het bewijzen van identiteiten beter onderscheiden worden. Daarbij moet ook aandacht zijn voor het juiste gebruik van implicaties en equivalenties.	ja	thema 5

Aanbeveling	***nog relevant?***	***verwijzing***
Thema evenredigheid		
16. De werkgroep beveelt aan om bij wiskunde uitgebreider aandacht aan het begrip evenredigheid te besteden en de introductie en definitie van evenredigheid bij wiskunde en natuurkunde te laten sporen. Daartoe moeten diverse vormen van evenredigheid bij wiskunde opgenomen zijn in natuurkundige contexten en moet het begrip in hogere jaren regelmatig en functioneel terugkomen.	ja	thema 6
17. De verhoudingstabel is een belangrijk didactisch middel. De werkgroep beveelt aan om te komen tot een uniform gebruik bij diverse bètavakken. Belangrijke aandachtspunten daarbij zijn: ▪ eenheden omrekenen in een verhoudingstabel ▪ niet afronden in een verhoudingstabel ▪ correspondentie tussen boven en onder in de tabel en boven en onder in de formule ▪ labeling met eenheden en zichtbaar maken van de verhoudingsgrootheid	ja	thema 6
Thema vectoren		
18. Vectoren zijn uit het zicht van wiskunde geraakt maar horen daar weer terug te komen. Rond het thema vectoren moeten nog beslissingen over de opname in domeinen genomen worden. Het lijkt zeer verstandig dat in samenspraak met natuurkunde te doen evenals het aanbrengen van een fasering in de leerlijn bij beide vakken. De werkgroep beveelt aan voor de notatie een letter met pijl erboven te gebruiken en geen indices in de kentallen. Het uitproduct lijkt de werkgroep voor wiskunde B te veel gevraagd, mogelijk is dit wel bij wiskunde D in te voeren.	ja	thema 7
Thema grafieken/diagrammen		
19. De werkgroep beveelt aan dat bij alle bètavakken in het algemeen en bij natuurkunde en wiskunde in het bijzonder op eenzelfde manier met grafieken wordt omgegaan. Daartoe is volgens de werkgroep in ieder geval nodig: ▪ Het over en weer kennen van het taalgebruik. ▪ Nadrukkelijke aandacht bij wiskunde voor de verwerking van meetresultaten in grafieken. Daarbij dient rekening te worden gehouden met de afspraken die bij de natuurkunde gelden. ▪ Nadrukkelijke en afgestemde aandacht in beide vakken voor het analyseren en interpreteren van grafieken. ▪ Het leren van verschillende standaardverbanden, zoals weergegeven in bijlage 3.	ja	thema 3

Aanbeveling	***nog relevant?***	***verwijzing***
4.5 Thema afgeleide		
20. De werkgroep beveelt aan om het aantal vaktermen zo klein mogelijk te houden. Zo kunnen bijvoorbeeld aan het begin van het onderwijs in de differentiaalrekening de begrippen differentiaal en differentiaalquotiënt worden gemist. Wiskundig gezien zijn differentialen immers geen eenvoudige begrippen. In de natuurkunde moet dan wel een helder onderscheid gemaakt worden tussen “toenames volgens de grafiek” en “toenames volgens de raaklijn”.	ja / twijfel	-
21. Het limietbegrip speelt een belangrijke rol bij het bepalen van de afgeleide. De werkgroep bepleit niet het herinvoeren van een uitgebreide limiet-cultuur, maar wel aandacht voor het onmisbare concept dat gebruikt wordt bij de analytische aanpak ($h \to 0$ of $\Delta t \to 0$) en in wezen ook bij de grafische aanpak (snijlijn wordt raaklijn).	ja	-
22. De werkgroep beveelt aan om ook bij natuurkunde weer gebruik te maken van de regels voor het differentiëren. Het zal de samenhang tussen de vakken versterken.	ja	-
23. Het begrip richtingscoëfficiënt is een typisch wiskundig begrip. Het is alleen goed hanteerbaar in “dimensieloze” grafieken met gelijke schaalverdelingen op de assen. De werkgroep beveelt aan te spreken over steilheid van de raaklijn of van de grafiek in een bepaald punt.	ja	-
24. De werkgroep beveelt aan om al in klas 4 de beginselen van de integraalrekening te onderwijzen. Het is op dat moment niet nodig het wiskundige notatiesysteem voor integralen te gebruiken. Wat de achtergrond van het integraalteken is en van de differentiaal (en dan nog wel een differentiaal in z’n eentje) kan later in het wiskundeonderwijs worden besproken. In het rapport “Rijk aan betekenis” van de cTWO (pag. 14) wordt geadviseerd het onderwijs in de integraalrekening te starten in klas 5 vwo. Gezien het bovenstaande stelt de werkgroep voor de eerste beginselen hiervan al in de leerstof voor klas 4 vwo op te nemen.	ja / twijfel	-
Thema modelleren		
25. Modelleren moet bij wiskunde, in samenwerking met andere exacte vakken, expliciet aandacht krijgen. Kernthema’s zijn het representeren van processen of situaties door schema’s en/of formules, het op eigen initiatief kiezen van passende variabelen, het redeneren aan de hand van formules en schema’s.	ja	-

Bijlage 2 Wiskunde nodig bij natuurkunde

Bron: Syllabi natuurkunde (Syllabi natuurkunde, 2014) subdomein A12, (laatste kolom toegevoegd).

Natuurkunde	**Wiskunde**	**Aandachtspunten**
basisrekenvaardigheden uitvoeren:		
• rekenen met verhoudingen, procenten, breuken, machten en wortels;	• algebraïsche vaardigheden • tussendoelen	
• de omtrek en de oppervlakte berekenen van een cirkel, een driehoek en een rechthoek;	• tussendoelen • meetkunde: bij havo wiskunde B	
• de oppervlakte berekenen van een bol;	komt in de syllabi niet voor	bij natuurkunde expliciet aandacht aan besteden
• het volume berekenen van een balk, een cilinder en een bol;	• tussendoelen • meetkunde: bij havo wiskunde B	
• *absolute waarde toepassen;*[3]	functies/verbanden: bij vwo wiskunde B	dus niet bij wiskunde A, bij natuurkunde expliciet aandacht aan besteden
wiskundige technieken toepassen:		
• herleiden van formules;	algebraïsche vaardigheden	het omschrijven van formules komt vaker voor in de natuurkunde. Dan ook expliciet aandacht aan besteden
• redeneren met evenredigheden (recht, omgekeerd, kwadratisch, omgekeerd kwadratisch);	• functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B • tussendoelen	

[3] Cursief komt alleen voor bij vwo

• oplossen van lineaire en tweedegraads vergelijkingen;	• functies/verbanden: lineaire vergelijkingen bij wiskunde A en wiskunde B, tweedegraads vergelijkingen bij wiskunde B • tussendoelen	verschil wiskunde A en wiskunde B
• *oplossen van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden;*	• functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B • meetkunde: bij wiskunde B • tussendoelen	
• *toepassen van log x, ln x,* e^{-ax}, e^{ax}, a^x, x^a, *sin x en cos x;*	functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B, ln en e-macht alleen bij vwo	belangrijk verschil wiskunde A en wiskunde B verschil havo-vwo
• toepassen van x^n (alleen havo)	functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B	
• in een rechthoekige driehoek met twee zijdes of met één zijde en één hoek gegeven, de overige zijdes en hoeken uitrekenen, gebruik makend van sinus, cosinus, tangens en de stelling van Pythagoras;	• meetkunde: bij wiskunde B • tussendoelen	
• grafisch optellen en ontbinden van vectoren;	meetkunde: bij vwo wiskunde B	
• grafieken tekenen bij een meetserie;	niet expliciet	bij na aandacht aan besteden
• functievoorschriften opstellen van lineaire verbanden, *evenredige verbanden (recht, omgekeerd, kwadratisch, omgekeerd kwadratisch) en wortelverbanden;*	functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B	verschil havo-vwo
• grafieken tekenen met behulp van een functievoorschrift;	functies/verbanden: bij wiskunde A en wiskunde B	

• aflezen van diagrammen, waaronder *logaritmische diagrammen, dubbel-logaritmische diagrammen en* diagrammen met asonderbrekingen;	functies/verbanden: bij vwo wiskunde A	verschil havo-vwo en wiskunde A-wiskunde B
• interpoleren en extrapoleren in diagrammen en tabellen; • *differentiëren van lineaire en kwadratische functies, machtsfuncties, sinusfuncties en cosinusfuncties;*	• komt in de syllabi niet voor (niet gerelateerd aan diagrammen en tabellen) • tussendoelen analyse: (co-)sinusfuncties alleen bij vwo wiskunde B	 synchroniteit: komt bij wiskunde vaak later aan de orde
• tekenen van de raaklijn aan een kromme en de steilheid bepalen;	analyse: bij wiskunde B en bijvwo wiskunde A	synchroniteit: komt bij wiskunde vaak later aan de orde
• de oppervlakte onder een grafiek bepalen;	analyse: bij vwo wiskunde B	synchroniteit: komt bij wiskunde vaak later aan de orde
• *relaties van de vorm* $y = ax^2$, $y = ax^{-1}$, $y = ax^{-2}$ *en* $y = ax^{1/2}$ *door coördinatentransformatie weergeven als een rechte lijn door de oorsprong;*	komt in de syllabi niet voor	verschil havo-vwo
berekeningen uitvoeren met bekende grootheden en relaties en daarbij de juiste formules en eenheden hanteren:		
• formules zoals vermeld bij de vakinhoudelijke subdomeinen;	komt nergens voor	
• substitueren van formules;	algebraïsche vaardigheden	
• in natuurkundige formules eenheden afleiden en controleren.	komt in de syllabi niet voor	bij na expliciet aandacht aan besteden

Bijlage 3 Begrippenlijst

Bron: syllabi wiskunde havo, vwo (CvTE, 2018)

De in deze lijst opgenomen begrippen worden bij de kandidaten van het betreffende centraal examen wiskunde bekend verondersteld. Zij kunnen zonder nadere toelichting in examenvragen worden gebruikt.
In deze lijst zijn die wiskundige begrippen opgenoemd die vermeld zijn onder de parate kennis bij de specificaties of voortvloeien uit de parate en productieve vaardigheden.
Deze lijst met begrippen is niet uitputtend. Zo zijn begrippen die als voorkennis worden beschouwd, niet opgenomen.
Bij de *standaardfuncties* moet de kandidaat de *karakteristieke* eigenschappen kennen.
Bij wiskunde A havo en wiskunde C vwo wordt in het examen niet over ‘functies’ maar over ‘verbanden’ gesproken, de functienotaties $x \rightarrow$ …. of $f(x)=$ … worden hier ook niet gebruikt.
In onderstaande tabel dient voor wiskunde A havo en wiskunde C vwo dan ook overal voor ‘functies’ ‘verbanden’ te worden gelezen.

		havo		Vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
functies/verbanden	variabele	x	x	x	x	x
	grootheid, eenheid		x			x
	absoluut, relatief	x		x		
	karakteristieke eigenschappen van een functie		x			x
	domein		x			x
	bereik		x			x
	nulpunt		x			x
	extreem, extreme waarde		x		x	x
	maximum(waarde)	x	x	x	x	x
	minimum(waarde)	x	x	x	x	x
	(constant, toenemend of afnemend) stijgen	x	x	x	x	x
	(constant, toenemend of afnemend) dalen	x	x	x	x	x
	karakteristieke eigenschappen van een grafiek		x			x
	snijpunt(en) met *x*- en *y*-as	x	x	x	x	x
	top		x	x	x	x
	buigpunt					x
	symmetrie		x			x
	asymptotisch gedrag		x	x[1]	x[1]	x
	verticale en horizontale asymptoot		x			x[2]
	scheve asymptoot					x[2]
	standaardfuncties	x	x		x	x

	lineaire of eerstegraadsfuncties	x	x	x	x	x
	richtingscoëfficiënt	x	x	x	x	x
	kwadratische of tweedegraads functies		x	x	x	x
	parabool		x			x
	machtsfuncties		x	x	x	x
	wortelfuncties		x			x
	exponentiële functies	x	x	x	x	x
	grondtal	x	x		x	x
	exponent	x	x	x	x	x
	beginwaarde	x	x	x	x	x
	groeifactor	x	x	x	x	x
	groeipercentage	x	x	x	x	x
	halveringstijd	x	x	x	x	x
	verdubbelingstijd	x	x	x	x	x
	logaritmische functies		x	x	x	x
	logaritme		x	x	x	x
	natuurlijke logaritme				x	x
	logaritmische schaalverdeling	x	x	x	x	x
	goniometrische functies		x		x[3]	x
	sinusoïde		x			x
	radiaal		x			x
	periodiek verschijnsel			x		
	periode		x	x	x	x
	amplitude		x	x	x	x
	evenwichtsstand		x		x	x
	evenwichtswaarde			x		
	sinusmodel					x
	harmonische trilling					x
	som-, verschil en verdubbelingsformules					x
	gebroken lineaire functies		x			x
	hyperbool		x			x
	absolute-waarde-functies					x
	vergelijkingen en ongelijkheden	x	x	x	x	x
	lineaire of eerstegraadsvergelijking	x	x	x	x	x
	kwadratische of tweedegraadsvergelijking		x			x
	abc-formule		x			x
	(lineair) interpoleren en extrapoleren	x		x	x	
	trend			x		
	somfunctie		x	x[4]	x[4]	x
	verschilfunctie		x	x[4]	x[4]	x
	productfunctie			x[4]	x[4]	x
	quotiëntfunctie			x[4]	x[4]	x
	samengestelde functie, ketting van functies		x	x[4]	x[4]	x
	inverse functie		x[4]			x
	transformaties		x			x
	translatie		x			x

	verschuiving				x	
	vermenigvuldiging t.o.v. *x*-as of *y*-as		x			x
	herschalen				x	
	evenredigheidsverbanden	x	x	x	x	x
	recht evenredig, evenredig	x	x	x	x	x
	omgekeerd evenredig	x	x	x	x	x
	evenredig met een macht		x			x
	evenredigheidsconstante		x			x
	limieten					x
	linker- en rechterlimiet					x
	perforatie					x
	parameter					x
meetkunde	aanzicht			x		
	perspectieftekening			x		
	éénpuntsperspectief			x		
	tweepuntsperspectief			x		
	horizon			x		
	verdwijnpunt			x		
	oogpunt			x		
	vergrotingsfactor			x		
	afstand		x	x		x
	omschreven cirkel					x
	regelmatige veelhoek			x		
	stelling van Pythagoras		x	x		x
	gelijkvormigheid		x	x		x
	symmetrie			x		
	gulden snede			x		
	goniometrische verhoudingen		x			x
	sinusregel en cosinusregel		x			x
	vergelijking van een lijn	x	x		x	x
	vergelijking van een cirkel		x			x
	stelsel vergelijkingen		x			x
	strijdig stelsel					x
	afhankelijk stelsel					x
	parametervoorstelling van een lijn					x
	parametervoorstelling van een cirkel					x
	vector					x
	lengte, richtingshoek, kentallen, componenten van een vector					x
	inproduct van twee vectoren					x
	vectorvoorstelling van een lijn, steunvector, richtingsvector					x
veranderingen	interval		x	x	x	x
	intervalnotaties		x			x
	de Δ-notatie voor een differentie		x			x
	differentiequotiënt		x		x	x

	gemiddelde verandering			x	x	
	toenamediagram		x		x	x
	helling		x	x	x	x
	steilheid		x			x
	hellinggrafiek				x	
	rijen, inclusief notaties			x	x	
	rekenkundige rij				x	
	meetkundige rij				x	
	somrij				x	
	∑-teken				x	
	directe formule			x	x	
	recursieve formule			x	x	
differentiaal- en integraalrekening	afgeleide (functie), inclusief notaties		x		x	x
	tweede afgeleide, inclusief notaties					x
	somregel en verschilregel		x		x	x
	productregel				x	x
	quotiëntregel				x	x
	kettingregel		x		x	x
	raaklijn		x		x	x
	integraal, integrand, primitieve					x
	omwentelingslichaam					x
	baansnelheid, baanversnelling					x
statistiek	betrouwbaarheid, betrouwbaarheidsinterval	x				
	centrummaat, centrum	x				
	gemiddelde	x				
	mediaan	x				
	modus, modaal	x				
	data	x				
	discreet	x				
	continu	x				
	kwantitatief	x				
	kwalitatief	x				
	nominaal	x				
	ordinaal	x				
	absoluut	x				
	relatief	x				
	frequentie	x				
	groepen	x				
	kenmerk	x				
	klasse, klassenindeling	x				
	verdeling	x				
	klokvormig	x				
	meertoppig	x				
	uniform	x				
	scheef	x				

	staart	x				
	uitschieter	x				
	normale verdeling	x				
	de drie vuistregels van de normale verdeling	x				
	populatie	x				
	populatiegemiddelde	x				
	populatieproportie	x				
	representatie / presentatie	x				
	dotplot	x				
	staafdiagram	x				
	cirkeldiagram	x				
	steelbladdiagram	x				
	lijndiagram	x				
	(cumulatief / relatief) frequentiepolygoon	x				
	boxplot	x				
	(cumulatieve) frequentietabel	x				
	kruistabel	x				
	puntenwolk, spreidingsdiagram	x				
	spreidingsmaat, spreiding	x				
	interkwartielafstand	x				
	standaardafwijking	x				
	spreidingsbreedte	x				
	steekproef	x				
	aselect	x				
	representatief	x				
	steekproefomvang	x				
	steekproevenverdeling	x				
	steekproefgemiddelde	x				
	steekproefproportie	x				
combinatoriek	boomdiagram			x	x	
	wegendiagram			x	x	
	rooster			x	x	
	permutaties			x	x	
	combinaties			x	x	
	driehoek van Pascal			x		
logisch redeneren	Venn-diagram			x		
	contradictie			x		
	paradox			x		
	als-dan-redenering			x		
	hier-uit-volgt-conclusie			x		
	tegenvoorbeeld			x		

1 Deze begrippen ook in relatie met limieten
2 Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten
3 Alleen de sinusfunctie
4 Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

Bijlage 4 Examenwerkwoorden

Tabel: Vergelijking definities van examenwerkwoorden bij natuurkunde en wiskunde.

Bij wiskunde een enkele keer ook een bijvoeglijk naamwoord. De woorden in de natuurkundesyllabi zijn in de gebiedende wijs gesteld ("bepaal"), maar hebben hier omwille van de leesbaarheid dezelfde vorm als bij wiskunde gekregen, de onbepaalde wijs ("bepalen"). Cursief genoemde werkwoorden worden alleen bij wiskunde B genoemd (niet bij wiskunde A en/of C)

woord	**betekenis bij natuurkunde**	**betekenis bij wiskunde**
Berekenen	De kandidaat moet de waarde van een grootheid uitrekenen, uitgaande van gegevens in de vraag en/of uit andere informatiebronnen. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.	De wijze van berekenen is vrij; een toelichting is vereist. De toevoeging „algebraïsch" of „exact" legt beperkingen op aan de wijze van berekenen.
Algebraïsch[4]		*Stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd worden.*
Exact		*Stap voor stap, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; de antwoorden mogen niet benaderd worden.*

[4] Cursief genoemde (werk)woorden worden alleen bij wiskunde B genoemd

woord	betekenis bij natuurkunde	betekenis bij wiskunde
Bepalen	De kandidaat moet de waarde van een grootheid vaststellen en/of uitrekenen, uitgaande van gegevens in grafieken of figuren of door het maken van een constructie. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules en/of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.	De wijze waarop het antwoord gevonden wordt is vrij; een toelichting is vereist.
Beredeneren, (alleen bij natuurkunde) uitleggen	De kandidaat moet gegevens uit de opgave combineren met natuurkundige kennis en een of meer denkstappen zetten om te komen tot hetgeen beredeneerd of uitgelegd moet worden. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke gegevens de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.	Een redenering waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	De kandidaat kan volstaan met een (eind)antwoord, tenzij vermeld staat: ‘licht toe’. In dat geval moet de kandidaat aangeven hoe hij aan het antwoord is gekomen.	
Aantonen, laten zien dat (onderscheid tussen aantonen *dat* en aantonen *of* alleen bij natuurkunde)	De kandidaat moet laten zien dat een gegeven waarde en/of bewering correct is. Hij kan daarbij gebruik maken van berekeningen en/of redeneringen. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Afleiden (bij wiskunde: alleen van een formule)	De kandidaat moet van een formule (of eenheid) laten zien, dat deze volgt uit gegeven en/of bekende formules gebruik makend van wiskundige bewerkingen, zoals combineren, herschrijven en substitueren. Een getallenvoorbeeld volstaat niet bij het afleiden van een formule of een eenheid. Bij het afleiden van een formule volstaat bovendien een eenhedenbeschouwing niet.	Een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van een formule blijkt. In het algemeen geldt dat de formule controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.

woord	betekenis bij natuurkunde	betekenis bij wiskunde
Schetsen (bij wiskunde: alleen van een grafiek)	De kandidaat moet door middel van een grafische voorstelling kenmerkende eigenschappen aangeven, zonder dat de waarden precies hoeven te kloppen.	Een schets van een grafiek moet voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten.
Tekenen (bij wiskunde: alleen van een grafiek)	De kandidaat moet door middel van een grafische voorstelling kenmerkende eigenschappen aangeven, waarbij de waarden precies moeten kloppen. In het correctievoorschrift wordt een marge voor deze waarden gegeven.	Een tekening van een grafiek moet, naast een assenstelsel met een schaalverdeling, de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen van de grafiek bevatten. De tekening van de grafiek moet nauwkeurig zijn.
Construeren	De kandidaat moet door middel van een grafische voorstelling kenmerkende eigenschappen aangeven, waarbij de waarden precies moeten kloppen. In het correctievoorschrift wordt een marge voor deze waarden gegeven. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.	
Schatten	De kandidaat moet de waarde van een grootheid ongeveer aangeven, zonder de exacte waarde te bepalen. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.	De wijze van schatten is vrij; een toelichting is vereist.
Aflezen		Het antwoord is voldoende.
Bewijzen		*Een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.* *In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.*
Herleiden (van een formule)		Een formule stap voor stap herschrijven in een gelijkwaardige vorm.

woord	betekenis bij natuurkunde	betekenis bij wiskunde
Onderzoeken		De aanpak is vrij, een toelichting is vereist. De toevoeging „algebraïsch‟ of „exact‟ legt beperkingen op aan de wijze van onderzoeken.
Oplossen		De wijze van oplossen is vrij; een toelichting is vereist. De toevoeging „algebraïsch‟ of „exact‟ legt beperkingen op aan de wijze van oplossen.

Bijlage 5 Nauwkeurigheid en afronden

Meetfouten
In wiskunde werkt men doorgaans met exacte getallen: 2π, $\sqrt{5}$, ${}^2\log 3$. Ook in natuurwetenschappelijke vakken komen exacte getallen voor, maar alleen in formules. Zodra er metingen worden verricht is het afgelopen met de exactheid. Elke meting is namelijk behept met een onnauwkeurigheid. Die onnauwkeurigheid noemt men de meetfout of kortweg de fout. De aanwezigheid van een meetfout wil dus niet zeggen dat er iets mis is; elke meting – hoe nauwkeurig ook – heeft een meetfout.
Stel bijvoorbeeld dat een fysicus op een weegschaal afleest dat zijn massa 66,3 kg is, en daarbij inschat dat het ook wel 0,2 kg meer of minder zou kunnen zijn, dan schrijft hij:
m = 66,3 ± 0,2 kg. Het is duidelijk dat hij hiermee bedoelt dat m tussen de 66,1 en 66,5 kg ligt. Het symbool “±” heeft hier dus niet de betekenis "plusminus" maar "plus of min".

Er zijn drie varianten van de fout:

- De absolute fout is de afwijking die een gemeten waarde kan hebben van de werkelijke waarde. De absolute fout is per definitie positief. In het voorbeeld is de absolute fout dus 0,2 kg.
  Merk op dat er staat: *kan* hebben. De absolute fout wordt soms gedefinieerd als het verschil tussen de gemeten waarde en de werkelijke waarde, dus als de afwijking die een gemeten waarde *werkelijk heeft*. Dat is ten onrechte. De absolute fout is bedoeld om een marge aan te geven. Meer kunnen we ook niet doen, want de werkelijke waarde van de gemeten grootheid is in principe niet bekend.
- De relatieve fout is de absolute fout gedeeld door de gemeten waarde, (dus 0,2 kg/66,3 kg in het voorbeeld). De relatieve fout is, in tegenstelling tot de absolute fout, een maatstaf voor de nauwkeurigheid van de meting.
- De procentuele fout is de relatieve fout vermenigvuldigd met 100%.

In de praktijk is de absolute meetfout vaak niet meer dan een ruwe schatting. Het is dan ook vrijwel altijd onjuist om een fout heel nauwkeurig op te geven, en niemand zal de slanke fysicus van onkunde betichten als zijn werkelijke massa na een nauwkeuriger meting dichter bij de 66,6 kg blijkt te liggen.

Als er van dezelfde grootheid een groot aantal metingen wordt verricht komen we op het terrein van normale verdelingen, standaardafwijkingen en de $\sqrt{N}$-wet. Om die reden is het eigenlijk beter om de absolute fout in te voeren als een standaardafwijking, maar dat valt op het voortgezet onderwijs buiten het natuurkundecurriculum.

Decimale notatie, afronding
In de ideale wereld van de natuurkundigen zou de natuurkundige eigenlijk:

1. bij elke meting (dus ook bij gegevens van opgaven) de absolute of relatieve fout moeten vermelden;
2. bij elke daaruit berekende waarde ook de absolute of relatieve fout moeten berekenen en vermelden.

Voor de meeste toepassingen is dit veel te omslachtig. Het is ook niet de manier waarop we er in het voortgezet onderwijs mee omgaan. In plaats daarvan hanteren we bepaalde regels voor het afronden van getallen.
Om te beginnen schrijven we elke gemeten waarde met een decimaal getal. Daarbij accepteren we dat het laatste cijfer niet helemaal betrouwbaar is. Als we dus 66,3 kg schrijven, bedoelen we dat de "werkelijke waarde" waarschijnlijk tussen de 66,25 en 66,35 ligt.
Het is ook toegestaan om een macht van 10 toe te voegen en bijvoorbeeld $6{,}63 \cdot 10^1$ kg te schrijven. In dat geval schrijven we bij voorkeur één cijfer ongelijk aan nul voor de komma. Dat noemen we de wetenschappelijke notatie. Ook bij 10^1 noteren we de exponent.
Vervolgens hanteren we regels voor het aantal decimalen dat een uitkomst dient te hebben. We onderscheiden de volgende bewerkingen:

Optellen en aftrekken

Bij optellen en aftrekken is de zwakste schakel het getal met de grootste absolute fout. We formuleren de afrondregel meestal als volgt:

Bij optellen en aftrekken geef je het resultaat in het aantal decimalen van het gegeven met het kleinste aantal decimalen.

Voorbeeld:
Bereken de omtrek van een rechthoek van 5,4 bij 3,0662 mm. De rekenmachine geeft 5,4 + 5,4 + 3,0662 + 3,0662 = 16,9324. De zwakke schakel is 5,4 mm met 1 decimaal. De omtrek is dus 16,9 mm.

Eventuele voorvoegsels en machten van 10 moeten gelijk worden gemaakt voordat deze regel in werking treedt: 1,3 mm + 22,2 cm = 0,13 cm + 22,2 cm = 22,3 cm.

Deze afrondregel is intuïtief gemakkelijk te accepteren, maar kan ook meer formeel worden toegelicht. Bij het optellen van twee grootheden a en b met absolute fout Δa en Δb geldt

$$(a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = (a + b) + (\pm\Delta a + \pm\Delta b).$$

Als we in het oog houden dat we de absolute fout moeten interpreteren als de grootste fout die er *kan* optreden, zien we dat die voor de som $a + b$ gelijk is aan $\Delta a + \Delta b$. Op dezelfde manier geldt voor aftrekken

$$(a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b) = (a - b) + (\pm\Delta a - \pm\Delta b).$$

In het ergste geval wijkt het linkerlid $\Delta a + \Delta b$ af van $a - b$. Kortom: bij optellen en aftrekken moeten we de absolute fouten optellen. De afrondregel die leerlingen hanteren is te herkennen als een versimpeling daarvan:

1. Men kijkt naar het aantal decimalen om te zien welk gegeven de grootste absolute fout heeft. (De absolute fout zit in de laatste decimaal.)
2. Men bekommert zich verder niet om de kleinste absolute fout.
3. Men neemt bij het noteren van de som of het verschil het aantal decimalen van het gegeven met de grootste absolute fout over.

Op die manier zit men er nooit ver naast. Er zijn natuurlijk voorbeelden te construeren waarmee men kan aantonen dat de regel niet in alle gevallen optimaal is, maar dat is voor het voortgezet onderwijs nauwelijks relevant.

Vermenigvuldigen en delen

Bij vermenigvuldigen en delen is de zwakste schakel het gegeven met de grootste relatieve fout. We berekenen de relatieve fout echter bijna nooit expliciet. In plaats daarvan nemen we het gegeven met het kleinste aantal significante cijfers. Bij een getal in wetenschappelijke notatie is dat het aantal cijfers van het decimale gedeelte.

Voorbeelden:
$9{,}10938291 \cdot 10^{-31}$ kg heeft 9 significante cijfers (Binas-waarde van de massa van een elektron)
74,020 m heeft 5 significante cijfers (ook te schrijven als $7{,}4020 \cdot 10^{1}$ m)
0,0043 A heeft 2 significante cijfers (ook te schrijven als $4{,}3 \cdot 10^{-3}$ A)

Het derde voorbeeld maakt duidelijk dat nullen vooraf niet meetellen. De afrondregel is nu als volgt:

Bij vermenigvuldigen en delen geef je het resultaat in het aantal significante cijfers van het gegeven met het kleinste aantal significante cijfers.

Voorbeeld:
Bereken de oppervlakte van een rechthoek van 5,4 bij 3,0662 mm. De rekenmachine geeft 5,4 · 3,0662 = 16,55748. De zwakste schakel is 5,4 met twee significante cijfers. De oppervlakte is dus 17 mm^2 (nul decimalen is ook toegestaan; de context maakt wel duidelijk dat er geen geheel getal bedoeld wordt.

Ook deze regel heeft een achtergrond. Beschouw vermenigvuldiging; daarvoor geldt

$$(a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\Delta b = ab\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}\frac{\Delta a}{a}\right) \approx ab\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a}{a}\right)$$

waarbij $\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}$ herkenbaar is als de relatieve fout in ab (als we $\Delta a\Delta b$ verwaarlozen is de absolute fout is gelijk aan $a\Delta b + b\Delta a$). Blijkbaar moeten we bij vermenigvuldigen de relatieve fouten optellen. Ook bij delen komen we tot deze slotsom.

Ook nu is de afrondregel voor leerlingen te herkennen als een ietwat crue toepassing van een meer accurate regel:

1. Men kijkt naar het aantal significante cijfers om te zien welk gegeven de grootste relatieve fout heeft. (Hoe kleiner het aantal significante cijfers, hoe groter de relatieve fout.)
2. Men bekommert zich verder niet om de kleinste relatieve fout.
3. Men neemt bij het noteren van het product of het quotiënt het aantal significante cijfers van het gegeven met de grootste absolute fout over.

Net als bij optellen en aftrekken vindt men op deze manier een verantwoorde afronding. Dat er in sommige gevallen discussie over een nog betere afronding mogelijk is – het zij zo.

Logaritmen

Als de logaritme van een meetwaarde wordt genomen, krijgt het antwoord even veel decimalen als de meetwaarde significante cijfers heeft. (Deze regel is een tikje obscuur; in de praktijk scharen veel leerlingen de logaritme onder "overige bewerkingen".)

Overige bewerkingen

Bij alle overige bewerkingen nemen we op de middelbare school (soms ten onrechte) aan dat het aantal significante cijfers niet verandert (dus bijvoorbeeld $\sqrt{21{,}5} = 4{,}64$).

Opmerkingen

1. Het werken met significante cijfers is enigszins ruw, en het komt voor dat er verschillende afrondingen te verdedigen zijn. Om die reden mag een leerling bij het CSE altijd 1 cijfer meer of minder opgeven dan wat het correctiemodel aangeeft. Deze regel wordt door de meeste bovenbouwdocenten ook gehanteerd bij proefwerken en schoolexamentoetsen.
2. Bij natuur- en scheikunde geven we antwoorden altijd in decimale weergave; we laten breuken, wortels en π dus niet staan. Niet 1/3 m, maar bijvoorbeeld 0,33 m. Niet 10π kg, maar 31 kg.
3. Exacte getallen spelen bij de bepaling van het aantal significante cijfers geen rol. Voorbeeld: in de formule "omtrek cirkel = $2\pi r$" zijn de 2 en de π exact; alleen r is een gemeten waarde.
4. Er zijn natuurkundige grootheden die we niet meten, maar gebruiken om bepaalde eenheden te definiëren. Een voorbeeld is de lichtsnelheid. Die is per definitie 299792458 m/s. Dat is dus exact.
5. Leerlingen dienen ook tussenresultaten te noteren in het juiste aantal significante cijfers. Doorrekenen met niet-afgeronde tussenresultaten (zoals de rekenmachine ze geeft) is wel toegestaan, en uiteraard ook het beste. Het is mogelijk dat een leerling door tussentijdse afronding een iets ander antwoord vindt dan een leerling die doorrekent met getallen in het geheugen van de rekenmachine.
6. We schrijven $\sqrt{21{,}5} = 4{,}64$ en niet $\sqrt{21{,}5} \approx 4{,}64$. Alleen als we nadrukkelijk iets benaderen (zoals bij $\sqrt{2} \approx 1{,}41$) gebruiken we het $\approx$-teken.
7. Als de bank op een spaarrekening een rente van 2,4% geeft, dan is dat geen gemeten waarde. Een interpretatie in termen van significante cijfers zou in dit geval dus misplaatst zijn. Het is een kwestie van gezond verstand om dit soort dingen te begrijpen aan de hand van de context.

In de examenopgaven wiskunde wordt soms aangegeven in hoeveel cijfers een antwoord gegeven moet worden. Zo niet, dan wordt van de leerlingen verwacht dat zij dat uit de context kunnen afleiden. Het is dan niet helemaal duidelijk of hiermee ook dezelfde vuistregels worden bedoeld.

Uit de syllabi wiskunde B (CvTE, 2018):

2.1.2 Nauwkeurigheid en afronden:
Als in een examenopgave niet vermeld is in welke nauwkeurigheid het antwoord gegeven dient te worden, dient de kandidaat die nauwkeurigheid uit de probleemsituatie af te leiden. Het kiezen van een passende maateenheid valt hieronder. Als de probleemsituatie dit toelaat, mag een nauwkeuriger antwoord gegeven worden dan de nauwkeurigheid die de kandidaat uit de probleemsituatie afgeleid zou kunnen hebben. Het correctievoorschrift geeft hier uitsluitsel over.
Een kandidaat kan uit de probleemsituatie afleiden wanneer afronden volgens de gebruikelijke afrondingsregels (6,4 wordt 6 en 6,5 wordt 7) niet van toepassing is.
Een kandidaat moet weten dat tussentijds afronden gevolgen kan hebben voor het eindantwoord en dient hiernaar te handelen.

Bij Subdomein A3 Wiskundige vaardigheden:
11. (De kandidaat kan) kan antwoorden afronden op een voorgeschreven nauwkeurigheid dan wel op een nauwkeurigheid die past bij de probleemsituatie.

Bijlage 6 Notaties

Eenheden
Eenheden worden niet altijd met respect behandeld. Ten onrechte, want ze bieden mogelijkheden die niet iedereen zich realiseert. Neem de slingertijd van een mathematische slinger (een puntmassa aan een ideaal koord). Zolang de uitwijkinghoek klein is, hangt de slingertijd alleen af van de slingerlengte l en de valversnelling g. Wat is dan de formule voor de slingertijd T? Zo veel mogelijkheden zijn er niet. De eenheid van T is s. Hoe kan die ontstaan uit de eenheden van l en g? De eenheid van l is m. De eenheid van g is m/s^2. De enige manier om de eenheden kloppend te krijgen is

$$T = constante \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

Dat de constante 2π is, is op deze manier niet te zien, maar dit voorbeeld maakt hopelijk duidelijk hoe eenheden een controlemiddel of zelfs een leidraad kunnen zijn voor iemand die daar oog voor heeft.

Een natuurkundige die een schoolboek of een eindexamen wiskunde bekijkt, moet echter met lede ogen constateren dat eenheden daarin stiefmoederlijk worden behandeld.
In zuiver wiskundige opgaven is er geen probleem, maar bij toepassingen gaat het vaak mis. Auteurs hebben bij opgaven met een context namelijk de neiging om eenheden weg te moffelen, en het resultaat is meestal dat er uiteindelijk iets wringt. De werkgroep is niet de eerste die dit constateert; deze gedachte is bijvoorbeeld ook te vinden in een recente publicatie van Gerard Koolstra (Koolstra, 2013). In het onderstaande lichten we het verder toe.

Natuurkundigen hebben het bijvoorbeeld over een lengte l, een tijd t en een massa m. De symbolen l, t en m staan dus voor een *grootheid*, en dat is in het algemeen het *product* van een getalswaarde en een eenheid: l = 5,20 m, t = 57 s, m = 20 kg. Daardoor hebben die symbolen een betekenis die onafhankelijk is van de gebruikte eenheid; of we nu l = 5,20 m of l = 520 cm schrijven, de lengte l blijft hetzelfde.

In wiskundeopgaven treffen we vaak andere notaties aan:
- een lengte van l meter, een tijd van t seconden, een massa van m kg
- l is de lengte in meter, t is de tijd in seconden, m is de massa in kg

Formeel gezien is hier niets op tegen, maar dit doet natuurkundigen de wenkbrauwen fronsen. Met deze notatie wordt de aard van de grootheden in kwestie – namelijk hun eenheidonafhankelijke betekenis – geweld aangedaan, en dat is meer dan een academische kwestie. Het loslaten van eenheidonafhankelijkheid brengt bijvoorbeeld mee dat de formule $F= m \cdot a$ net zo goed de vorm $F = 0{,}001 \cdot m \cdot a$ kan aannemen (bijvoorbeeld als m in gram wordt uitgedrukt en a in m/s^2). De factor 0,001 vertroebelt echter het zicht op de werkelijke formule. In het algemeen is het de beste manier om zo lang mogelijk te werken met grootheden en formules die onafhankelijk zijn van de gebruikte eenheden, en pas op het moment dat het echt niet anders kan – bijvoorbeeld bij het uitvoeren van numerieke berekeningen – te kiezen voor bepaalde eenheden.

Opmerkingen

1. Het Internationale Stelsel van Eenheden (SI) is opgebouwd rond zeven basiseenheden , namelijk meter (m), kilogram (kg), seconde (s), ampère (A), kelvin (K), mol en het buitenbeentje, de candela (cd). Elke andere eenheid kan worden uitgedrukt in de basiseenheden. Vaak worden afkortingen gebruikt voor de eenheden van gangbare grootheden; zo wordt de eenheid van kracht, kg · m/s^2, meestal afgekort tot N.
2. Eenheden hebben normaal gesproken geen meervoud. Dus: een lengte van 5,3 meter, een massa van 0,22 kilogram. Uitzonderingen zijn gangbare eenheden voor tijd: 2 dagen, 5 weken.
3. De basiseenheid van massa is kg, niet g. Dat is historisch bepaald en enigszins ongelukkig.
4. De afkorting van "seconde" is "s" (dus niet "sec", zoals soms wordt geschreven).
5. Goniometrische en exponentiële functies (en alle andere functies die gedefinieerd zijn als een machtreeks) zijn alleen gedefinieerd als hun argument een getal is. Als t de tijd is, is e^{-t} bijvoorbeeld niet gedefinieerd, want dan zou de machtreeks bestaan uit termen die allemaal een andere eenheid hebben. Wat wel mogelijk is bij dit soort functies is een hoek in radialen als argument. Een hoek in radialen is immers gedefinieerd als booglengte/straal, dus als de verhouding van twee lengten.
6. Eenheden die genoemd zijn naar een persoon worden voluit geschreven met een kleine letter (ampère, joule, newton) en afgekort met een hoofdletter (A, J, N). Andere eenheden worden zowel voluit als afgekort met een kleine letter geschreven. De enige uitzondering is de liter. Om verwarring met het cijfer 1 te vermijden is daarvoor niet alleen l, maar tegenwoordig ook L toegestaan. Bij het CE van exacte vakken wordt L gebruikt.
7. De voorvoegsels centi, deci, deca en hecto maken geen deel uit van het SI.
8. Men schrijft nooit een wetenschappelijke notatie én een voorvoegsel, behalve bij kg. Men schrijft dus bijvoorbeeld niet 4,7 · 10^3 kΩ, maar maakt een keuze tussen 4,7 · 10^6 Ω en 4,7 MΩ.

Schrijfwijze van eenheden en grootheden.

Binnen wiskunde en natuurkunde zijn er informele afspraken over het gebruik van letters en symbolen voor grootheden en eenheden. Deze staan hieronder vermeld.

1. Gebruik van letters voor grootheden en eenheden.

Werk zoveel mogelijk met de Engelse afkorting voor de grootheden; dus:

- oppervlakte *A*
- lengte *L* of *l*
- temperatuur *T* (absolute temperatuur in Kelvin) of *t* (in graden Celsius)
- periode (slingertijd, trillingstijd, omlooptijd) *T*
- ..

Vermijd het gebruik van dezelfde letters voor de grootheid en de eenheid:

- *U* = 5 V in plaats van *V* = 5 V
- F_N= *5 N* in plaats van *N* = 5 N (normaalkracht)
- ..

2. Notaties in expressies.

Gebruik zoveel mogelijk de wiskundige notatie voor een variabele:

- plaats *x*(*t*)
- snelheid $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
- versnelling $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$
- geen x_t schrijven (niet duidelijk of daar *x(t)* of $\frac{dx(t)}{dt}$ mee wordt bedoeld)
- *L*(*T*): lengte hangt af van de (absolute) temperatuur
- *m*(*t*): massa is afhankelijk van de tijd
- ..

3. Notaties bij grafieken

Horizontaal de onafhankelijke grootheid, verticaal de afhankelijke grootheid, zowel het symbool voor de grootheid als de eenheid staat bij de assen:

- Spanning *U* (V) horizontaal, stroomsterkte *I* (A) verticaal
- Tijd *t* (s) horizontaal
- ..

In leermiddelen en examens wordt (informeel) gebruik gemaakt van typografische conventies. Ook hierin kan enige afstemming plaatsvinden.

Over de notatie van de afgeleide is tussen de syllabuscommissies natuurkunde en wiskunde overleg geweest. Men heeft gekozen voor de notatie $\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt}$.

In bijlage 8 zijn twee onderwerpen beschreven die in wiskundeopgaven nogal eens terugkomen: zwaartekracht (massa, gewicht en zwaartepunt) en periodieke bewegingen. Eenheden kunnen iets zeggen over de betekenis en de juistheid van opgaven en berekeningen. In deze bijlage een voorbeeld van een opgave waar iets wringt.

Bijlage 7 Notatieconventies

Notatieconventies voor de meest voorkomende natuurkundige grootheden en eenheden, afgesproken door uitgevers.

Afspraken notatie

- Schrijf getallen tot en met twintig voluit, tenzij het meetwaarden / getallen bij berekeningen zijn. Gebruik spaties bij duizendtallen, dus 27 000.
- Noteer symbolen van grootheden cursief. Dus: m = 5,0 kg.
- Het symbool voor liter is L, en schrijf dus ook mL.
- Zet % direct achter het getal, zonder spatie.
- Noteer machten als volgt: $2{,}8 \cdot 10^5$
- In eenheden hoort geen vermenigvuldigingspunt, maar een spatie, dus: g mol^{-1} (en niet g · mol^{-1})
- Vermeld bij tussenantwoorden ook steeds de eenheden: concentratie = 2 g / 4 L = 0,5 g/L

Formules

- Schrijf grootheden cursief.
- Gebruik bij het schrijven vansuper- en subscripten bij grootheden romein (= niet cursief).
- Schrijf vectorgrootheden $\vec{F}$ cursief (of met Vergelijkingseditor/Mathtype).
- Gebruik geen afbreekstreepje - als min gebruiken maar een echte min –.
- Gebruik voor een pijl → (of voor de implicatiepijl ⇒).
- Gebruik voor overige symbolen de set Symbol.
- Geef een breuk aan met {teller} / {noemer} of in Vergelijkingseditor/Mathtype.
- Geef een horizontale breukstreep aan met //, dus {teller} // {noemer}.
- Gebruik voor het gradenteken ° (Alt 248) en geen superscript 0.
- Gebruik voor een vermenigvuldigingspunt · (invoegen > symbool > middle dot)
  - vermenigvuldigingspunt bij machten van tien: $5 \cdot 10^7$
  - vermenigvuldigingspunt binnen formules met symbolen: $A = \pi \cdot r^2$
  - vermenigvuldigingspunt binnen formules met symbolen plus cijfers: omtrek cirkel is $2 \cdot \pi \cdot r$.
- Gebruik geen letter x voor het maalteken maar een echte × , uit de set Symbol
  - maalteken bij vermenigvuldigen van ‘gewone’ cijfers: 5 × 5
    Dus ook een maalteken bij ‘gewone’ cijfers (niet bij letters) als berekeningen worden uitgewerkt:
    $W = F \cdot s = 6 \times 5 = 30$ N m = 30 J
  - maalteken bij vermenigvuldigen van om “bij elkaar horende groepjes informatie” van elkaar te scheiden, zoals getallen met machten van tien en formules:
    $5 \cdot 10^7 \times 5 \cdot 10^7$
    zes keer de omtrek van een cirkel is $6 \times 2 \cdot \pi \cdot r$
    $$\frac{(6{,}38 \cdot 10^6)^2}{4 \times (0{,}15 \cdot 10^{12})^2}$$

Bijlage 8 Voorbeelden van begrippen

1. Massa, zwaartekracht, gewicht

De **massa** is een scalaire grootheid met als eenheid kilogram (kg). Massa is ten eerste de traagheid van een voorwerp (m in $F = m \cdot a$); een voorwerp met een grote massa is dus moeilijk in beweging te krijgen maar ook moeilijk af te remmen. Ten tweede is het een eigenschap waar de zwaartekracht op werkt: tussen twee massa's m_1 en m_2 bestaat een aantrekkende **zwaartekracht** of **gravitatiekracht** F_g waarvan de grootte wordt gegeven door

$$F_\mathrm{g} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Volgens de klassieke natuurkunde is de massa een eigenschap van een *voorwerp*. De massa van een voorwerp verandert dus niet als dat voorwerp wordt verplaatst naar een andere planeet of naar de maan. Wat er dan wél verandert is de *zwaartekracht* die op dat voorwerp werkt.

Het **gewicht** is de kracht die een voorwerp uitoefent op zijn omgeving, bijvoorbeeld de tafel waar het op ligt of het touw waar het aan hangt. Als dat voorwerp in rust is, is het gewicht even groot als de zwaartekracht. Let echter op de verschillen.

Als voorbeeld nemen we een atleet.
1. De zwaartekracht en het gewicht werken op verschillende voorwerpen. De zwaartekracht werkt op de atleet, het gewicht werkt op de vloer.
2. Als de atleet een sprong maakt, is zijn gewicht bij het afzetten en neerkomen groter dan de zwaartekracht; zo lang hij in de lucht is, is zijn gewicht nul. De zwaartekracht is tijdens de sprong constant.

Een ander voorbeeld: een astronaut die rondjes draait om de aarde. Zijn massa is even groot als op aarde, de zwaartekracht die op hem werkt is een fractie kleiner (want hij bevindt zich verder van het middelpunt van de aarde), zijn gewicht is nul.

Het **massamiddelpunt** is gedefinieerd door

$$\vec{x} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{x}_i}{\sum_i m_i}$$

Van een komeet die (ver verwijderd van planeten en sterren) buitelend door de ruimte beweegt alleen het massamiddelpunt eenparig, van de knots die een jongleur omhoog gooit beschrijft alleen het massamiddelpunt een parabolische baan.
In een homogeen zwaartekrachtveld is dit het punt waar de zwaartekracht op een voorwerp lijkt aan te grijpen. Om die reden wordt het massamiddelpunt (ook in natuurkundeboeken) ook wel het **zwaartepunt** genoemd. Helemaal correct is dat eigenlijk niet, maar dat is een academische kwestie.

2. Periodieke verschijnselen

De **periode** van een zich herhalend verschijnsel wordt weergegeven met T. Slingertijd, trillingstijd en omlooptijd worden dus altijd weergegeven met T.

De **frequentie** f is het omgekeerde van de periode: $f = 1/T$. De eenheid is 1/s, ofwel hertz (Hz).
De formule van een trilling kunnen we schrijven als

$$u(t) = A\cos(\frac{2\pi t}{T})$$

ofwel

$$u(t) = A\cos(\,2\pi f t)$$

en met $\omega = 2\pi f$ krijgen we

$$u(t) = A\cos(\omega t)$$

We noemen ω de **hoekfrequentie**. De eenheid van ω is rad/s.
De maximale uitwijking (A in bovenstaande formules) noemen we de amplitude of amplitudo. Deze wordt per definitie positief genomen.
Een periodieke beweging om een evenwichtsstand noemen we een **trilling**. Voorbeelden van trillingen:

- beweging van een gewichtje aan een veer,
- slingerbeweging.

Voorbeelden van bewegingen die lijken op een trilling maar het volgens een natuurkundige niet zijn:

- eb en vloed (niet periodiek),
- beweging van een gondeltje van een reuzenrad van opzij gezien (het gondeltje heeft geen evenwichtsstand).

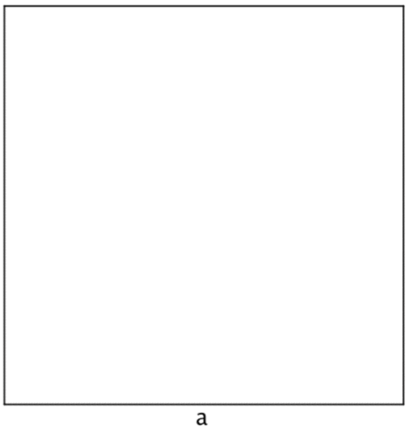
In wiskundeboeken wordt nogal eens het begrip “evenwichtsstand” gebruikt waar een natuurkundige veel terughoudender zou zijn. Het volume van lucht in de longen, de elektrische spanning die het hart afgeeft, de daglengte gedurende een jaar, abstracte goniometrische functies; volgens sommige wiskundemethoden geldt in alle gevallen:
evenwichtsstand = (maximum + minimum)/2.

Het is maar de vraag of die definitie in alle gevallen goed te verdedigen is. Bij een knikker die op een harde vloer stuitert zou de evenwichtsstand zich dan bijvoorbeeld op de helft van de maximale hoogte boven de vloer bevinden; toch een wat wonderlijke voorstelling van zaken. Auteurs van wiskundemethoden zouden misschien iets meer aandacht kunnen besteden aan de opvatting van het begrip evenwichtsstand.

3. Een opgave onder de loep

Eenheden kunnen iets zeggen over de betekenis en de juistheid van opgaven en berekeningen. Neem als voorbeeld deze opgave, in essentie ontleend aan de Kangoeroewedstrijd uit 2007.

Variant 1 *Een vierkant heeft een zijde a. Bereken de waarde van a waarvoor de omtrek van het vierkant even groot is als de oppervlakte.*

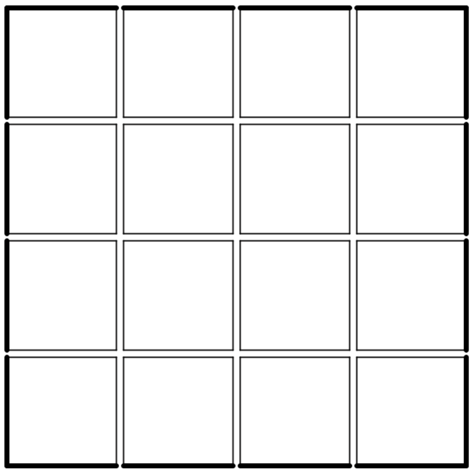


Hier valt een natuurkundige over. Een omtrek kan nooit gelijk zijn aan een oppervlakte – tenzij de begrippen “omtrek” en “oppervlakte” betrekking hebben op een abstracte ruimte zonder eenheden. Van die wending wordt het in de ogen van de natuurkundige niet veel beter. Die zal geen bezwaar hebben tegen abstractie, maar wel tegen een kunstgreep om een gebrek aan betekenis te verdoezelen.

Variant 2 *Een vierkant heeft een zijde van a cm. Bereken de waarde van a waarvoor de omtrek van het vierkant in cm even groot is als de oppervlakte in* cm^2*.*

In deze vorm is de opgave formeel gezien correct. Toch blijft de betekenis dubieus. De opgave richt zich alleen op de getalswaarde van een fysische grootheid, en die heeft geen betekenis. Om het op een andere manier uit te drukken: de vraagstelling suggereert dat er zoiets als een bijzonder vierkant bestaat, terwijl er bij elk vierkant een eenheid van lengte bestaat (namelijk een kwart van de zijde van dat vierkant) waarbij de getalswaarden van de omtrek en de oppervlakte allebei 16 zijn.

Variant 3 *Men legt een aantal kleine vierkantjes tegen elkaar zodat ze één groot vierkant vormen, zoals in de figuur. De zijde van een klein vierkantje past n keer in de zijde van het grote vierkant. Voor welke n is het aantal zijden aan de buitenkant even groot als het totale aantal vierkanten?*



Door er een discreet probleem van te maken zal een natuurkundige er geen bezwaar meer tegen maken.

Bijlage 9 Evenredigheid en verhoudingen

Evenredigheid
Het woord *evenredig* is een van de vele Nederlandse termen die zijn ingevoerd door Simon Stevin (andere voorbeelden zijn *wiskunde*, *natuurkunde*, *scheikunde*, *evenwijdig*, *loodrecht*).
Het woord *reden* geeft een verhouding weer. We treffen dit begrip nog aan bij de meetkundige rij: de reden is de verhouding tussen twee opeenvolgende termen.
De definitie van evenredigheid en omgekeerde evenredigheid volgens *Van Dale, Groot woordenboek der Nederlandse taal*:
"*Twee grootheden zijn recht evenredig of evenredig als het enige malen groter of kleiner worden van de ene ten gevolge heeft, dat de andere evenveel malen groter of kleiner wordt; omgekeerd evenredig, als het groter (kleiner) worden van de ene een evenveel maken kleiner (groter) worden van de andere ten gevolge heeft.*"
De begrippen *evenredig* en *recht evenredig* zijn dus synoniem. Sommigen hebben de voorkeur voor *recht evenredig* om elk misverstand uit te sluiten. Anderen beschouwen *recht evenredig* als een pleonasme dat juist verwarring kan oproepen.

De volgende uitspraken zijn synoniem:

- A en B zijn (recht) evenredig.
- A is (recht) evenredig met B ($A \sim B$).
- B is (recht) evenredig met A ($B \sim A$).
- $A = k \cdot B$ met k een constante ongelijk aan 0.
- De verhouding A/B is gelijk aan een constante k; alleen voor $A = 0$ en $B = 0$ is de verhouding onbepaald.
- Als A met k wordt vermenigvuldigd, dan wordt B ook met k vermenigvuldigd.
- Als B met k wordt vermenigvuldigd, dan wordt A ook met k vermenigvuldigd.
- De grafiek van A, uitgezet tegen B levert een rechte lijn op door de oorsprong.
- De grafiek van B, uitgezet tegen A levert een rechte lijn op door de oorsprong.

Op dezelfde manier zijn synoniem:

- A en B zijn omgekeerd evenredig.
- A is omgekeerd evenredig met B ($A \sim 1/B$).
- B is omgekeerd evenredig met A ($B \sim 1/A$).
- $A = k/B$, met k een constante ongelijk aan 0.
- $B = k/A$, met k een constante ongelijk aan 0.
- Het product $A \cdot B$ gelijk is aan een constante k.
- Als A met k wordt vermenigvuldigd, dan wordt B door k gedeeld.
- Als B met k wordt vermenigvuldigd, dan wordt A door k gedeeld.
- De grafiek van A tegen B is een hyperbool met de coördinaatassen als asymptoten.
- De grafiek van B tegen A is een hyperbool met de coördinaatassen als asymptoten.

Opmerkingen:

- In het algemeen hebben de grootheden A, B en k alle drie een eenheid.
- In het geval $A = k \cdot B^2$ zegt men bij voorkeur: A is evenredig met B^2.
- De Engelse termen zijn *(inversely) proportional* en *(inverse) proportionality*.
- De constante k kan ook afhangen van andere grootheden. Die grootheden worden dan geacht constant te blijven. Als $A = 2 \cdot B \cdot C^3 \cdot D$, dan is A evenredig met B mits C en D constant zijn.

Evenredigheid speelt een belangrijke rol bij het vinden en vastleggen van verbanden in de natuurwetenschappen. In het onderwijs speelt in de natuur- en scheikunde evenredigheid een nadrukkelijke rol, veel meer dan in de wiskunde het geval is. De evenredigheidsconstante heeft bij natuur- en scheikunde ook vaak een specifieke naam die afhangt van de context (snelheid, geleidingsvermogen, veerconstante, warmtegeleidingscoëfficiënt, concentratie).

In de meetkunde komt evenredigheid aan de orde bij gelijkvormigheid en bij oppervlakten en inhouden. Toch ligt er in de schoolwiskunde weinig nadruk op evenredigheid en omgekeerde evenredigheid. Evenredigheid wordt in het Nomenclatuurrapport Wiskunde (NVvW, 2007) onder Analyse en Algebra genoemd, maar komt in de eindtermen wiskunde niet voor.

Verhoudingen

Een veel gebruikt hulpmiddel bij het herkennen en toepassen van evenredige verbanden is de verhoudingstabel. De manier waarop verhoudingstabellen – en tabellen in het algemeen – in schoolboeken worden gepresenteerd is niet standaard, zelfs niet binnen één vak. Er zijn ook verscheidene opvattingen te verdedigen.

Bij een tabel met rijen zet men bij voorkeur de waarden voor x in de bovenste rij.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	7	9	11	13	15	17

Echter: bij een verhoudingstabel valt er veel voor te zeggen om de onafhankelijke grootheid in de onderste rij te plaatsen, vooral als het een voorbeeld met een context betreft:

prijs (€)	1,80	3,60	5,40	7,20	9,00	10,80	12,60
massa appels (kg)	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00

Deze weergave heeft het voordeel dat elk kolommetje een betekenisvolle verhoudingsgrootheid suggereert (in dit voorbeeld 1,80 €/kg).
In het SALVO-materiaal (SALVO, n.d.) wordt consequent gebruik gemaakt van horizontale verhoudingstabellen. De verhoudingsgrootheid wordt ook wel “per-grootheid” genoemd.

Voorbeeld:

Bij het uitpersen van sinaasappels krijgen we een hoeveelheid sap zoals hieronder in een tabel is weergegeven.

hoeveelheid sap in mL	150			1500
aantal sinaasappels	3	6	12	

Deze tabel geeft dan op een logische manier aan: er kan 150 mL sap geperst worden uit 3 sinaasappels, dus 50 mL *per* sinaasappel.

Voorbeeld:

Frits heeft een bijbaantje en wordt per uur betaald. In de tabel hieronder staat hoeveel euro hij krijgt als hij een aantal uren werkt.

salaris in euro (€)	12,50	25
aantal uur	2	

Ook hier is het 'per-getal' weer logisch uit de tabel te halen: Frits krijgt € 6,25 per uur uitbetaald.

In de natuurkunde worden vaak meettabellen gebruikt. Bij een bepaalde grootheid wordt een andere (afhankelijke) grootheid gemeten. Bijvoorbeeld bij het meten van de stroomsterkte I (A) door een weerstand bij verschillende spanningen U(V) die we zelf veranderen.
De werkgroep heeft voor deze meettabellen een voorkeur voor een tabel met kolommen. Dit is de manier waarop meetgegevens worden genoteerd in natuurwetenschappelijke vakken. Het is ook de manier waarop gegevens worden ingevoerd in grafische rekenmachines, en in spreadsheets zoals Excel. Een tabel met kolommen nodigt uit om een aparte kolom op te nemen met de verhoudingsgrootheid, zodat te zien is of deze wel of niet constant is. Ook bij een groot aantal kolommen blijft de tabel overzichtelijk. Een meettabel met kolommen sluit dus niet alleen beter aan bij wat gebruikelijk is, maar is (naar de subjectieve maar unanieme mening van de werkgroep) ook beter leesbaar dan een tabel met rijen.

In een aantal artikelen gaan o.a. Wijers, Van der Valk en Broekman (Wijers, Van der Valk, Broekman, 2001) in op verhoudingen en verhoudingstabellen; zie de literatuurlijst.

Bijlage 10 Vectoren in wiskunde en natuurkunde

Vectoren in engere zin: fysische interpretatie

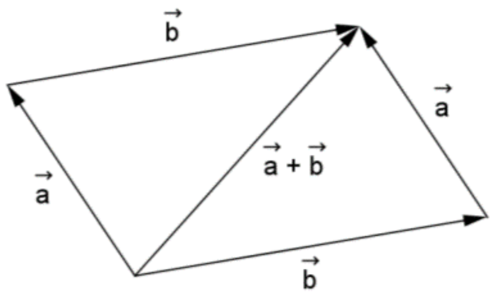
Een vector in natuurkunde is een grootheid die wordt gekenmerkt door een grootte en een richting; voorbeelden zijn snelheid $\vec{v}$ en kracht $\vec{F}$. Men onderscheidt verschillende soorten vectoren:

1. Vaak wordt een vector toegevoegd aan een bepaald punt in de ruimte. We spreken dan van een gebonden vector. De windsnelheid op 500 m hoogte boven de Dom van Utrecht is een voorbeeld.
2. Bij krachten is niet zozeer het aangrijpingspunt van belang – dat is soms niet eens bekend – maar de werklijn van de kracht. We spreken dan van een glijdende vector.
3. Wordt een vector gebruikt om een positie ten opzichte van de oorsprong weer te geven, dan spreken we van een plaatsvector. We schrijven een plaatsvector meestal als $\vec{x}$ of $\vec{r}$.
4. Wordt een vector niet geassocieerd met een punt in de ruimte, dan spreken we van een vrije vector.

Voor rekenwerk met vectoren maakt het type geen verschil. Een vector $\vec{a}$ wordt in een bepaald coördinatenstelsel weergegeven met een kolom kentallen, bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$. We gaan in eerste instantie uit van vectoren in een tweedimensionale ruimte; de generalisatie naar drie of meer dimensies laat zich raden.

Optellen, vermenigvuldigen, norm

Optellen van vectoren gebeurt meetkundig door vectoren kop aan staart te leggen of met een parallellogramconstructie. Het resultaat is hetzelfde. In de onderstaande figuur zijn beide methoden herkenbaar.



Algebraïsch geldt $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$ zoals direct blijkt uit een tekening van een optelling van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ als plaatsvectoren.

Vermenigvuldiging van een vector met λ betekent dat de vector bij dezelfde richting λ keer zo lang wordt; algebraïsch geldt $\lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \end{pmatrix}$.

De lengte of norm $|\vec{a}|$ van een vector $\vec{a}$ wordt gegeven door $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Als het vectorkarakter van een grootheid niet wordt benadrukt (of nog niet behandeld is) schrijft een natuurkundeleraar de norm van een vector $\vec{a}$ ook wel gewoon als a.

Inwendig product

Het inwendig product $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is gedefinieerd als $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ met γ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Men kan aantonen dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

In een puur wiskundige context kan het inwendig product gebruikt worden om de hoek tussen twee vectoren te berekenen. In de natuurkunde zijn sommige grootheden van nature een inwendig product; zo is de arbeid W het inproduct van een kracht $\vec{F}$ en een verplaatsing $\vec{s}$ (dus $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$). Zonder gebruik te maken van deze notatie redt een natuurkundeleraar zich met woorden als “arbeid is de kracht maal de verplaatsing in de richting van de kracht” en de formule $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\gamma$.

Uitwendig product

Het uitwendig product $\vec{a} \times \vec{b}$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in een driedimensionale ruimte is gedefinieerd als een vector waarvoor geldt:

1. De grootte wordt gegeven door $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\gamma|$ met γ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. (Meetkundig opgevat: de grootte van $\vec{a} \times \vec{b}$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$.)

Zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk gericht of tegengesteld gericht, dan is $\vec{a} \times \vec{b}$ gelijk aan de nulvector. In alle andere gevallen wordt de richting van $\vec{a} \times \vec{b}$ als volgt bepaald:

2. Het uitwendig product $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en loodrecht op $\vec{b}$. Onder die voorwaarde zijn er twee richtingen die in aanmerking komen. Met de rechterhand kan worden bepaald welke de juiste is. Draai de vingers van de rechterhand van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$, zodanig dat dit gebeurt onder een hoek tussen 0° en 180°. De duim geeft dan de richting van $\vec{a} \times \vec{b}$ aan. (In plaats van de rechterhand gebruikt men ook wel een van de vele alternatieven, zoals de kurkentrekkerregel).

Het gebruik van de rechterhand wordt niet ingegeven door diepe gedachten. Het is een keuze, een conventie. Grootheden die gedefinieerd zijn als een uitwendig product hebben ook nooit een richting met een fysische betekenis. Een voorbeeld is het impulsmoment, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Het impulsmoment kan worden opgevat als een vector, maar er is niets wat werkelijk in de richting van $\vec{L}$ wijst, en men zou uiteindelijk dezelfde waarneembare verschijnselen beschrijven als men consequent de linkerhand zou gebruiken. Om die reden noemen natuurkundigen het impulsmoment wel een axiale vector of pseudovector. Ook de magnetische inductie $\vec{B}$ (zoals die bijvoorbeeld voorkomt in de formule $F = q\vec{v} \times \vec{B}$ voor de Lorentzkracht) is een axiale vector.
Bij gebruik van Cartesische coördinaten met rechtsdraaiende oriëntatie is het uitwendig product te berekenen met $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$.

Merk op dat we in het bijzondere geval $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ het kental $a_x b_y - a_y b_x$ mogen interpreteren als de georiënteerde oppervlakte van het parallellogram dat wordt opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Vectoren als wiskundige objecten
Een vector is in de wiskunde formeel gezien een ruimer begrip. Vectoren worden gedefinieerd in termen van een algebraïsche structuur, en fysische vectoren vormen slechts een deelverzameling van de objecten die aan die definitie voldoen. Voor de middelbare school gaat het behandelen van die formaliteit veel te ver. Wel is het van belang te weten dat er een verschil van opvatting kan bestaan. Mogelijk worden vectoren door een wiskundige beschouwd als getalkolommetjes die aan bepaalde regels voor optellen en vermenigvuldigen voldoen, en door een natuurkundige als bijna tastbare pijlen.

Notatie van vectoren
Er bestaan verschillende notaties voor vectoren. De werkgroep is voorstander van het gebruik van een pijltje (vanzelfsprekend bij wiskunde *en* natuurkunde), omdat daarmee het vectorkarakter benadrukt wordt en omdat een pijltje duidelijk met de hand te schrijven is. Voor vectoren die worden uitgeschreven in kentallen adviseert de werkgroep het gebruik van de kolomnotatie met plaats $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, snelheid $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, versnelling $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, kracht $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$, enzovoorts.

Twee artikelen
De werkgroep wil twee artikelen noemen. Ten eerste de voordracht van Joop van Dormolen "Vectoren in de wiskunde en in de natuurkunde" (Dormolen, 1975) die nog niet aan betekenis heeft ingeboet. Ten tweede een artikel uit "Shaping the future", chapter 12: Maps and Models – Approaches to Vectors (Carson, 1999), waar enkele discussiepunten worden opgevoerd:

Defining vectors simply as quantities that have magnitude and direction is unhelpful. The key thing is knowing how they are added.

Notation between mathematics and physics courses needs to be standardised. There could be more two-way cross-fertilisation between mathematics and physics.

In de natuurkunde kan het uitwendige product goed gebruikt worden bij (kracht)moment en bij de lorentzkracht:
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ en $\overrightarrow{F_L} = l\vec{I} \times \vec{B}$ en $\overrightarrow{F_L} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Bij wiskunde D heeft de docent de vrijheid om het uitwendig product te behandelen en met zijn natuurkundecollega af te spreken wanneer dat het beste past binnen het curriculum.

Bijlage 11 De grafische rekenmachine (GRM)

De verschillen tussen de grafische rekenmachine (GRM) en de wetenschappelijke rekenmachine liggen in de eerste instantie op het gebied van functieonderzoek:

- plotten van grafieken;
- numerieke bepaling van coördinaten van bijzondere punten van grafieken (toppen, snijpunten met de x-as, snijpunten van twee grafieken);
- numerieke bepaling van de afgeleide;
- numerieke bepaling van integralen.

In tweede instantie heeft de GRM uitgebreide functies op het gebied van kansrekening en statistiek:

- Gegevens kunnen worden ingevoerd in een tabel en vervolgens geanalyseerd met statistische functies (variantie, standaardafwijking, mediaan, kwartielen).
- Combinatorische functies en kansverdelingsfuncties zijn beter toegankelijk; in het bijzonder is het vaak niet meer nodig om kansen te berekenen via de standaard normale verdeling.

Wetenschappelijke rekenmachines beschikken ook over een deel van deze functies, maar met de GRM gaat alles veel overzichtelijker en gemakkelijker.

De grafische component van de GRM opent echter op het gebied van kansrekening ook geheel nieuwe mogelijkheden, zo zijn kansverdelingsfuncties te plotten als functie van een invoervariabele.

Een integraal over een normale verdeling kan bijvoorbeeld naar believen worden geplot als functie van de ondergrens, de bovengrens, de verwachtingswaarde μ of de standaardafwijking σ.
Dat brengt een nieuwe manier mee om bepaalde opgaven op te lossen. Als in een opgave over de normale verdeling bijvoorbeeld wordt gevraagd om μ te berekenen, kan een leerling de integraal over de normale verdeling plotten als functie van μ, en de GRM vervolgens de grafiek laten snijden met een horizontale lijn die de gewenste kans vertegenwoordigt.

Op een vergelijkbare manier kan een leerling moeizaam gebruik van arcsin, arccos en arctan omzeilen. Bij een opgave als “bereken α in drie decimalen nauwkeurig als $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ waarbij $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$” hoeft de leerling slechts de grafieken van $y = \sin x$ en $y = \frac{2}{5}$ te plotten en het juiste snijpunt te bepalen.

De GRM heeft nog veel meer mogelijkheden die we niet allemaal de revue laten passeren. Het is duidelijk dat de verschillen met een standaard wetenschappelijke rekenmachine zeer groot zijn, en dat deze verschillen zich vooral bij wiskunde manifesteren.

De syllabuscommissies wiskunde (A, B en C) hebben er voor gepleit om de GRM toe te laten. Zij noemen daarbij argumenten als:

- Het gebruik van ICT is in de examenprogramma's een integraal onderdeel. Dat gebruik van ICT is voor de wiskunde uitvoerbaar door het gebruik van de GRM toe te staan.
- In de centrale examens in de pilots is de GRM noodzakelijk. Het onderwijs is ook volledig op het altijd aanwezig zijn van de GRM afgestemd.
- De introductie en uitwerking van de in genoemd subdomein A3, punt 1 beschreven wiskundige denkactiviteiten is een belangrijk aspect van de vernieuwing van de examenprogramma's wiskunde. Leerlingen leren daarbij te kiezen tussen een berekening of benadering, het aflezen van een tabel of van een grafiek, het krijgen van een indruk van het verloop van een grafiek, het voorspellen en controleren van antwoorden, het dynamiseren van wiskundige modellen door het variëren van de optredende parameters. De GRM is een essentieel onderdeel van deze vaardigheden. Hier hoort ook bij het inzicht in de beperkingen van de GRM bij het maken van numerieke benaderingen.
- De GRM heeft een duidelijke meerwaarde op twee belangrijke terreinen:
  - bij het oplossen van authentieke problemen, d.w.z. problemen uit de dagelijkse praktijk waar het eerder uitzondering dan regel is dat je mooie getallen hebt, dan wel mooie uitkomsten
  - bij het werken met parametervoorstellingen van grafieken, waarbij de dynamiek van de GRM benut wordt.
- De GRM is een normaal en frequent gebruikt hulpmiddel in alle lessen wiskunde in de bovenbouw havo/vwo. Veel leerlingen ontlenen aan de grafische rekenmachine een zekere mate van examenzekerheid.
- De GRM is niet alleen een hulpmiddel om te rekenen of te tekenen, maar is ook een didactisch gereedschap om concepten in te voeren en te verduidelijken.
- De GRM speelt een essentiële tijdbesparende rol. Dat geldt zeker waar het om het werken met realistische wiskundige modellen gaat, die immers altijd benaderende waarden bevatten.

Een deel van deze argumenten geldt ook voor natuurkunde. Ook daar is de GRM een normaal en frequent hulpmiddel en wordt deze als didactisch gereedschap gebruikt.

Bijlage 12 Overleg afstemming wiskunde natuurkunde tweede fase

Onderstaande personen hebben deelgenomen aan het overleg afstemming wiskunde natuurkunde tweede fase op maandag 30 juni 2014.

Wilfried Allaerts	NVON
Roel van Asselt	NPW
Henry van Bergen	NVON
Robert Bouwens	Syl cie na
Juan Dominguez	Syl cie wi
Johan van de Konijnenberg	SLO/Dr. Nassau College
Marianne Lambriex	Syl cie wi/NvVW
Anneke de Leeuw	Syl cie na
Berenice Michels	SLO
Jos Paus	SLO/Bonhoeffercollege
Maarten Pieters	SLO
Jos Remijn	Syl cie wi
Kees Rijke	SLO/ Syl cie wi
Pieter Smeets	Cito/Syl cie na
Wim Sonneveld	SLO/TU Delft
Jos Tolboom	SLO
Chris van Weert	IOBT
Jacqueline Wooning	CvTE
Robert Zibret	NVON
Bert Zwaneveld	Syl cie wi

SLO heeft als nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling een publieke taakstelling in de driehoek beleid, praktijk en wetenschap. SLO heeft een onafhankelijke, niet-commerciële positie als landelijke kennisinstelling en is dienstbaar aan vele partijen in beleid en praktijk.

Het werk van SLO kenmerkt zich door een wisselwerking tussen diverse niveaus van leerplanontwikkeling (stelsel, school, klas, leerling). SLO streeft naar (zowel longitudinale als horizontale) inhoudelijke samenhang in het onderwijs en richt zich daarbij op de sectoren primair onderwijs, speciaal onderwijs en voortgezet onderwijs. De activiteiten van SLO bestrijken in principe alle vakgebieden.

Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
E info@slo.nl
www.slo.nl

company/slo
@slocommunicatie

Foto omslag: Shutterstock.com

slo